

**TEMA B)**

**LA PREFABBRICAZIONE STRUTTURALE**

**ASPETTI TEORICI**

**Presidente di sessione: dott. ing. Lamberto SORTINO**

**Relatore generale: prof. ing. Marco MENEGOTTO**



STRUTTURE A PANNELLI: INDAGINE SPERIMENTALE SUL COMPORTAMENTO  
DEI COLLEGAMENTI ORGANIZZATI SOTTOPOSTI AD AZIONI TAGLIANTI  
E PROVVISI DI ARMATURE DISTANZIATE\*

Pier Paolo DIOTALLEVI, Maurizio MERLI, Franco ZARRI

Istituto di Tecnica delle costruzioni  
Facoltà di Ingegneria  
BOLOGNA

SOMMARIO

Si riportano i risultati di esperienze condotte su collegamenti organizzati, a chiavi elastiche distribuite e con armatura distanziata; gli aspetti esaminati si riferiscono alla resistenza per sollecitazione monotona, alla resistenza a fatica oligociclica, alla rigidità a taglio e all'influenza del distanziamento delle armature concentrate. Si confrontano i risultati ottenuti con quelli proposti dalla più recente letteratura tecnica e si individuano alcuni elementi utili per la progettazione.

SUMMARY

This paper deals with the results of an experimental research about keyed distributed shear joints of reinforced concrete, with concentrated transverse reinforcement; they have been examined some questions such as shear resistance under monotonic and alternate loadings, shear stiffness and influence of the distance of the concentrated reinforcement. The results are compared with the ones proposed by the most updated technical literature and they have been individuated some elements useful for structural design.

1. PREMESSA

La ricerca documentata dalla presente nota deve intendersi essenzialmente come un'integrazione della precedente indagine, di carattere prevalentemente sperimentale, sviluppata dagli Autori a riguardo della resistenza a fatica oligociclica di un particolare tipo di unione organizzata, diffusamente proposta per il collegamento in verticale dei pannelli portanti utilizzati nell'ambito

---

\*Lavoro svolto col contributo finanziario del CNR. Gli Autori hanno contribuito in ugual misura all'approntamento della presente nota.

delle strutture prefabbricate (I).

Con riferimento alla classificazione suggerita dal CEB (V), pubblicata successivamente alla redazione delle Istruzioni CNR (IV) e da esse ovviamente non recepita, tali unioni vengono definite "a chiavi distribuite", intendendosi come tali i collegamenti tra pannelli i cui bordi presentano dei risalti tali da conformare, per il getto del calcestruzzo in opera, un alloggiamento costituito da nicchie a forma grossolanamente esagonale (fig. 1).

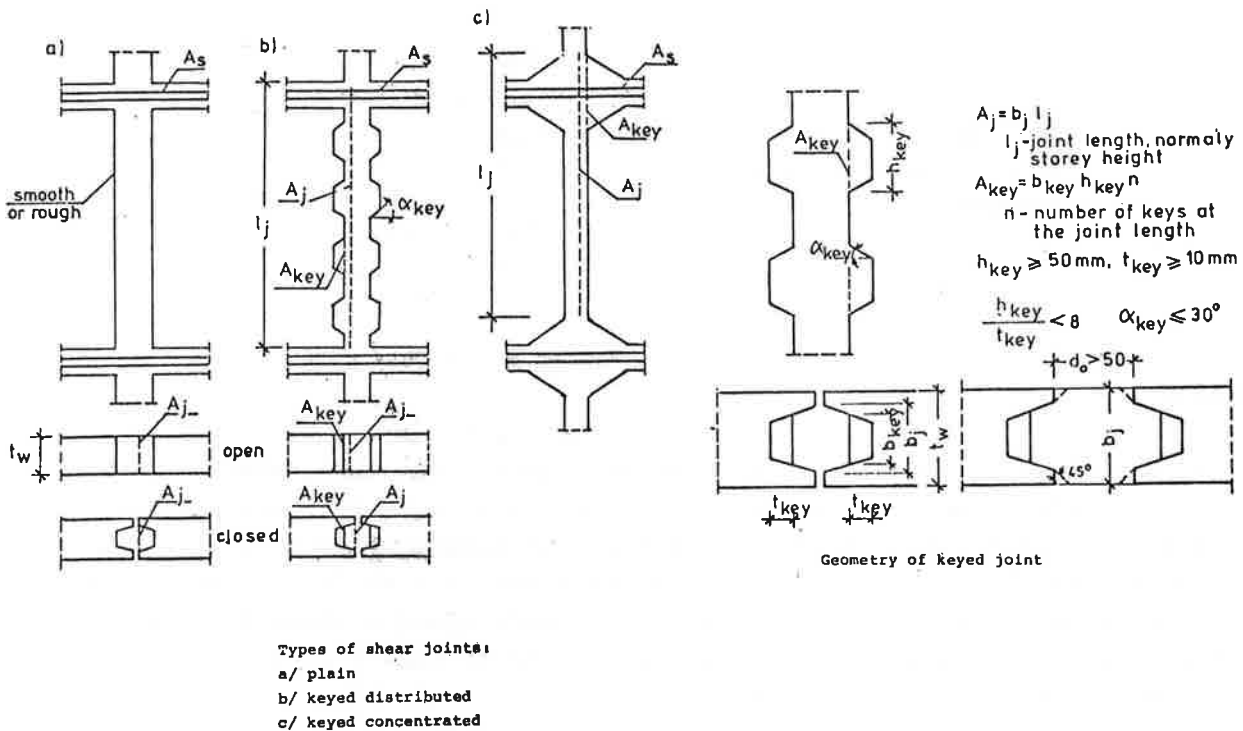


Fig. 1: da (V)

A differenza di quanto previsto nel corso della precedente indagine, si è introdotta l'armatura di collegamento solamente in corrispondenza delle estremità superiore e inferiore delle unioni e non a livello di ciascun risalto, con l'evidente intenzione di saggiare quanto questa diversa disposizione delle armature possa influire sul comportamento dell'unione stessa.

Il collegamento studiato è poi del tipo "aperto", nel senso che i risalti hanno spessore uguale a quello del pannello e non vi sono risvolti dei bordi in grado di mascherare il nucleo del calcestruzzo gettato in opera: tale disposizione preclude la possibilità di utilizzare per l'aderenza anche la superficie dei risvolti, ma possiede il non trascurabile vantaggio di consentire l'esame visivo del getto in opera e quindi l'individuazione di eventuali difetti di esecuzione.

I diversi aspetti esaminati del comportamento statico dei collegamenti comprendono essenzialmente la valutazione dello sforzo di taglio semplice in grado di provocare la crisi sia per sollecitazioni monotone (cioè tali da indurre scorrimenti progressivamente crescenti), sia per sollecitazioni di carattere alternato e l'individuazione della rigidità del collegamento.

Significativo è inoltre risultato lo studio, seppure forzatamente limita-

to a causa degli ingenti costi, dell'influenza del distanziamento delle armature sul valore della sollecitazione tagliante di collasso di tipo monotona.

L'esistente letteratura tecnica a riguardo dell'argomento trattato è piuttosto scarsa e comunque avara di risultati di carattere sperimentale da poter confrontare con quelli ottenuti; tra i vari contributi documentati nella bibliografia, oltre agli iniziali studi di Pommeret, vanno comunque citati gli studi eseguiti da Tassios (II) e Kavyrchine (III).

Come preliminare osservazione di carattere generale deve ancora essere sottolineata la circostanza che l'indagine, avente come oggetto prototipi inevitabilmente di grandi dimensioni, è risultata di non semplice organizzazione, oltre che impegnativa e, come già accennato, dispendiosa.

Al riguardo è doveroso rivolgere un ringraziamento al Centro Studi OIKOS di Bologna, che ha parzialmente finanziato la predisposizione della macchina di prova, nonché alle Imprese Grandi Lavori ed Errevi di Bologna, che hanno reso possibile l'esecuzione delle indagini.

## 2. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE E MECCANICHE DEGLI ELEMENTI PROVATI E MODALITA' DI PROVA

Le caratteristiche geometriche dei giunti (sviluppo verticale, ampiezza e conformazione dei risalti) sono uguali a quelle adottate nella precedente indagine, e sono indicate nello schema di fig. 2. Per quanto attiene all'altezza del collegamento, essa è stata condizionata dalle dimensioni della macchina di prova; la geometria dei risultati è sostanzialmente conforme alle indicazioni contenute nel documento guida del CEB (V), richiamate in fig. 1:

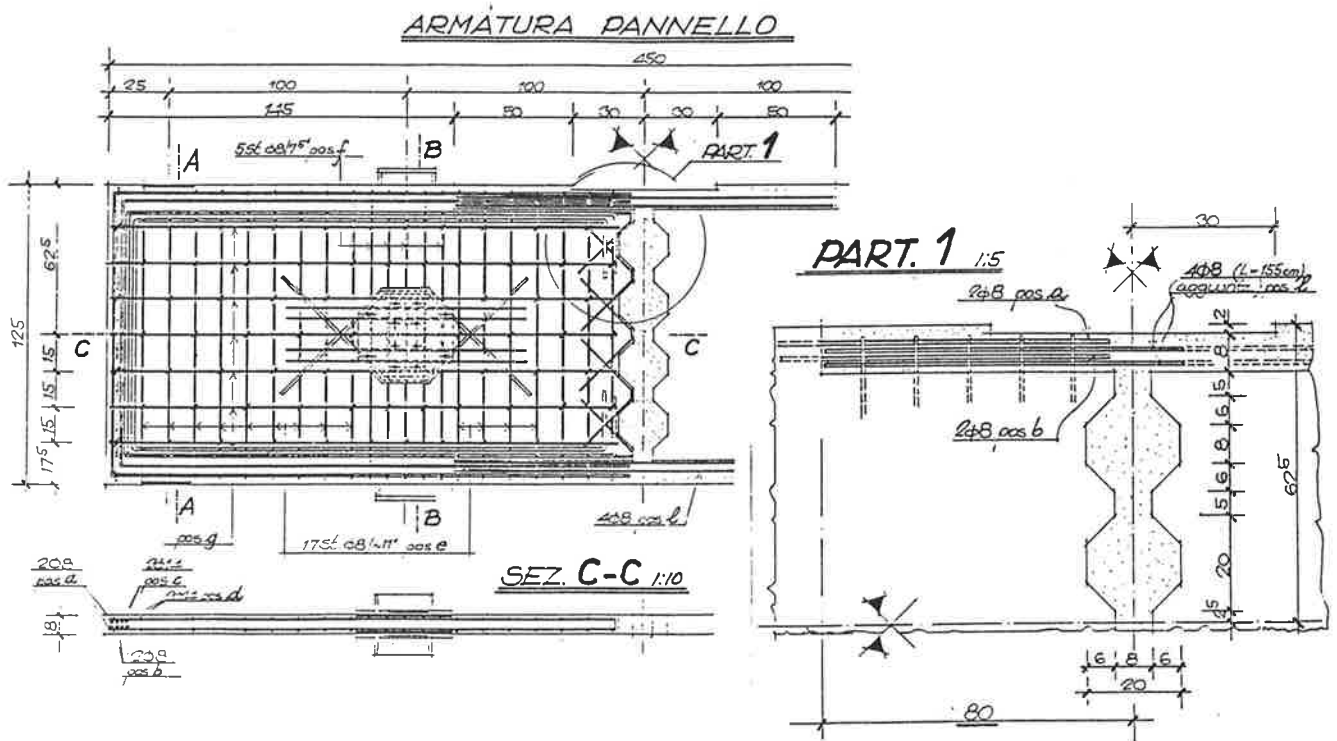


Fig. 2

$h_{key}$  = altezza del risalto = 200 mm > 50 mm,

$t_{key}$  = spessore del risalto = 60 mm > 10 mm,

$h_{key}/t_{key}$  = 3,33 < 8 ,

$d_0$  = distanza minima dei lembi del giunto = 80 mm > 50 mm.

L'inclinazione a 45° delle facce inclinate del risalto è superiore al valore massimo indicato di 30°, ma, tenuto conto dell'elevato valore di  $t_{key}$ , tale circostanza appare di modesto peso in ordine alla considerazione dell'efficienza dell'unione.

L'armatura di collegamento, concentrata ai bordi superiore ed inferiore del collegamento, è costituita da 4 barre da c.a. del tipo FeB44K controllato, opportunamente ancorate.

In una prima fase di indagine si sono utilizzate barre con diametro  $\phi = 10$  mm, per avere una quantità di armatura concentrata non inferiore a quella complessivamente prevista nel caso di armatura diffusa (10 barre con diametro  $\phi = 8$  mm); nella seconda e più ampia fase di indagine si sono utilizzate invece barre con diametro di  $\phi = 8$  mm, corrispondenti ad una percentuale meccanica di armatura comunque largamente superiore al valor minimo fissato dal citato documento del CEB:

$$\frac{A_s f_{yd}}{A_j f_{cd}} = 0,39 > 0,01 .$$

E' da notare come le armature di collegamento siano inserite all'interno di armature a cappio fuoriuscenti dai bordi degli elementi giuntati; con tale disposizione si è cercato di tener conto del confinamento conseguente alla continuità materiale in senso verticale che si riscontra nelle strutture realizzate.

Per il calcestruzzo del giunto, adeguando le modalità di getto a quelle prevedibili in cantiere, si è cercato di ottenere una classe del collegamento  $R_{ck}$  variabile tra 14,0 e 17,0 N/mm<sup>2</sup>; il controllo del risultato raggiunto è stato effettuato sottoponendo, contestualmente alle prove sui collegamenti, a prova di compressione semplice alcuni campioni di conglomerato formati all'atto della esecuzione dei giunti.

L'attrezzatura impiegata per la misura della resistenza oligociclica è rappresentata in fig. 3, ed è la medesima utilizzata nell'ambito della ricerca precedentemente sviluppata. Si è impiegato però un diverso dispositivo di caricamento, poiché, come accennato nella nota (I), in presenza di carichi applicati ai bordi superiore ed inferiore dei pannelli collegati, si ottiene una configurazione del sistema che assicura l'annullamento della complessiva azione flessionale sul giunto, ma non permette di escludere la presenza di tensioni normali, seppure a risultante nulla.

Mediante un dispositivo di rinvio, si è allora provveduto a trasferire la zona di applicazione del carico in corrispondenza dell'asse orizzontale del complesso dei pannelli giuntati, ottenendo così un sistema strutturale dotato di un doppio asse di antisimmetria.

Il dispositivo impiegato per la misura della resistenza sotto sollecitazioni di carattere monotono è rappresentato in fig. 4.

Poiché in questo caso si è utilizzato per il carico un unico martinetto, posto a contrasto dei pannelli giuntati mediante un dispositivo di rinvio costi

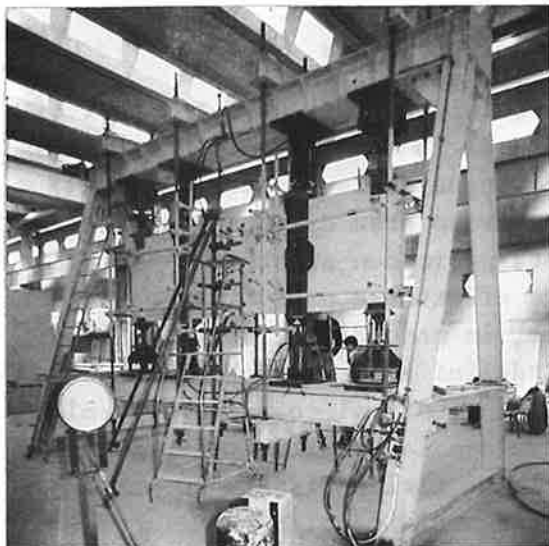


Fig. 3

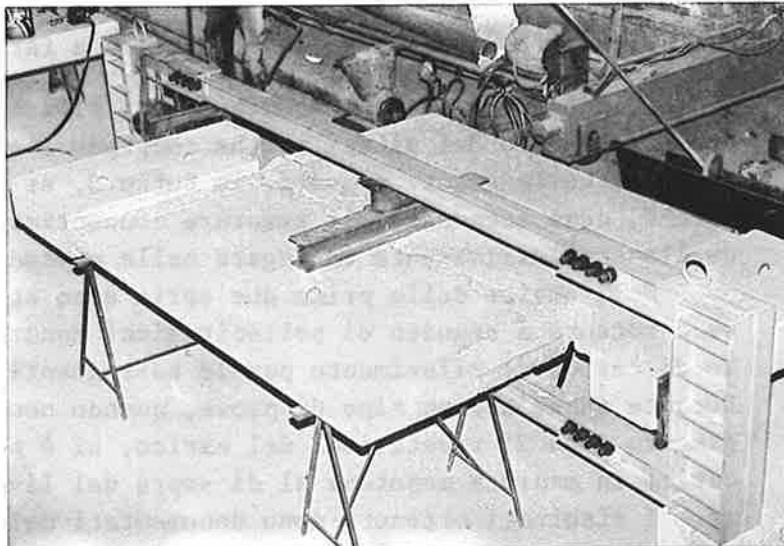


Fig. 4

tuito da profilati metallici, si è ottenuto come risultato l'applicazione al collegamento di puro sforzo tagliante. Questo dispositivo di carico è stato utilizzato per l'indagine sul comportamento di unioni di diversa altezza, cercando di evidenziare le differenze di comportamento in conseguenza di un maggiore o minore distanziamento delle armature concentrate.

Tale aspetto del problema è apparso assai significativo poiché, mentre nel caso di unioni con armatura diffusa le dimensioni del prototipo non sono essenziali ai fini della previsione del comportamento dei collegamenti impiegati nella pratica costruttiva, nel caso di unioni provviste di armatura concentrata, l'impiego di prototipi di altezza ridotta evidentemente altera i rapporti dimensionali, in modo da rendere scarsamente attendibile l'estrapolazione dei risultati ai casi correnti, dove il distanziamento dei nuclei di armatura può essere pari alla dimensione dell'interpiano.

Per una migliore comprensione dei risultati ottenuti conviene sottolineare che le prove sono state condotte, sia nel caso di sollecitazioni monotone, sia nel caso di sollecitazioni alternate, dosando i carichi applicati e registrando, ove del caso, le deformazioni corrispondenti; si tratta pertanto di prove a carico imposto, per le quali, all'atto dello scarico, si registrano deformazioni residue diverse da 0 e non è possibile seguire il ramo discendente della curva carichi-scorrimenti.

Le deformazioni rilevate consistono essenzialmente nelle traslazioni relative tra i lembi dei pannelli affacciati sul giunto; in alcuni casi le traslazioni sono state rilevate lungo l'altezza del giunto, ma, riscontrato che la distribuzione degli scorrimenti non dava luogo a variazioni rilevanti, in genere si è fatto riferimento alla traslazione relativa fra i bordi del collegamento.

Il rilievo è stato eseguito con comparatori aventi la sensibilità di  $1/100$  di mm, oppure con livello di precisione posto a distanza tale da assicurare la medesima sensibilità dei comparatori.

### 3. RISULTATI DELLE INDAGINI

#### 3.1 Prove atte a definire la resistenza a fatica oligociclica

L'indagine è stata condotta in tre riprese, corrispondenti alle tre fasi di confezionamento dei giunti, ed ha compreso l'esame di 16 collegamenti. La prima serie di collegamenti provati, in tutto 3, si distingue dalle rimanenti anche perché, come accennato, le armature concentrate avevano area di poco superiore a quella complessivamente impiegata nelle precedenti prove con armatura diffusa.

Nell'ambito delle prime due serie sono state effettuate preliminarmente prove a rottura a seguito di sollecitazioni monotone, in modo da definire un livello di carico di riferimento per le susseguenti indagini sotto carichi alternati. Durante quest'ultimo tipo di prove, quando non si è giunti al collasso del collegamento dopo 25 ripetizioni del carico, si è provocata la crisi incrementando il carico in maniera monotona al di sopra del livello di carico fissato in partenza. I risultati ottenuti sono documentati nella seguente tabella 1.

Tabella 1

(V = sforzo di taglio applicato al giunto;  $V_c$  = sforzo di taglio di collasso del giunto;  $V_{cm}$  = sforzo di taglio di collasso per sollecitazione monotona;  $V_{cma}$  = sforzo di taglio di collasso per sollecitazione monotona, a seguito dell'applicazione di un certo numero di sollecitazioni alternate;  $\bar{V}_{cm}$  = media dei valori di  $V_{cm}$ , calcolata separatamente per la 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie di prove;  $\bar{V}_{cma}$  = media dei valori di  $V_{cm}$  e  $V_{cma}$ , calcolata separatamente per la 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie di prove.

Pannello n.	Tipo di caricamento	$V_{cm}$	$V_{cma}$	$V_a$	$V_a / \bar{V}_{cm}$	$V_a / \bar{V}_{cma}$	Cicli prima della rottura n.	Data
		KN	KN	KN				
1 <sup>a</sup> serie	1.1 monotono	370	-	-	-	-	-	16/07/85
	2.1 alternato/monotono	-	350	100	0,27	0,27	2,5	19/07/85
	3.1 alternato/monotono	-	410	270	0,73	0,73	7,0	26/07/85
2 <sup>a</sup> serie	1.2 monotono	280	-	-	-	-	-	22/11/85
	2.2 monotono	300	-	-	-	-	-	18/04/86
	3.2 alternato	-	-	250	0,90	0,83	1,5	23/04/86
	4.2 alternato	-	-	240	0,87	0,80	2,5	28/04/86
	5.2 alternato/monotono	-	270	200	0,72	0,67	25,0	30/04/86
	6.2 alternato/monotono	-	320	230	0,83	0,77	14,0	30/06/86
	7.2 alternato	-	-	290	1,05	0,97	1,0	02/07/86
	8.2 monotono	250	-	-	-	-	-	07/07/86
3 <sup>a</sup> serie	1.3 alternato/monotono	-	330	230	0,83	0,77	25,0	11/12/86
	2.3 alternato/monotono	-	300	250	0,90	0,83	25,0	12/12/86
	3.3 alternato	-	-	280	1,01	0,93	3,0	16/12/86
	4.3 alternato/monotono	-	350	260	0,94	0,87	25,0	17/12/86
	5.3 alternato	-	-	270	0,98	0,90	7,5	19/12/86



a) Resistenza per sollecitazioni monotone. A riguardo del valore del carico di collasso per il caricamento monotono, le citate Istruzioni del CEB forniscono la seguente espressione della resistenza di progetto di un collegamento verticale a chiavi distribuite, soggetto a puro sforzo tagliante, con percentuali meccanica di armatura paragonabile a quella dei collegamenti provati:

$$R_{Vd} = \frac{1}{\gamma_d} \left[ (\beta_1 A_{key} + 0,02 A_j) f_{cd} + \beta_3 (A_s f_{yd}) \right] ,$$

essendo:  $A_{key}$  ed  $A_j$  rispettivamente la superficie del singolo risalto e del giunto (<sup>1</sup>)(si veda lo schema di fig. 1),  $\beta_1$  e  $\beta_3$  due coefficienti numerici rispettivamente pari a 0,07 e 0,6, e  $\gamma_d$  un "coefficiente complementare di sicurezza parziale", da assumersi, per il caso in esame, pari a 1,15.

Assumendo:  $f_{cd} = \frac{0,83 \cdot 15,5}{1,6} = 8,04 \text{ N/mm}^2$  e  $f_{yd} = \frac{440}{1,15} = 382,6 \text{ N/mm}^2$ , rispettivamente per i collegamenti della 1<sup>a</sup> e della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie, si ottiene:

$$R_{Vd,1^a \text{ serie}} = 155 \text{ KN} , \quad R_{Vd,2^a \text{ serie}} = 109 \text{ KN} .$$

Poiché però il confronto deve essere effettuato con gli effettivi valori del carico di collasso e non con stima giustamente cautelativa di tale valore, qual è il carico di progetto per gli stati limite ultimi, può essere significativo determinare  $R_V$  prescindendo da  $\gamma_d$  e dai coefficienti  $\gamma_m$  che riducono le resistenze caratteristiche dei materiali.

Procedendo in questo modo si ottiene:

$$R_{V,1^a \text{ serie}} = 219 \text{ KN} , \quad R_{V,2^a \text{ serie}} = 159 \text{ KN} .$$

Come riferimento orientativo, conviene ancora ricordare che comunque il limite superiore della resistenza tagliante di progetto viene posto uguale a  $0,3 A_j f_{cd}$  e nel caso in esame risulta:

$$R_{Vd,1^a \text{ serie}} = R_{Vd,2^a,3^a \text{ serie}} = 233 \text{ KN} .$$

Sostituendo alla resistenza di progetto la resistenza caratteristica del calcestruzzo, si ottiene invece:

$$R_{V,1^a \text{ serie}} = R_{V,2^a \text{ e } 3^a \text{ serie}} = 374 \text{ KN} .$$

b) Resistenza a fatica oligociclica. In fig. 5 è riportato il diagramma  $V / \bar{V}_{cma}$  in funzione del numero dei cicli di sollecitazione alternata occorsi per giungere al collasso. Si deve notare che, in difformità di quanto prevedibile, il valore di  $\bar{V}_{cma}$  per la 1<sup>a</sup> serie di prove è risultato pari a  $\bar{V}_{cm}$  e per la 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie di prove è risultato addirittura superiore a  $\bar{V}_{cm}$ . Tale circostanza indica che, ovviamente, il valore di  $\bar{V}_{cm}$ , ottenuto per altro da un numero assai li

(<sup>1</sup>) Come sarà meglio chiarito al punto 3.2, nella valutazione dell'area del giunto si deve considerare un'altezza pari alla metà di quella dei pannelli.

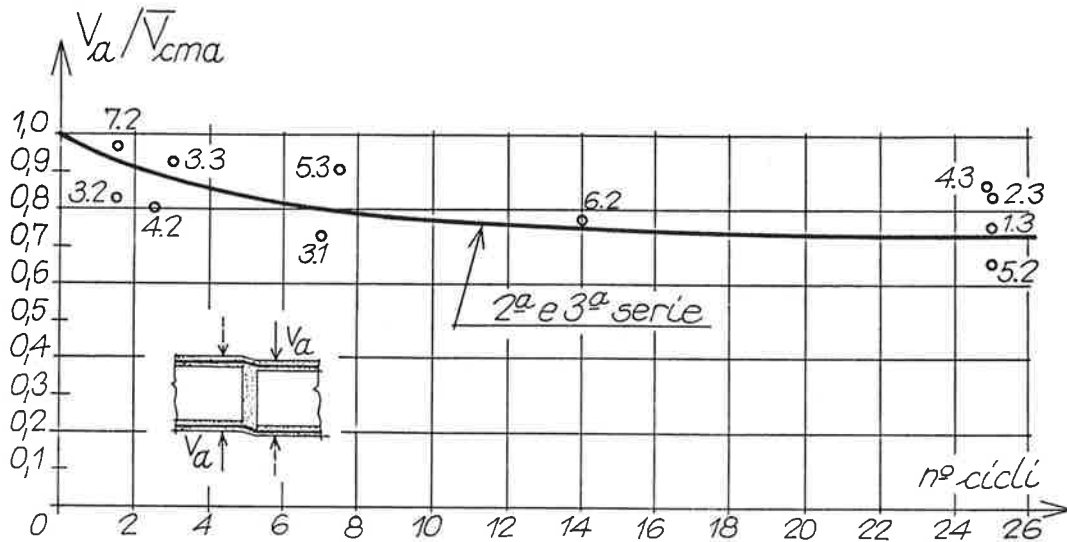


Fig. 5

mitato di prove, deve essere considerato come un limite inferiore del valore reale.

Indubbiamente l'andamento della "curva a fatica" non è scevro da incertezze, essenzialmente perché il numero di prove eseguite, pur ragguardevole dal punto di vista dell'impegno richiesto, è invece limitato per consentire deduzioni che abbiano significato dal punto di vista statistico; nonostante ciò, la tendenza della curva appare ben delineata e le indicazioni quantitative deducibili non prive di credibilità.

c) Rigidezza a taglio. La rigidezza a taglio dei collegamenti viene individuata sulla base dei diagrammi sollecitazione tagliante-scorrimento relativo dei lembi dei pannelli affacciati sul giunto. Dal punto di vista concettuale al termine scorrimento, come è consuetudine nell'ambito della Scienza delle costruzioni, andrebbe attribuito il significato di variazione angolare; il documento proposto dal CEB, così come le note di altri Autori (III), fanno invece riferimento al termine "scorrimento" con l'accezione "spostamento relativo", e la misura viene in effetti riportata adottando come unità di misura il mm. Questo modo di intendere lo scorrimento presuppone, per rendere possibili i confronti tra diverse esperienze, un ugual spessore dei giunti, ma tale caratteristica geometrica non risulta ancora standardizzata e quindi le correlazioni che si cercano di istituire con i risultati riportati nella letteratura tecnica vanno accettate con la consapevolezza che esistono in realtà margini di oscillazione.

I valori dello scorrimento utilizzati nel seguito sono quelli corrispondenti ad uno spessore ideale del collegamento pari a 100 mm e sono stati ottenuti da misure effettuate di scorrimento angolare.

In fig. 6, a titolo di esempio, è riportato l'andamento dello sforzo tagliante, rapportato al valore dello sforzo tagliante di collasso, in funzione dello scorrimento relativo per due dei collegamenti provati nella 2<sup>a</sup> fase.

I diagrammi, pur con qualche irregolarità, mostrano un andamento non troppo discosto da un ideale andamento rettilineo, corrispondente all'ipotesi di elasticità lineare.

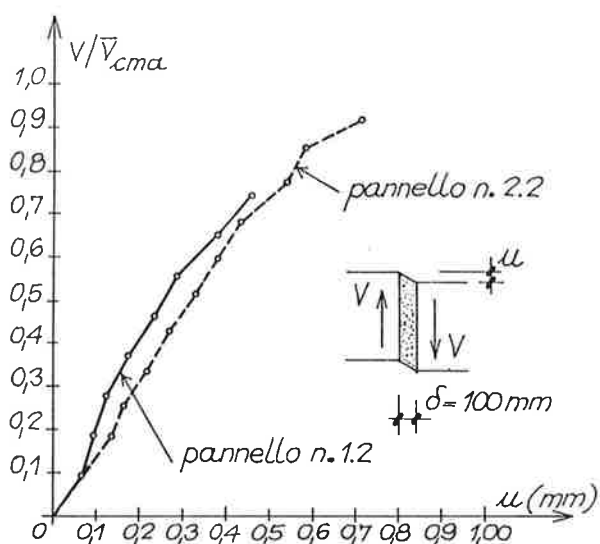


Fig. 6

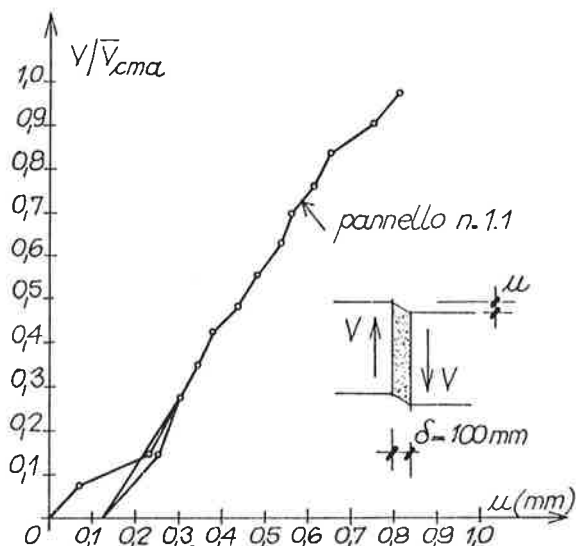


Fig. 7

Procedendo ad una interpolazione lineare con il metodo dei minimi quadrati si trova un coefficiente angolare  $C_{sper}$  della retta interpolante pari a:

$$C_{sper} = 15,96 \bar{V}_{cma} \text{ KN/mm} .$$

Tale coefficiente angolare rappresenta il coefficiente di rigidità tagliante del collegamento e il suo valore può essere confrontato con quello ottenuto dall'espressione analitica fornita dalle istruzioni CEB:

$$C_{CEB} = c_{CEB} A_j = \frac{R_V}{0,4 u_R} ,$$

essendo  $R_V$  la sollecitazione tagliante massima sopportata dal collegamento e  $u_R$  lo scorrimento relativo ad essa associato; nel caso di unioni a chiavi distribuite, si trova che il valore di  $u_R$  può variare da 1,0 a 5,0 mm, a seconda che gli spigoli degli smussi siano inclinati meno o più di  $30^\circ$ . Per le considerazioni già espresse, nel caso in esame, dove l'inclinazione è maggiore di  $30^\circ$ , ma l'altezza dei risalti è notevole, si può far riferimento ad un valore intermedio tra quelli limite indicati.

Tenuto conto delle caratteristiche geometriche del collegamento si ottiene così:

$$C_{CEB} = c_{CEB} A_j = 12,50 R_V \text{ KN/mm} .$$

Poiché nella sostanza  $\bar{V}_{cma}$  coincide con  $R_V$ , è immediato il confronto tra il dato sperimentale e l'espressione di natura empirica fornita dal CEB: la variazione percentuale, a seconda del valore di riferimento, oscilla tra il 22 e il 28%.

Seguendo le indicazioni del CEB, è interessante confrontare la rigidità tagliante del collegamento con quella che avrebbe un ideale giunto monolitico in calcestruzzo, di uguale altezza e spessore, perfettamente solidale ai lembi dei due pannelli accostati.

Poiché per il collegamento in esame lo sforzo tagliante di collasso è stato pari a circa 300 KN, il valore numerico della rigidezza risulta:

$$C_{\text{collegamento}} = 15,96 \bar{V}_{\text{cma}} \cong 479 \text{ KN/mm} .$$

Assumendo per il calcestruzzo i parametri  $E_c = 5700 \sqrt{R_{ck}}$ ,  $\nu = 0,15$ , con  $R_{ck} = 15,5 \text{ N/mm}^2$  (cioè facendo riferimento ad una classe di conglomerato simile a quella adottata per il giunto), si ha  $E_c \cong 22400 \text{ N/mm}^2$ ; ammettendo un comportamento elastico del calcestruzzo e assumendo ancora uno spessore di riferimento  $s$  pari a 100 mm, risulta allora ( $b \cdot h = 0,048 \text{ m}^2$ ):

$$C_{\text{cls}} = \frac{G \cdot b \cdot h}{s} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{b \cdot h}{s} = 4670 \text{ KN/mm} .$$

La rigidezza di un collegamento monolitico sarebbe quindi circa 10 volte superiore a quella del giunto organizzato con chiavi distribuite, e tale circostanza indubbiamente dovrebbe suggerire qualche cautela nella valutazione dello stato di sollecitazione di mensole elementari rese solidali mediante unioni di questo genere.

Nel caso di uno dei pannelli della 1ª serie (fig. 7), cui è stato applicato uno sforzo iniziale di assestamento relativamente modesto ( $V/\bar{V}_{\text{cma}} = 0,27$ ), il coefficiente di rigidezza varia tra  $12,00 \bar{V}_{\text{cma}}$  e  $14,30 \bar{V}_{\text{cma}}$  KN/mm, a seconda che si consideri o meno l'assestamento prodotto dal caricamento iniziale. Lo scorrimento massimo raggiunto in corrispondenza della sollecitazione di collasso oscilla tra 0,79 mm e 0,68 mm, sempre in relazione alla circostanza che si consideri o meno l'assestamento iniziale.

Si deve notare che, comunque sia fatta la valutazione, lo scorrimento massimo è leggermente inferiore al valore indicato dal rapporto CEB, e la rigidezza determinata su base sperimentale è corrispondentemente maggiore di quella desumibile dalla formula empirica sempre del CEB; la discrepanza sui valori percentuali del coefficiente  $C$  indubbiamente si ricollega, oltre alla già citata incertezza sullo spessore del giunto, alle incertezze nella valutazione dell'effettivo valore del carico di collasso per sollecitazione monotona e alle imprecisioni collegate al procedimento di interpolazione lineare, ma appare ragionevole ammettere che anche le espressioni del CEB possano essere affette da una certa indeterminazione.

In fig. 8 è riportato ancora il diagramma sforzo di taglio-scorrimento per uno dei collegamenti della 1ª serie; relativamente al valore del coefficiente di rigidezza al taglio valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per gli esempi precedenti.

Può essere interessante notare che il collegamento, prima di essere portato a collasso, è stato sottoposto a due cicli di caricamento alternato, fino ad un livello massimo di sollecitazione tagliante pari a circa 1/3 del carico di collasso; in accordo con le valutazioni che saranno successivamente espresse a riguardo della resistenza oligociclica, appare evidente che cicli di sollecitazione, anche alternata, di entità paragonabile a quelle indotte in fase di esercizio, non modificano sensibilmente il comportamento a rottura dell'unione.

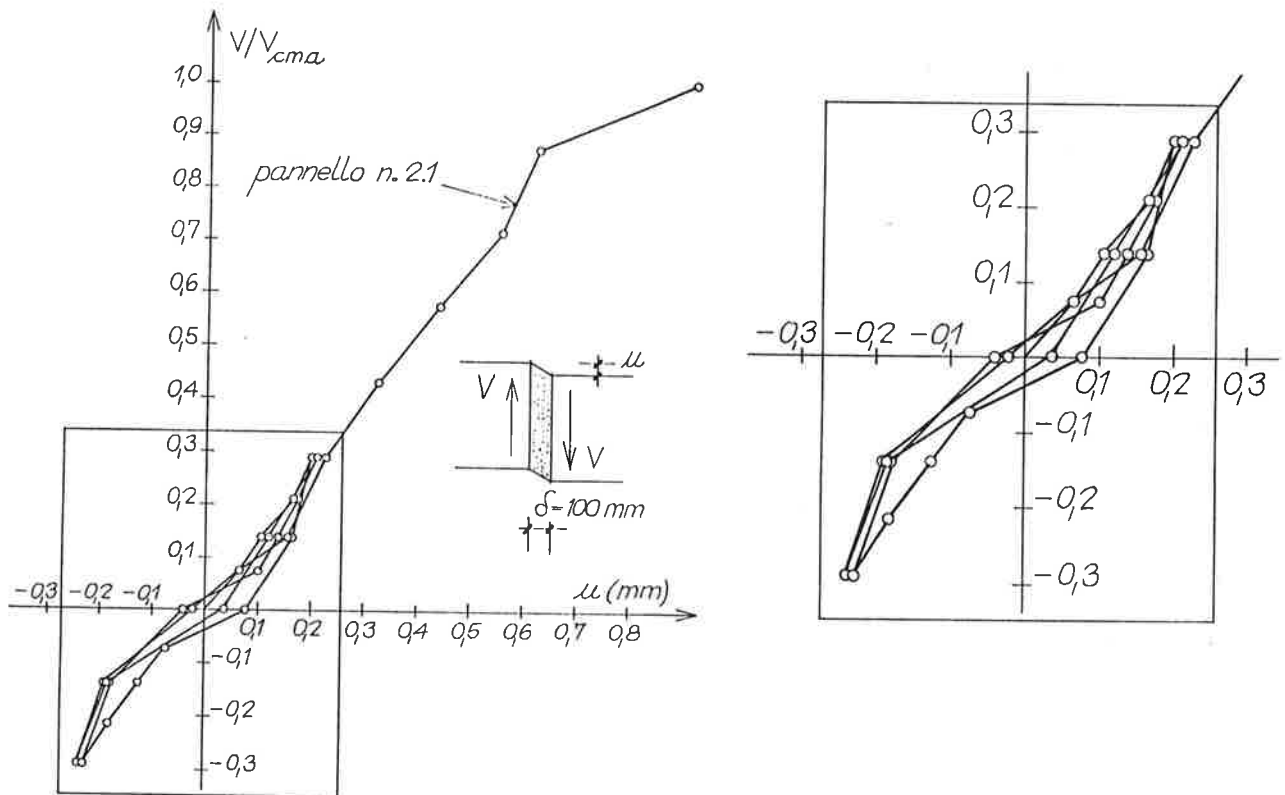


Fig. 8

### 3.2 Prove atte a definire l'influenza del distanziamento delle armature concentrate

L'indagine è stata condotta sui collegamenti di pannelli aventi 3 diverse altezze  $2d$ , rispettivamente pari a 1,05; 2,05 e 2,80 m e comprendenti quindi 4, 8 e 11 "alveoli" delle medesime dimensioni adottate per le prove a fatica oligociclica. Un'indicazione delle caratteristiche geometriche fondamentali dei collegamenti provati è riportata in fig. 9.

L'entità dell'armatura concentrata ai bordi superiore e inferiore del pannello è stata modificata in relazione all'altezza del collegamento, in modo da mantenere una percentuale meccanica di armatura abbastanza simile per i tre tipi di giunti esaminati; in particolare, secondo l'ordine crescente dell'altezza, si sono adottate barre  $\phi = 8, 12$  e  $14$  mm. Complessivamente sono stati sottoposti a prova di carico di rottura 9 collegamenti, 3 per ciascuna delle altezze considerate.

I risultati delle prove, espressi in termini di sollecitazione tagliante massima raggiunta, sono riportati nella tabella 2.

In fig. 10 è riportato in diagramma l'andamento dello sforzo tagliante di rottura, al variare del distanziamento dell'armatura concentrata di estremità; tale andamento è stato ottenuto tracciando la parabola passante per i 3 punti rappresentativi dei valori medi degli sforzi taglianti di collasso, corrispondenti alle 3 altezze di collegamento esaminate.

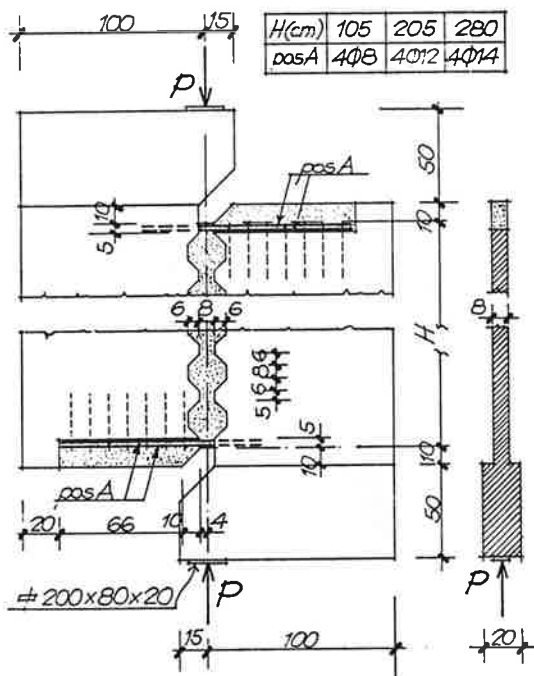


Fig. 9

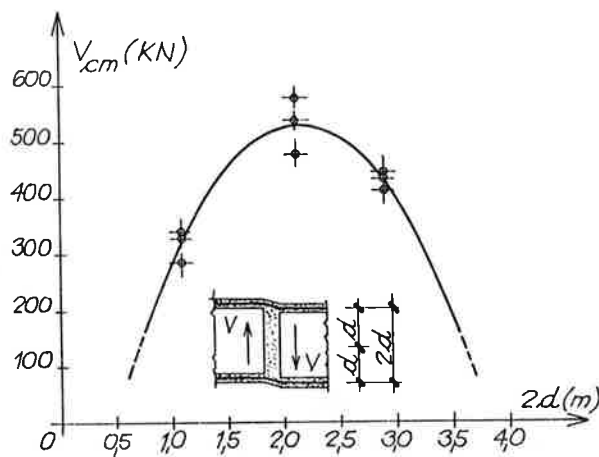


Fig. 10

Tabella 2

( $V_{cm}$  = sforzo di taglio di collasso del giunto)

	Pannello n.	Tipo di caricamento	$V_{cm}$ (KN)	Data di prova
1 <sup>a</sup> serie, h = 1,05 m	1	monotono	330	12/10/86
	2	monotono	320	24/10/86
	3	monotono	280	14/11/86
2 <sup>a</sup> serie, h = 2,05 m	4	monotono	560	24/10/86
	5	monotono	520	14/11/86
	6	monotono	460	23/12/86
3 <sup>a</sup> serie, h = 2,80 m	7	monotono	400	24/10/86
	8	monotono	430	14/11/86
	9	monotono	420	23/12/86

Per una corretta interpretazione dei risultati ottenuti si deve osservare che, volendo correlare le caratteristiche geometriche dei collegamenti oggetto dell'indagine a quelle delle unioni di corrente impiego, indicata con  $2d$  la distanza dei cordoli di estremità, si può ritenere che essi siano rappresentativi del comportamento di collegamenti utilizzati nell'ambito di edifici aventi distanziamento di armatura pari a  $d$ ; in effetti, volendo analizzare il comportamento di collegamenti estesi ad un'altezza di interpiano pari a  $2d$ , sarebbe stato necessario prevedere un solo cordolo armato, ma questo avrebbe comportato una modifica eccessivamente onerosa dei sistemi costruttivi adottati nell'indagine.

In aggiunta è da rilevare che avendo individuato, seppure con un certo margine di approssimazione, il massimo relativo della curva indicante il valore dello sforzo di taglio di collasso, si può ritenere che anche un'indagine eseguita su unioni di altezza maggiore o con un solo cordolo a metà altezza, difficilmente avrebbe potuto portare elementi in grado di modificare sensibilmente le prospettive di valutazione dei risultati.

Si deve ancora sottolineare che, in termini statistici, il campionamento effettuato è indubbiamente limitato e quindi le osservazioni deducibili hanno un carattere prevalentemente qualitativo; in ogni caso però, elemento confortante sull'attendibilità dei risultati è la relativamente modesta dispersione che li caratterizza.

Come ultima osservazione si deve notare che il valore dello sforzo tagliante di collasso fornito dalle prove sui collegamenti di minor altezza è assai vicino a quello determinato sotto caricamento monotono per i collegamenti di pari altezza provati per l'accertamento della resistenza a fatica oligociclica; tale circostanza avvalora ancora l'attendibilità dei risultati ottenuti.

#### 4. CONCLUSIONI

Con riferimento a quanto esposto, è possibile trarre qualche indicazione utile per la progettazione strutturale e consolidare i risultati da assumere come base per successivi approfondimenti del tema trattato.

Gli aspetti considerati sono molteplici e può convenire esaminarli separatamente.

##### 4.1 Resistenza per sollecitazioni monotone (collegam. con altezza $2d = 1,05$ m)

Il valor medio della resistenza a sforzo di taglio per i pannelli della 1<sup>a</sup> serie è risultato pari a 370 KN, con variazione massima del 5%; per la 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie si è ottenuto invece un valor medio della resistenza di 300 KN, con variazione massima del 17%.

Nel valutare i risultati occorre tenere conto che la 1<sup>a</sup> serie era costituita da 3 campioni e la deviazione standard è pari a 20 KN, mentre la 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie comprendevano 8 campioni e la deviazione standard è pari a 31 KN; pertanto è da ritenersi che anche i risultati della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie, nonostante la relativamente alta variazione percentuale, corrispondano ad una distribuzione caratterizzata da una dispersione modesta e i risultati siano sufficientemente attendibili <sup>(2)</sup>.

I valori teorici della resistenza, dedotti dal rapporto del CEB in modo da rendere possibile un confronto con i dati sperimentali, indicano un valore della resistenza che è circa pari a 220 KN per il collegamento della 1<sup>a</sup> serie e a 160 KN per il collegamento della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie.

L'approssimazione non è molto soddisfacente, ma è da notare che nell'appli-

---

(<sup>2</sup>) Si noti che le valutazioni espresse sono confortate, come già accennato, anche dai risultati delle prove su giunti della medesima altezza eseguite, seppure con diversa attrezzatura, per individuare l'influenza del distanziamento delle armature concentrate.

cazione delle formule del CEB giocano un ruolo determinante coefficienti di natura empirica che ovviamente necessitano ancora di una taratura e l'esperienza condotta, assieme ad altre dello stesso tipo, può risultare utile in questo senso; in ogni caso le formule tengono conto in forma sostanzialmente corretta dell'influenza della diversa quantità di armatura e il valore limite superiore fissato per la resistenza (370 KN) è assai vicino ai risultati ottenuti.

Il valor medio della resistenza al taglio di un collegamento di ugual geometria, ma con armatura diffusa nell'altezza, ottenuto portando a collasso 3 campioni, è risultato pari a 390 KN (si veda (I)). Confrontando tale valore con quelli ottenuti nella presente indagine, si trova una discreta coincidenza; il risultato era comunque per vari aspetti prevedibile, dato il ridotto distanziamento delle armature.

#### 4.2 Resistenza a fatica oligociclica (collegamento con altezza $2d = 1,05$ m)

La cosiddetta "curva a fatica", e ci si riferisce a quella che interpola i risultati della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> serie di prove, mostra un asintoto di ordinata non discosta da 0,7, cioè si ha che sollecitazioni minori del 70% di quella corrispondente alla rottura monotona, il collegamento può essere sottoposto ad un numero praticamente illimitato di alternanze di carico. Il degrado iniziale, relativamente rapido, è tale che dopo 8-10 cicli di caricamento alternato la resistenza del giunto si riduce del 20-25%.

I risultati trovati sono simili, anche se lievemente più ottimistici di quelli individuati nella precedente indagine su collegamenti di ugual altezza, ma con armatura diffusa; inoltre trovano sostanziale conforto anche nelle indicazioni di Kavyrchine (III), secondo cui la resistenza dell'unione si riduce, rispetto a quelle monotone, al 90% dopo una decina di cicli e occorre invece un migliaio di cicli per ridurre la resistenza al 70%.

#### 4.3 Rigidezza al taglio

Esiste una buona correlazione tra i risultati ottenuti e le espressioni di origine empirica suggerite del CEB; pur con le incertezze che inevitabilmente un'indagine di ampiezza limitata non può rimuovere, tali espressioni risultano sostanzialmente affidabili. Qualche perplessità suscita in particolare il valore indicato dello scorrimento relativo necessario per mobilitare la resistenza massima alle sollecitazioni taglienti. In effetti i valori riscontrati sperimentalmente sono leggermente inferiori e si avvicinano di più a quelli segnalati da Kavyrchine ( $u_R \approx 0,5$  mm)(III).

Importante è, a parere degli scriventi, l'osservazione relativa al confronto tra la deformabilità di un collegamento organizzato e quella di un collegamento effettivamente monolitico; tale osservazione solleva qualche perplessità sui consueti criteri di calcolo della tensione nel caso di pareti composte con elementi prefabbricati, soggetti, ad esempio, ad azioni orizzontali.

In effetti il calcolo delle tensioni normali alla base di una mensola complessa, costituita cioè da più mensole elementari collegate reciprocamente da unioni verticali del tipo organizzato, se effettuato tenendo conto della perfetta solidarietà delle mensole elementari, può portare ad una sottostima dello stato tensionale effettivo.



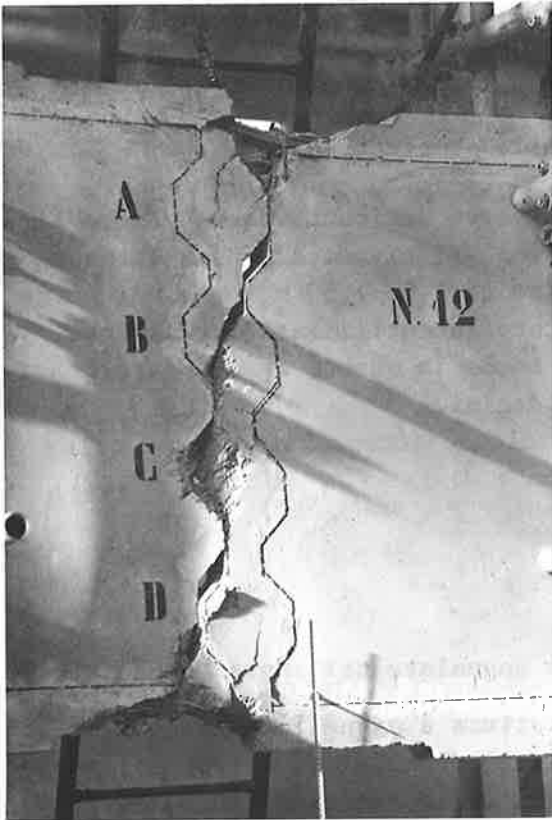


Fig. 12

Fig. 11

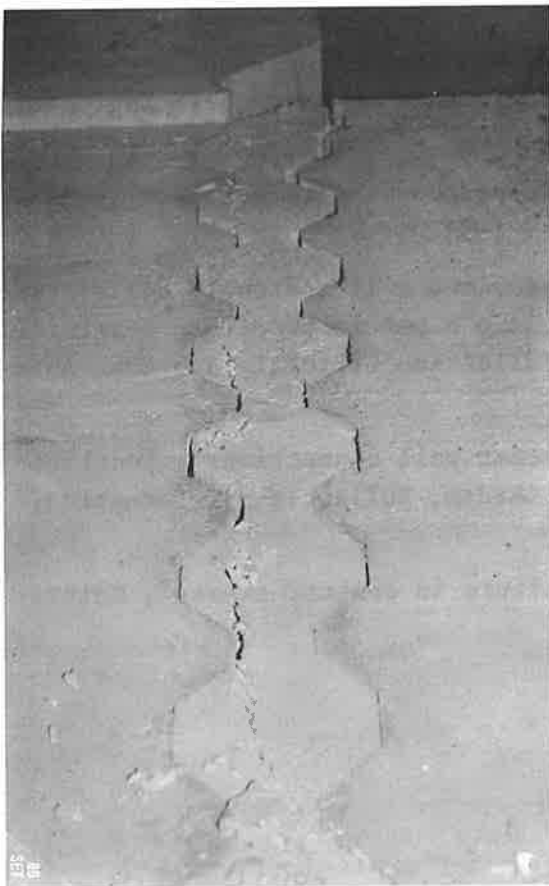


Fig. 13



Fig. 14

Il problema è stato considerato nelle recenti Istruzioni per il progetto delle strutture prefabbricate edite dal CNR, ma non vengono fornite indicazioni specifiche sui criteri di calcolo da adottare; il tema potrebbe essere suscettibile di un'approfondita indagine teorico-sperimentale.

#### 4.4. Influenza del distanziamento reciproco delle armature

L'influenza è sensibile e, con tutte le riserve derivanti da un numero limitato di prove effettuate, sembra che la miglior efficienza si possa ottenere con un distanziamento delle armature dell'ordine di 1,00-1,50 m, e quindi orientativamente pari alla metà dell'altezza di interpiano utilizzato attualmente nelle strutture dell'edilizia prefabbricata. Anche in questo caso appare comunque indispensabile un approfondimento delle indagini.

Si riportano nelle figg. 11, 12, 13 e 14 alcune fotografie atte ad illustrare le modalità di rottura di alcune unioni.

#### BIBLIOGRAFIA

Si richiama integralmente la bibliografia segnalata nella precedente nota:

I) P.P. DIOTALLEVI, M. MERLI, F. ZARRI, "Struttura a pannelli: indagine sperimentale sul comportamento a rottura di giunti organizzati sottoposti a pure azioni taglianti di segno alterno", Atti delle giornate AICAP, Bari, 26-29 maggio 1983.

In aggiunta:

II) T.P. TASSIOS, S.G. TSOUKANTAS, "Precast panels connection under cyclic actions", Proceedings of the 7th European Conference on Earthquake Engineering, n. 5, Athens, Sept. 1982.

III) M. KAVYRCHINE, "Effets de sollicitations répétées et alternées sur le béton armé ou précontraint", AITBTP, n. 424, mai 1984.

IV) C.N.R., Istruzioni per il progetto, l'esecuzione e il controllo delle strutture prefabbricate in conglomerato cementizio e per le strutture costruite con sistemi industrializzati. 10025/85, Bollettino Ufficiale del CNR, Anno XIX, pt. IV, n. 107, 03/06/85.

V) C.E.B., "Draft guide for the design of precast wall connections", Contribution à la 2<sup>a</sup> Session Plenièrè du CEB, Rotterdam, Bulletin d'information, n. 169, april 1965.

VI) M. KAVYRCHINE, "I collegamenti nelle strutture in cemento armato", Editrice Faenza, Divisione CELI, luglio 1985.

ANALISI DI PANNELLI SANDWICH: PROGRAMMA DI CALCOLO, CONSIDERAZIONI APPLICATIVE

Gianmaria Donida - Roberto Cerioni

Istituto di Scienze, Facoltà di Architettura, Pescara - Università degli Studi "G. D'Annunzio" Chieti.

SOMMARIO

Con riferimento alla formulazione riportata in (I), dove la teoria di Holmberg-Plem (II) viene estesa in forma chiusa al caso di pannelli sandwich costituiti da due strati di differenti caratteristiche elastiche e geometriche, si è elaborato un codice di calcolo in grado di valutare il campo tensionale e deformativo negli strati componenti, nonché negli elementi di cucitura.

SUMMARY

With reference to model introduced in (I), where the Holmberg-Plem method (II) is extended, in exact solution, to the case of sandwich pannels formed by two layers of different elastic and geometric characteristics, a program is maked up, able to value the stress and strain fields in the component layers and in the connection elements.

1. INTRODUZIONE

Il pannello sandwich, come noto, è un elemento strutturale piano, per lo più in conglomerato cementizio normale o leggero; viene realizzato come parete esterna o interna in varie costruzioni. Tale pannello è formato da due strati di conglomerato cementizio più o meno armato di cui uno o entrambi portanti, collegati da armature di cucitura.

L'impiego del pannello sandwich è scaturito dal comportamento instabile che

il pannello monostrato manifesta in relazione alle escursioni termiche.

L'analisi del pannello sandwich viene, in generale, condotta considerando come elemento strutturale un pannello monostrato di spessore equivalente; in tal modo non si riesce a cogliere il reale comportamento della struttura soprattutto in riferimento all'eventuale instabilità dei singoli strati nonché della loro interazione attraverso le armature di cucitura.

In alternativa, il metodo di Holmberg-Plem, pur analizzando il pannello sandwich nel suo insieme, è limitato al caso degli strati componenti di uguale spessore e stesse caratteristiche elastiche.

Nel presente lavoro, sulla base della formulazione riportata in (I), si elabora un codice di calcolo, "SAND", in grado di valutare lo stato tensionale e deformativo nei due strati componenti, di diverso spessore e diverse caratteristiche elastiche, del pannello sandwich, nonché negli elementi di cucitura.

## 2. CONDIZIONI DI BASE DEL PROCEDIMENTO

i) Geometriche - Il pannello sandwich è costituito da due strati rettangolari a facce parallele di diverso spessore e differenti caratteristiche elastiche. Gli strati sono collegati fra di loro da armatura d'acciaio disposta a zig-zag, inclinata di un angolo  $\gamma$  rispetto all'asse degli strati e diffusa lungo le facce degli strati stessi, fig. 1.

ii) Di vincolo - Lo strato esterno, strato 1, è libero alle sue estremità; lo strato interno, 2, è incernierato alla base ed è impedito il solo spostamento lungo  $y$  dell'estremità superiore (<sup>1</sup>), fig. 1.

iii) Di carico - Si sono analizzate le tipologie più usuali delle azioni, fig. 1, più precisamente:

- azioni uniformemente distribuite parallele all'asse dei due strati, che rappresentano i pesi propri;
- azioni uniformemente distribuite normali all'asse dei due strati che rappresentano l'azione del vento o del sisma;
- forze dirette lungo gli assi  $x$  ed  $y$  e coppie, concentrate alle estremità superiori ed inferiori dei due strati;
- variazioni termiche uniformi e/o variabili nello spessore.

## 3. CONSIDERAZIONI SUL MODELLO

Le barre d'acciaio che collegano i due strati, in generale, sono di piccolo diametro e quindi con rigidità flessionale trascurabile; pertanto si ipotizzano incernierate all'asse degli strati stessi, fig. 3.

Gli strati del pannello sandwich sono schematizzati da due travi unite tra di loro da un mezzo elastico continuo (armatura di cucitura). Il mezzo di collegamento ha rigidità  $K_x$  e  $K_y$ , rispettivamente reazioni  $\sigma$ ,  $\tau$  per unità di superficie del mezzo elastico, dovute a spostamenti differenziali unitari  $\eta$ ,  $\delta$  lungo

---

(<sup>1</sup>) Tale condizione di vincolo è usualmente adottata nei sistemi costruttivi, fig. 2.

gli assi x ed y; pertanto:

$$K_x = \frac{\tau}{\eta} = \frac{E \cdot A}{r^2 \cdot b} \cdot \sin^2 \gamma \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

$$K_y = \frac{\sigma}{\delta} = \frac{E \cdot A}{r^2 \cdot b} \cdot \sin^3 \gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma \quad (2)$$

Il sistema di equazioni fondamentali che regolano il modello, nelle incognite  $H(x)$  e  $Q(x)$ , somma delle tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  all'ascissa  $x$  rispettivamente, vale:

$$H^{iv}(x) + \alpha_1 \cdot H(x) + \alpha_2 \cdot Q'(x) = \alpha_3 \cdot x + \alpha_4 \quad (3)$$

$$Q'''(x) + \beta_1 \cdot H(x) + \beta_2 \cdot Q'(x) = \beta_3 \cdot x + \beta_4$$

con:

$$\alpha_1 = b \cdot K_y \cdot \left( \frac{1}{E_1 \cdot J_1} + \frac{1}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{r \cdot b \cdot K_y}{2} \left( \frac{1}{E_1 \cdot J_1} - \frac{1}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\alpha_3 = -b \cdot K_y \cdot \left( \frac{P_1}{E_1 \cdot J_1} - \frac{P_2}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\alpha_4 = -b \cdot K_y \cdot \left( \frac{V_{01}}{E_1 \cdot J_1} - \frac{V_{02}}{E_2 \cdot J_2} + \frac{Y_0}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\beta_1 = -\frac{b \cdot r \cdot K_x}{2} \left( \frac{1}{E_1 \cdot J_1} - \frac{1}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\beta_2 = -b \cdot K_x \cdot \left( \frac{1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{1}{E_2 \cdot A_2} + \frac{r^2}{4 E_1 \cdot J_1} + \frac{r^2}{4 E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\beta_3 = \frac{r \cdot b \cdot K_x}{2} \left( \frac{P_1}{E_1 \cdot J_1} + \frac{P_2}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

$$\beta_4 = \frac{r \cdot b \cdot K_x}{2} \left( \frac{V_{01}}{E_1 \cdot J_1} + \frac{V_{02}}{E_2 \cdot J_2} - \frac{Y_0}{E_2 \cdot J_2} \right)$$

La soluzione in forma chiusa del sistema di equazioni differenziali lineari del sesto ordine (3) è del tipo:

$$Y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot e^{-\lambda x} + C_3 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x + C_5 \cdot e^{-\alpha x} \cos \beta x + \\ + C_6 \cdot e^{-\alpha x} \sin \beta x + p(x)$$

con  $C_i$  coefficiente funzione delle condizioni al contorno,  $p(x)$  polinomio funzione della condizione di carico, il cui grado dipende dalla caratteristica della sollecitazione e dello spostamento, (I).

4. PROGRAMMA DI CALCOLO

Con riferimento alla formulazione presentata si è elaborato un codice di calcolo "SAND" le cui linee principali sono evidenziate nello schema a blocchi di fig. 4 e la lista in appendice.

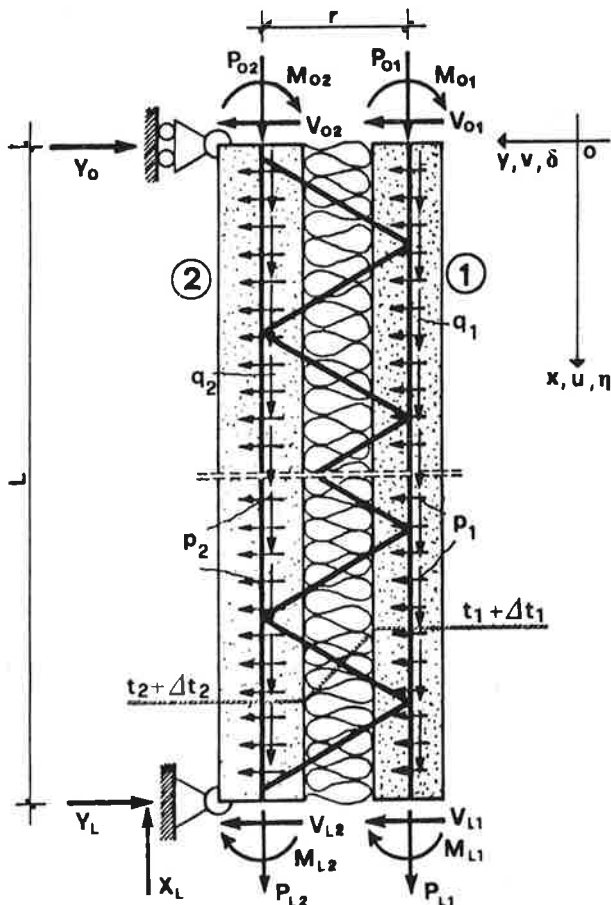


Fig. 1



Fig. 4

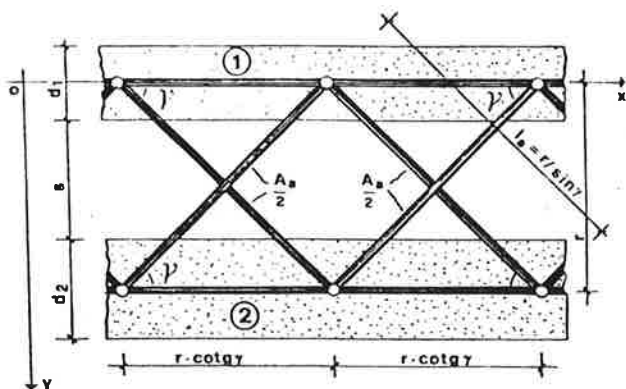


Fig. 3

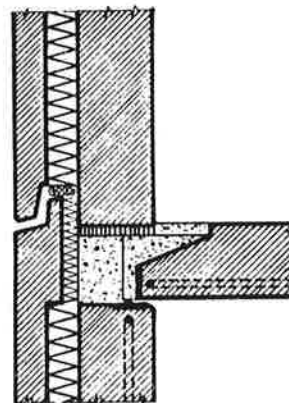


Fig. 2

## 5. APPLICAZIONI NUMERICHE

Allo scopo di valutare l'affidabilità del modello (I), si sono confrontati i risultati ottenuti con il codice SAND con quelli conseguiti per mezzo di una partizione ad E.F. (IV).

Si è preso a base del confronto un pannello sandwich di corrente applicazione, fig. 5, caricato con una variazione termica nei due strati, fig. 6a. In fig. 6b,c,d sono riportati i risultati ottenuti con due metodi di analisi. Più precisamente, in fig. 6b sono consegnati gli spostamenti lungo l'asse y relativamente allo strato 2 (interno), in fig. 6c le tensioni normali, mentre in fig. 6d le tensioni normali negli elementi di ancoraggio.

Il confronto evidenzia un buon accordo con variazioni dell'ordine del 5% per gli spostamenti e di circa 10% per le tensioni normali.

Al fine di evidenziare l'impiego del programma riportato in appendice, viene consegnato in tab. 1 l'input riferito all'elemento strutturale rappresentato in fig. 7.

### INPUT

```
50000 REM DATI
50003 REM Unita' di Misura : FORZE ( N ) ; LUNGHEZZE ( m )
50004 REM
50005 REM D1, D2, S0, L, B0, EP(1), EP(2), AS, ES, GM
50010 DATA .08, 0.12, 0.04, 3, 3.1, 1E10, 2.95E10, 1.7E-4, 2.1E11, 45
50040 REM TA, T1, T2, DT(1), DT(2), P1, P2, Q1, Q2
50045 DATA 0.00001, 0, 0, 0, 0, 2000, 0, 4500, 9300
50060 REM PO(1), PO(2), PL(1), PL(2), VO(1), VO(2), VL(1), VL(2), MO(1), MO(2), ML(1), ML(2)
50065 DATA 0, 500000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -20000, 0, 20000
```

Tabella 1

I risultati più significativi dell'output sono consegnati nelle tabb. 2,3,4.

## 6. CONCLUSIONI

Il modello proposto valuta abbastanza correttamente lo stato tensionale e deformativo nei due strati componenti nonché negli elementi di cucitura, parametri necessari per la progettazione ed utili ai fini dell'interazione tra i due strati componenti.

Il modello fornisce una risposta meno descrittiva rispetto ai metodi di partizione, comunque sufficientemente accurata dal punto di vista delle applicazioni ingegneristiche, senza richiedere la messa di parametri necessari ai metodi di discretizzazione.

Infine, la flessibilità del codice permette un'analisi in tempi brevi anche su mini-computer.

## BIBLIOGRAFIA

(I) CERIONI,R. - DONIDA,G.: "Estensione della teoria di Holmberg-Plem per l'ana-

lisi dei pannelli sandwich. Caso degli strati differenti", Atti del Congresso CTE sulle Tecnologie Industrializzate nelle Costruzioni, Marina di Ravenna, 30-31 ott./1 nov. 1986, pagg. c.115-c.125.

- (II) HOLMBERG - PLEM: "Behaviour of Load-Bearing Sandwich - Type Structures", Ingenjors byroau. Centerlöf & Holmberg AB, Lund.
- (III) DONIDA, G. - MENDITTO, G. - SPADA, A.: "Analisi dei pannelli sandwich ed abachi d'uso", Atti Congresso CTE sulla Industrializzazione Edilizia, Verona, 11-12-13-14 novembre 1982, pagg. c.51-c.79.
- (IV) DONIDA, G.: "Pannelli sandwich: considerazioni sull'influenza delle condizioni al contorno e confronti tra metodi risolutivi", La Prefabbricazione n.3 marzo 1985, pagg. 213-227.

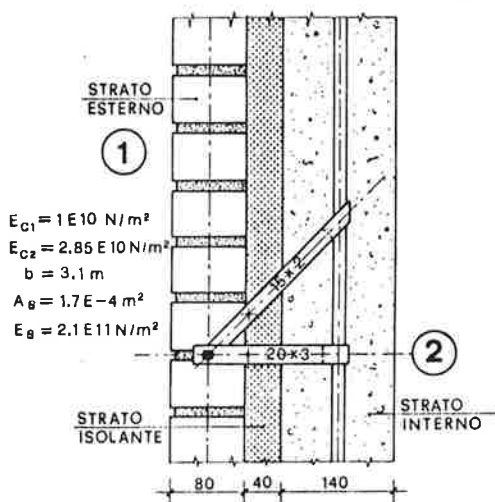


Fig. 5

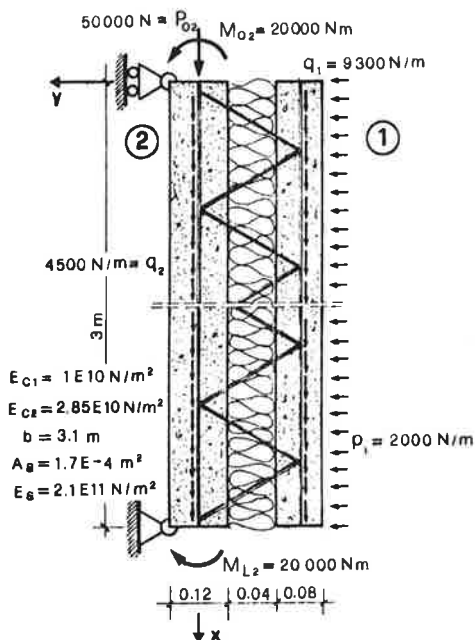


Fig. 7

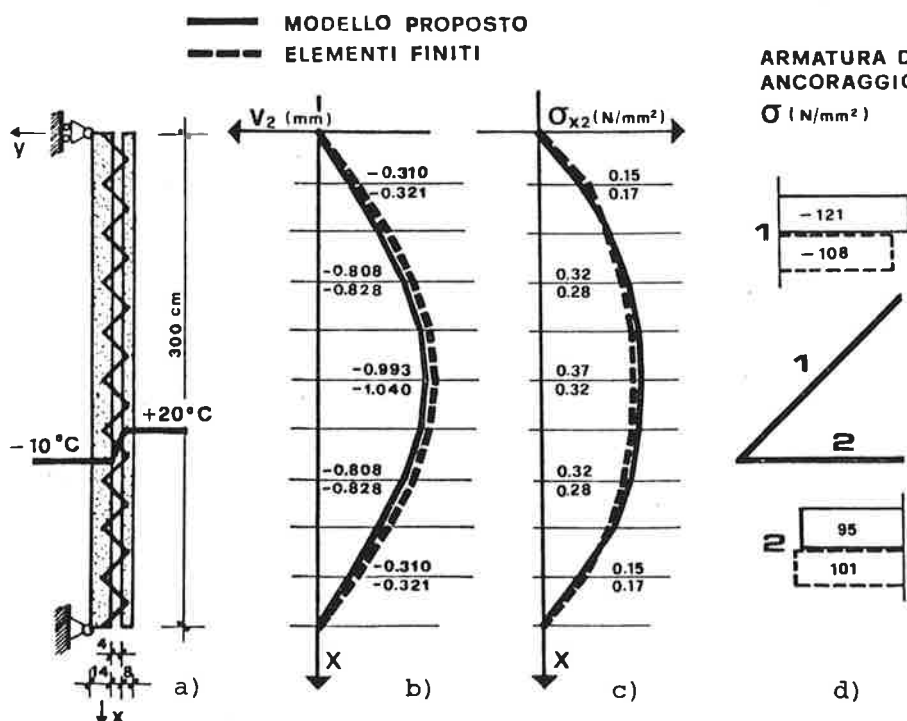


Fig. 6



SPOSTAMENTO LUNGO X, LUNGO Y E ROTAZIONE - STRATO 1

X(m)	SPOST. X (mm)	SPOST. Y (mm)	ROTAZIONE
0	.088	.021	-1.221E-04
.3	.087	-.012	-8.95E-05
.6	.087	-.033	-5.46E-05
.9	.084	-.046	-3.41E-05
1.2	.081	-.054	-1.76E-05
1.5	.08	-.057	-2E-07
1.8	.077	-.054	1.7E-05
2.1	.074	-.046	3.36E-05
2.4	.072	-.033	5.67E-05
2.7	.070	-.01	1.013E-04
3	.07	.028	1.448E-04

Tabella 2

SPOSTAMENTO LUNGO X, LUNGO Y E ROTAZIONE - STRATO 2

X(m)	SPOST. X (mm)	SPOST. Y (mm)	ROTAZIONE
0	.143	0	-5.85E-05
.3	.129	-.018	-5.79E-05
.6	.115	-.034	-5.05E-05
.9	.101	-.047	-3.66E-05
1.2	.087	-.056	-1.91E-05
1.5	.073	-.059	-1E-07
1.8	.059	-.056	1.9E-05
2.1	.044	-.047	3.69E-05
2.4	.03	-.034	5.11E-05
2.7	.015	-.017	5.78E-05
3	0	0	5.75E-05

Tabella 3

CALCOLO DELLE TENSIONI NORMALI (N/MM<sup>2</sup>) NELL'ARMATURA DI COLLEGAMENTO  
E DELLE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI MASSIME NEI DUE STRATI

X(m)	STRATO 1			STRATO 2			ARMATURA COLLEG.	
	SIG.DX	SIG.SIN	TAU	SIG.DX	SIG.SIN	TAU	SIG.1	SIG.2
0	0	0	0	-1.35	-1.34	.01	16	-47
.3	.02	-.09	.01	-1.31	-1.35	0	19	-27
.6	-.02	-.09	.01	-1.26	-1.39	0	15	-16
.9	-.05	-.1	0	-1.23	-1.42	0	8	-9
1.2	-.06	-.11	0	-1.23	-1.44	0	0	-3
1.5	-.07	-.11	0	-1.23	-1.45	0	-6	4
1.8	-.07	-.11	0	-1.25	-1.46	0	-13	10
2.1	-.05	-.1	-.01	-1.28	-1.47	0	-19	18
2.4	-.02	-.1	-.01	-1.33	-1.46	0	-27	26
2.7	.04	-.11	-.01	-1.41	-1.43	0	-39	28
3	0	0	0	-1.46	-1.45	-.01	-63	21

Tabella 4

APPENDICE

LIST

```
410 REM #####
450 REM # #
500 REM # PROGRAMMA SAND #
510 REM # #
550 REM #####
650 REM
950 REM -----
960 REM 1) LETTURA E STAMPA DEI DATI
970 REM -----
980 REM
1110 REM D1,D2 = SPESSORE DELLO STRATO ESTERNO ED INTERNO RISPETTIVAMENTE
1111 REM S0 = DISTANZA TRA LE FACCIE INTERNE DEI DUE STRATI
1112 REM R0 = INTERASSE DEI DUE STRATI
1114 REM B0 = LARGHEZZA DEL PANNELLO
1115 REM L = ALTEZZA DEL PANNELLO
1120 REM EP(1),EP(2) = MODULO DI ELASTICITA' LONGITUDINALE DEI DUE STRATI
1125 REM A1,A2 = AREA DELLA SEZIONE DEI DUE STRATI
1130 REM J1,J2 = MOMENTO D'INERZIA DEI DUE STRATI
1131 REM AS = AREA DEI COLLEGAMENTI D'ACCIAIO DISPOSTI NELLA LARGHEZZA B0
1132 REM ES = MODULO DI ELASTICITA' DELL'ACCIAIO
1133 REM GM = ANGOLAZIONE DELL'ARMATURA DI COLLEGAMENTO
1135 REM KX = RIGIDEZZA LUNGO X DELLE CONNESSIONI ELASTICHE DEI DUE STRATI
1140 REM KY = RIGIDEZZA LUNGO Y DELLE CONNESSIONI ELASTICHE DEI DUE STRATI
1190 REM TA = COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA DEGLI STRATI
1200 REM T1,T2 = SALTO MEDIO DI TEMPERATURA NEI DUE STRATI
1210 REM DT(1),DT(2) = DIFFERENZA DI TEMPERATURA TRA LE DUE FACCIE DI CIASCUN STRATO
1215 REM P1, P2 = INTENSITA' DEL CARICO DISTRIBUITO UNIFORME NORMALE AI DUE STRATI
1218 REM Q1, Q2 = INTENSITA' DEL CARICO DISTRIBUITO UNIFORME PARALLELO AI DUE STRATI
1220 REM P0(1),P0(2),PL(1),PL(2) = FORZE CONCENTRATE DIRETTE LUNGO X
1222 REM APPLICATE ALLE ESTREMITA' DEI DUE STRATI
1230 REM V0(1),V0(2),VL(1),VL(2) = FORZE CONCENTRATE DIRETTE LUNGO Y
1232 REM APPLICATE ALLE ESTREMITA' DEI DUE STRATI
1240 REM M0(1),M0(2),ML(1),ML(2) = COPPIE APPLICATE ALLE ESTREMITA' DEI DUE STRATI
3000 REM
3060 DIM EP(2),P0(2),PL(2),V0(2),VL(2),M0(2),ML(2),DT(2)
3150 READ D1,D2,S0,L,B0,EP(1),EP(2),AS,ES,GM
3155 READ TA,T1,T2,DT(1),DT(2),P1,P2,Q1,Q2
3170 READ P0(1),P0(2),PL(1),PL(2),V0(1),V0(2),VL(1),VL(2),M0(1),M0(2),ML(1),ML(2)
3200 R0 = S0 + D1 / 2 + D2 / 2
3260 A1 = D1 * B0:A2 = D2 * B0:J1 = B0 * D1 ^ 3 / 12:J2 = B0 * D2 ^ 3 / 12
3275 EA(1) = EP(1) * A1:EA(2) = EP(2) * A2:EJ(1) = EP(1) * J1:EJ(2) = EP(2) * J2
3278 PG = ATN(1):G0 = PG / 45 * GM
3290 KX = ES * AS / (R0 ^ 2 * B0) * SIN(G0) ^ 2 * COS(G0):KY = ES * AS / (R0 ^ 2 * B0) * SIN(G0) ^ 3 * TAN
      (G0)
3300 XL = P0(1) + P0(2) + PL(1) + PL(2) + (Q1 + Q2) * L
3305 Y0 = (P1 + P2) * L / 2 + V0(1) + V0(2) - (P0(1) + PL(1)) * R0 / L - (M0(1) + M0(2) + ML(1) + ML(2)) / L -
      Q1 * R0
3310 VL = (P1 + P2) * L / 2 + VL(1) + VL(2) + (P0(1) + PL(1)) * R0 / L + (M0(1) + M0(2) + ML(1) + ML(2)) / L +
      Q1 * R0
4290 REM
4300 PRINT SPC(4)"A) DATI DEL PROBLEMA"
4350 PRINT SPC(8)"====="
```

```

4400 PRINT : PRINT SPC( 4)" 1) CONDIZIONI GEOMETRICHE DEL PANNELLO SANDWICH"
4450 PRINT SPC( 9)"-----"
4500 PRINT : PRINT SPC( 4)" - SPESSORE DELLO STRATO 1 (ESTERNO) : ";D1;" m"
4510 PRINT : PRINT SPC( 4)" - SPESSORE DELLO STRATO 2 (INTERNO) : ";D2;" m"
4600 PRINT : PRINT SPC( 9)"- DISTANZA TRA I DUE STRATI : ";S0;" m"
4610 PRINT : PRINT SPC( 9)"- INTERASSE DEI DUE STRATI : ";R0;" m"
5000 PRINT : PRINT SPC( 9)"- ALTEZZA DEL PANNELLO : ";L;" m"
5010 PRINT : PRINT SPC( 9)"- LARGHEZZA DEL PANNELLO : ";B0;" m"
5150 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 4)" 2) CONDIZIONI ELASTO-MECCANICHE DELLA PARETE"
5200 PRINT SPC( 4)"-----"
5250 PRINT : PRINT SPC( 9)"- MODULO DI ELASTICITA' LONGITUDINALE DEGLI STRATI : "
5255 PRINT SPC( 12)"EP(1) = ";EP(1);" N/m^2"; PRINT SPC( 12)"EP(2) = ";EP(2);" N/m^2"
5300 PRINT : PRINT SPC( 9)"- AREA SEZIONE STRATI : "
5350 PRINT SPC( 12)"A1 = ";A1;" m^2"; PRINT SPC( 12)"A2 = ";A2;" m^2"
5400 PRINT : PRINT SPC( 9)"- MOMENTO D'INERZIA STRATI : "
5450 PRINT SPC( 12)"J1 = ";J1;" m^4"; PRINT SPC( 12)"J2 = ";J2;" m^4"
5470 PRINT : PRINT SPC( 9)"- AREA SEZIONE ARMATURA : ";AS;" m^2"
5480 PRINT : PRINT SPC( 9)"- MODULO DI ELASTICITA' DELL'ACCIAIO : ";ES;" N/m^2"
5490 PRINT : PRINT SPC( 9)"- INCLINAZIONE DELL'ARMATURA : ";GM;" gradi"
5500 PRINT : PRINT SPC( 9)"- MODULI DI ELASTICITA' DELLA CONNESSIONE ELASTICA DEI DUE STRATI : "
5550 PRINT SPC( 12)"KX = ";KX;" N/m^3"; PRINT SPC( 12)"KY = ";KY;" N/m^3"
5600 PRINT : PRINT SPC( 9)"- COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA DELLA PARETE : ";TA;" gC^-1"
5640 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 4)" 3) CONDIZIONI DI VINCOLO"
5650 PRINT SPC( 4)"-----"
5700 PRINT : PRINT SPC( 9)"- ESTREMITA' SUPERIORE DEL PANNELLO : "
5710 PRINT SPC( 12)"- STRATO 1 : LIBERO"; PRINT SPC( 12)"- STRATO 2 : CARRELLO LUNGO Y"
5750 PRINT : PRINT SPC( 9)"- ESTREMITA' INFERIORE DEL PANNELLO : "
5760 PRINT SPC( 12)"- STRATO 1 : LIBERO"; PRINT SPC( 12)"- STRATO 2 : CERNIERA"
5950 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 4)" 4) CONDIZIONI DI CARICO E DI DISTORSIONE"
6000 PRINT SPC( 10)"-----"
6050 PRINT : PRINT SPC( 9)"- VARIAZIONE DI TEMPERATURA NEI DUE STRATI : "
6060 PRINT SPC( 12)"T1 = ";T1;" gC"; SPC( 5)"DT(1) = ";DT(1);" gC"
6070 PRINT SPC( 12)"T2 = ";T2;" gC"; SPC( 5)"DT(2) = ";DT(2);" gC"
6100 PRINT : PRINT SPC( 9)"- INTENSITA' CARICO DISTRIBUITO UNIFORME NORMALE AGLI STRATI : "
6150 PRINT SPC( 12)"P1 = ";P1;" N/m"; PRINT SPC( 12)"P2 = ";P2;" N/m"
6160 PRINT : PRINT SPC( 9)"- INTENSITA' CARICO DISTRIBUITO UNIFORME PARALLELO AGLI STRATI : "
6170 PRINT SPC( 12)"Q1 = ";Q1;" N/m"; PRINT SPC( 12)"Q2 = ";Q2;" N/m"
6200 PRINT : PRINT SPC( 9)"- CARICO LUNGO X CONCENTRATO ALLE ESTREMITA' DEGLI STRATI : "
6250 PRINT SPC( 12)"PO(1) = ";PO(1);" N"; SPC( 4)"PO(2) = ";PO(2);" N"; SPC( 5)"PL(1) = ";PL(1);" N"; SPC( 4)
"PL(2) = ";PL(2);" N"
6300 PRINT : PRINT SPC( 9)"- CARICO LUNGO Y CONCENTRATO ALLE ESTREMITA' DEGLI STRATI : "
6350 PRINT SPC( 12)"VO(1) = ";VO(1);" N"; SPC( 4)"VO(2) = ";VO(2);" N"; SPC( 5)"VL(1) = ";VL(1);" N"; SPC( 4)
"VL(2) = ";VL(2);" N"
6400 PRINT : PRINT SPC( 9)"- COPPIA APPLICATA ALLE ESTREMITA' DEGLI STRATI : "
6450 PRINT SPC( 12)"MO(1) = ";MO(1);" Nm"; SPC( 4)"MO(2) = ";MO(2);" Nm"; SPC( 4)"ML(1) = ";ML(1);" Nm"; SPC(
4)"ML(2) = ";ML(2);" Nm"
8188 REM
8190 REM -----
8200 REM 2) RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI FONDAMENTALI
8210 REM -----
8212 REM
8220 REM AL(I),BE(I) = COEFFICIENTI DEL SISTEMA DI EQUAZIONI FONDAMENTALI
8225 REM H(I,J) = MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI
8230 REM TO(I) = VETTORE DEI TERMINI NOTI DEL SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI
8240 REM C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8 = COEFFICIENTI FORZA TANGENZIALE DI INTERAZIONE
8245 REM S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7 = COEFFICIENTI FORZA NORMALE DI INTERAZIONE
8250 REM
8290 DIM AL(4),BE(4),H(6,6),TO(6),IA(6),IO(6)
8300 IF D1 = D2 AND EP(1) = EP(2) THEN 19000

```

```

8500 AL(1) = KY * B0 * (1 / EJ(1) + 1 / EJ(2))
8505 AL(2) = R0 * B0 * KY / 2 * (1 / EJ(1) - 1 / EJ(2))
8510 AL(3) = - B0 * KY * (P1 / EJ(1) - P2 / EJ(2));AL(4) = - B0 * KY * (V0(1) / EJ(1) - V0(2) / EJ(2) + Y0 /
      EJ(2))
8520 BE(1) = - B0 * R0 * KX / 2 * (1 / EJ(1) - 1 / EJ(2))
8525 BE(2) = - B0 * KX * (1 / EA(1) + 1 / EA(2) + R0 ^ 2 / (4 * EJ(1)) + R0 ^ 2 / (4 * EJ(2)))
8530 BE(3) = R0 * R0 * KX / 2 * (P1 / EJ(1) + P2 / EJ(2));BE(4) = R0 * B0 * KX / 2 * (V0(1) / EJ(1) + V0(2) / E
      J(2) - Y0 / EJ(2)) + B0 * KX * (Q1 / EA(1) - Q2 / EA(2))
9000 REM
9005 REM RADICI EQUAZIONE CARATTERISTICA
9010 REM
9650 Z1 = BE(2);Z2 = AL(1);Z3 = AL(1) * BE(2) - BE(1) * AL(2)
9800 QA = (3 * Z2 - Z1 ^ 2) / 9;RA = (9 * Z1 * Z2 - 27 * Z3 - 2 * Z1 ^ 3) / 54
9900 DS = QA ^ 3 + RA ^ 2;SA = (RA + SQR(DS)) ^ (1 / 3)
10000 TI = RA - SQR(DS); IF TI < 0 THEN TI = - ((- TI) ^ (1 / 3)); GOTO 10050
10020 TI = TI ^ (1 / 3)
10050 V = (SA + TI - Z1 / 3) ^ (1 / 2)
10150 PI = - (SA + TI) / 2 - Z1 / 3;QU = (SA - TI) / 2 * SQR(3);FI = ATN(QU / PI)
10300 A = (PI ^ 2 + QU ^ 2) ^ (1 / 4) * COS(FI / 2);B = (PI ^ 2 + QU ^ 2) ^ (1 / 4) * SIN(FI / 2)
10400 Z4 = AL(1) * BE(3) - AL(3) * BE(1);Z5 = AL(1) * BE(4) - AL(4) * BE(1)
10980 REM
10990 REM CONDIZIONI AL CONTORNO
10998 REM
11000 REM 1a CONDIZIONE
11005 LB = V ^ 2 + BE(2);AB = A ^ 2 + B ^ 2;BA = A ^ 2 - B ^ 2
11010 H(1,1) = LB;H(1,2) = LB;H(1,3) = BA + BE(2);H(1,4) = 2 * A * B
11015 H(1,5) = BA + BE(2);H(1,6) = - 2 * A * B
11050 T0(1) = BE(4) - BE(2) * Z5 / Z3
11099 REM
11100 REM 2a CONDIZIONE
11105 E1 = EXP(V * L);E2 = EXP(- V * L);EA = EXP(A * L) * COS(B * L);EB = EXP(A * L) * SIN(B * L);
      EC = EXP(- A * L) * COS(B * L);ED = EXP(- A * L) * SIN(B * L)
11120 H(2,1) = LB * E1;H(2,2) = LB * E2
11140 H(2,3) = (BA + BE(2)) * EA - 2 * A * B * EB;H(2,4) = 2 * A * B * EA + (BA + BE(2)) * EB
11160 H(2,5) = (BA + BE(2)) * EC + 2 * A * B * ED;H(2,6) = - 2 * A * B * EC + (BA + BE(2)) * ED
11190 T0(2) = BE(1) * (P1 * L + V0(1) + VL(1)) + BE(3) * L - BE(2) * Z4 + L / Z3 + BE(4) - BE(2) * Z5 / Z3
11199 REM
11200 REM 3a CONDIZIONE
11204 A5 = A ^ 5 - 10 * A ^ 3 * B ^ 2 + 5 * A * B ^ 4;B5 = 5 * A ^ 4 * B - 10 * A ^ 2 * B ^ 3 + B ^ 5;A3 = A ^
      3 - 3 * A * B ^ 2;B3 = 3 * A ^ 2 * B - B ^ 3
11210 H(3,1) = V ^ 3 * LB;H(3,2) = - V ^ 3 * LB
11230 H(3,3) = A5 + A3 * BE(2);H(3,4) = B5 + B3 * BE(2)
11250 H(3,5) = - A5 - A3 * BE(2);H(3,6) = B5 + B3 * BE(2)
11280 T0(3) = - BE(1) * KY * B0 * TA * (DT(2) / D2 - DT(1) / D1)
11299 REM
11300 REM 4a CONDIZIONE
11310 H(4,1) = V ^ 3 * LB * E1;H(4,2) = - V ^ 3 * LB * E2
11330 H(4,3) = (A5 + A3 * BE(2)) * EA + (- B5 - B3 * BE(2)) * EB
11340 H(4,4) = (B5 + B3 * BE(2)) * EA + (A5 + A3 * BE(2)) * EB
11350 H(4,5) = (- A5 - A3 * BE(2)) * EC + (- B5 - B3 * BE(2)) * ED
11360 H(4,6) = (B5 + B3 * BE(2)) * EC + (- A5 - A3 * BE(2)) * ED
11380 T0(4) = - BE(1) * KY * B0 * TA * (DT(2) / D2 - DT(1) / D1)
11399 REM
11400 REM 5a CONDIZIONE
11410 H(5,1) = V;H(5,2) = - V;H(5,3) = A;H(5,4) = B;H(5,5) = - A;H(5,6) = B
11480 T0(5) = B0 * KX * (P0(1) / EA(1) - P0(2) / EA(2)) - Z4 / Z3 + KX * B0 * TA * (R0 / 2 * (DT(1) / D1 + DT(2)
      ) / D2) - T1 + T2)
11499 REM
11500 REM 6a CONDIZIONE

```

```
11505 KA = B0 * KX * (1 / EA(1) + 1 / EA(2))
11510 H(6,1) = V * E1 - KA * (E1 - 1) / V:H(6,2) = - V * E2 + KA * (E2 - 1) / V
11530 H(6,3) = A * EA - B * EB - KA / AB * (A * (EA - 1) + B * EB)
11540 H(6,4) = B * EA + A * EB - KA / AB * (- B * (EA - 1) + A * EB)
11550 H(6,5) = - A * EC - B * ED - KA / AB * (- A * (EC - 1) + B * ED)
11560 H(6,6) = B * EC - A * ED - KA / AB * (- B * (EC - 1) - A * ED)
11580 T0(6) = - Z4 / Z3 + KA * (Z4 * L ^ 2 / (2 * Z3) + Z5 * L / Z3) + B0 * KX * ((P0(1) + Q1 * L) / EA(1) - (
P0(2) + Q2 * L) / EA(2)) + KX * B0 * TA * (R0 / 2 * (DT(1) / D1 + DT(2) / D2) - T1 + T2)
16699 REM
16700 REM RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI
16750 REM
16800 N2 = 6: FOR I = 1 TO N2:I4(I) = 0: NEXT I:D = 1
16950 FOR Q = 1 TO N2:T = 0: FOR I = 1 TO N2: IF I4(I) < > 0 THEN 17350
17150 FOR J = 1 TO N2: IF I4(J) < > 0 THEN 17300
17250 IF T < ABS (H(I,J)) THEN T = ABS (H(I,J)):IR = I:IC = J
17300 NEXT J
17350 NEXT I
17400 D = D * H(IR,IC): IF D = 0 THEN STOP
17450 IF IR = IC THEN 17800
17500 D = - D: FOR J = 1 TO N2: IF I4(J) < > 0 THEN 17700
17650 T = H(IR,J):H(IR,J) = H(IC,J):H(IC,J) = T
17700 NEXT J:T = T0(IR):T0(IR) = T0(IC):T0(IC) = T
17800 I0(0) = IC: FOR I = 1 TO N2: IF I4(I) < > 0 THEN 18300
17950 IF I = IC THEN 18300
18000 T = H(I,IC): FOR J = 1 TO N2: IF I4(J) < > 0 THEN 18200
18150 H(I,J) = H(I,J) - H(IC,J) / H(IC,IC) * T
18200 NEXT J:T0(I) = T0(I) - T0(IC) / H(IC,IC) * T
18300 NEXT I:I4(IC) = 1: NEXT Q
18450 FOR I = N2 TO 1 STEP - 1:IR = I0(I): IF I = N2 THEN 18800
18600 FOR J = N2 TO I + 1 STEP - 1:IC = I0(J):T0(IR) = T0(IR) - H(IR,IC) * T0(IC): NEXT J
18800 T0(IR) = T0(IR) / H(IR,IR): NEXT I
18910 C1 = T0(1):C2 = T0(2):C3 = T0(3):C4 = T0(4):C5 = T0(5):C6 = T0(6)
18920 C7 = Z4 / Z3:C8 = Z5 / Z3
18948 REM
18950 REM COEFFICIENTI FORZA NORMALE DI INTERAZIONE DEGLI STRATI
18952 REM
18960 S1 = - V * LB / BE(1):S2 = V * LB / BE(1)
18965 S3 = - ((A3 + A * BE(2)) * C3 + (B3 + B * BE(2)) * C4) / BE(1)
18966 S4 = - ((- B3 - B * BE(2)) * C3 + (A3 + A * BE(2)) * C4) / BE(1)
18967 S5 = - ((- A3 - A * BE(2)) * C5 + (B3 + B * BE(2)) * C6) / BE(1)
18968 S6 = - ((- B3 - B * BE(2)) * C5 + (- A3 - A * BE(2)) * C6) / BE(1)
18970 S7 = - (BE(2) * Z4 / Z3 - BE(3)) / BE(1)
18980 GOTO 19500
19000 REM
19005 REM RISOLUZIONE DEL SISTEMA NEL CASO DI STRATI DI EGUALI CARATTERISTICHE ELASTO-GEOMETRICHE
19010 REM
19040 EP = EP(1)
19050 AL(1) = 2 * B0 * KY / (EP * J1):AL(2) = - B0 * KY / (EP * J1) * (P1 - P2):AL(3) = - B0 * KY / (EP * J1)
* (V0(1) - V0(2) + Y0)
19062 BE(1) = - 2 * B0 * KX * (J1 + R0 ^ 2 * A1 / 4) / (EP * A1 * J1)
19065 BE(2) = R0 * B0 * KX * (P1 + P2) / (EP * J1 * 2):BE(3) = R0 * B0 * KX * (V0(1) + V0(2) - Y0) / (EP * J1 *
2) + KX * B0 * (Q1 - Q2) / (EP * A1)
19070 V = SQR (- BE(1)):A = (AL(1) / 4) ^ (1 / 4):B = A:AB = 2 * A ^ 2:BA = 0
19100 BK = B0 * KX / EP:E1 = EXP (V * L):E2 = EXP (- V * L):KT = KX * B0 * TA * (R0 / (2 * D1) * (DT(1) + DT
(2)) - T1 + T2)
19110 C1 = (V * E2 + 2 * BK / (V * A1) * (1 - E2)) * (BE(2) / (V * BE(1)) - BK / (V * A1) * (P0(1) - P0(2)) - K
T / V) + BK / A1 * (2 * L / BE(1) * (BE(2) * L / 2 + BE(3)) + P0(1) + Q1 * L - P0(2) - Q2 * L) - BE(2) / B
E(1) + KT
```

```

19112 C1 = C1 / ((E1 - E2) * (V - 2 * BK / (A1 * V)))
19120 C2 = C1 + BE(2) / (V * BE(1)) - BK / (A1 * V) * (P0(1) - P0(2)) - KT / V
19130 C3 = 0:C4 = 0:C5 = 0:C6 = 0:C7 = BE(2) / BE(1):C8 = BE(3) / BE(1)
19150 S1 = 0:S2 = 0
19160 EA = EXP (A * L) * COS (A * L):EB = EXP (A * L) * SIN (A * L):EC = EXP (- A * L) * COS (A * L):ED =
    EXP (- A * L) * SIN (A * L)
19170 H1 = - AL(3) / AL(1):H2 = - AL(2) / AL(1) * L - AL(3) / AL(1) - P1 * L - V0(1) - V0(2):H3 = KY * B0 * T
    A * (DT(2) / D2 - DT(1) / D1) / (2 * A ^ 3)
19180 K3 = ((EA ^ 2 + EB ^ 2 - EA * EC - EA * ED - EB * EC - 3 * EB * ED) * H1 + (- EA + EB + EC + ED) * H2 +
    (EA * ED - 2 * EB * ED - EC * ED + EB * ED) * H3) / (EA ^ 2 + EB ^ 2 + EC ^ 2 + ED ^ 2 - 2 * EA * EC - 6 *
    EB * ED)
19190 K1 = H1 - K3
19200 K2 = ((EA + ED) * H1 - H2 + ED * H3 - (EA - EC + 2 * ED) * K3) / (ED - EB)
19210 K4 = (H2 - (EA + EB) * H1 - EB * H3 + (EA + 2 * EB - EC) * K3) / (ED - EB)
19250 S3 = (K1 + K2) * A:S4 = (- K1 + K2) * A:S5 = (- K3 + K4) * A:S6 = (- K3 - K4) * A:S7 = AL(2) / AL(1)
19500 REM
19502 REM -----
19504 REM 3) VALUTAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI E DELLE
19506 REM CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE
19508 REM -----
19510 REM N(I,J) = COEFFICIENTI FORZA NORMALE
19512 REM M(I,J) = COEFFICIENTI MOMENTO FLETTENTE
19514 REM T(I,J) = COEFFICIENTI FORZA DI TAGLIO
19516 REM V(I,J) = COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO Y
19518 REM U(I,J) = COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO X
19520 REM R(I,J) = COEFFICIENTI ROTAZIONE
19522 REM
19525 DIM N(2,9),M(2,9),T(2,8),R(2,10),V(2,11),U(2,10),X(11)
19526 REM
19527 REM COEFFICIENTI FORZA NORMALE STRATO ESTERNO
19528 REM
19530 N(1,1) = - C1 / V:N(1,2) = C2 / V
19540 N(1,3) = - (A * C3 - B * C4) / AB:N(1,4) = - (B * C3 + A * C4) / AB
19560 N(1,5) = - (- A * C5 - B * C6) / AB:N(1,6) = - (B * C5 - A * C6) / AB
19580 N(1,7) = - C7 / 2:N(1,8) = - C8 - Q1
19590 N(1,9) = - P0(1) + (C1 - C2) / V + (A * C3 - B * C4 - A * C5 - B * C6) / AB
19700 REM
19705 REM COEFFICIENTI FORZA NORMALE STRATO INTERNO
19710 REM
19720 N(2,1) = - N(1,1):N(2,2) = - N(1,2)
19740 N(2,3) = - N(1,3):N(2,4) = - N(1,4):N(2,5) = - N(1,5):N(2,6) = - N(1,6)
19750 N(2,7) = - N(1,7):N(2,8) = - N(1,8) - Q1 - Q2:N(2,9) = - N(1,9) - P0(1) - P0(2)
19800 REM
19805 REM COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO X STRATO INTERNO
19810 REM
19820 U(2,1) = N(2,1) / (V * EA(2)):U(2,2) = - N(2,2) / (V * EA(2))
19830 U(2,3) = (A * N(2,3) - B * N(2,4)) / (AB * EA(2))
19840 U(2,4) = (B * N(2,3) + A * N(2,4)) / (AB * EA(2))
19850 U(2,5) = (- A * N(2,5) - B * N(2,6)) / (AB * EA(2))
19860 U(2,6) = (B * N(2,5) - A * N(2,6)) / (AB * EA(2))
19870 U(2,7) = N(2,7) / (3 * EA(2)):U(2,8) = N(2,8) / (2 * EA(2)):U(2,9) = N(2,9) / EA(2) + TA * T2
19880 U(2,10) = - U(2,1) * E1 - U(2,2) * E2 - U(2,3) * EA - U(2,4) * EB - U(2,5) * EC - U(2,6) * ED - U(2,7) *
    L ^ 3 - U(2,8) * L ^ 2 - U(2,9) * L
19900 REM
19905 REM COEFFICIENTI MOMENTO FLETTENTE STRATO INTERNO
19910 REM
19915 DA = 1 / (B0 * KX * R0):DB = 1 / (2 * KY * B0):DC = 1 / (R0 * EA(1)):DE = - 1 / (R0 * EA(2))
19920 M(2,1) = - (DA * V * C1 + DB * S1 * V ^ 2 + DC * N(1,1) + DE * N(2,1)) * EJ(2)

```

19930 M(2,2) = - ( - DA \* V \* C2 + DB \* V ^ 2 \* S2 + DC \* N(1,2) + DE \* N(2,2) ) \* EJ(2)  
19940 M(2,3) = - EJ(2) \* (DA \* (A \* C3 + B \* C4) + DB \* (BA \* S3 + 2 \* A \* B \* S4) + DC \* N(1,3) + DE \* N(2,3)  
)  
19950 M(2,4) = - EJ(2) \* (DA \* ( - B \* C3 + A \* C4) + DB \* ( - 2 \* A \* B \* S3 + BA \* S4) + DC \* N(1,4) + DE \*  
N(2,4))  
19960 M(2,5) = - (DA \* ( - A \* C5 + B \* C6) + DB \* (BA \* S5 - 2 \* A \* B \* S6) + DC \* N(1,5) + DE \* N(2,5)) \* E  
J(2)  
19970 M(2,6) = - EJ(2) \* (DA \* ( - B \* C5 - A \* C6) + DB \* (2 \* A \* B \* S5 + BA \* S6) + DC \* N(1,6) + DE \* N(2  
,6))  
19980 M(2,7) = - (DC \* N(1,7) + DE \* N(2,7)) \* EJ(2); M(2,8) = - (DC \* N(1,8) + DE \* N(2,8)) \* EJ(2)  
19990 M(2,9) = - (DA \* C7 + DC \* N(1,9) + DE \* N(2,9) + TA / R0 \* (T1 - T2) - TA \* DT(2) / D2) \* EJ(2)  
20000 REM  
20005 REM COEFFICIENTI ROTAZIONE STRATO INTERNO  
20010 REM  
20020 R(2,1) = - M(2,1) / (EJ(2) \* V); R(2,2) = M(2,2) / (EJ(2) \* V)  
20030 R(2,3) = - (A \* M(2,3) - B \* M(2,4)) / (EJ(2) \* AB); R(2,4) = - (B \* M(2,3) + A \* M(2,4)) / (EJ(2) \* AB)  
  
20040 R(2,5) = - ( - A \* M(2,5) - B \* M(2,6)) / (EJ(2) \* AB); R(2,6) = - (B \* M(2,5) - A \* M(2,6)) / (EJ(2) \*  
AB)  
20050 R(2,7) = - M(2,7) / (3 \* EJ(2)); R(2,8) = - M(2,8) / (2 \* EJ(2)); R(2,9) = - M(2,9) / EJ(2) + TA \* DT(2)  
/ D2  
20100 REM  
20105 REM COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO Y STRATO INTERNO  
20110 REM  
20120 V(2,1) = R(2,1) / V; V(2,2) = - R(2,2) / V  
20130 V(2,3) = (A \* R(2,3) - B \* R(2,4)) / AB; V(2,4) = (B \* R(2,3) + A \* R(2,4)) / AB  
20140 V(2,5) = ( - A \* R(2,5) - B \* R(2,6)) / AB; V(2,6) = (B \* R(2,5) - A \* R(2,6)) / AB  
20150 V(2,7) = R(2,7) / 4; V(2,8) = R(2,8) / 3; V(2,9) = R(2,9) / 2  
20160 V(2,11) = - V(2,1) - V(2,2) - V(2,3) - V(2,5)  
20170 R(2,10) = - (V(2,1) \* E1 + V(2,2) \* E2 + V(2,3) \* EA + V(2,4) \* EB + V(2,5) \* EC + V(2,6) \* ED + V(2,7) \*  
L ^ 4 + V(2,8) \* L ^ 3 + V(2,9) \* L ^ 2 + V(2,11)) / L  
20180 V(2,10) = R(2,10)  
20200 REM  
20205 REM COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO Y STRATO ESTERNO  
20210 REM  
20215 DF = B0 \* KY  
20220 V(1,1) = V(2,1) - S1 / DF; V(1,2) = V(2,2) - S2 / DF  
20230 V(1,3) = V(2,3) - S3 / DF; V(1,4) = V(2,4) - S4 / DF  
20240 V(1,5) = V(2,5) - S5 / DF; V(1,6) = V(2,6) - S6 / DF  
20250 V(1,7) = V(2,7); V(1,8) = V(2,8); V(1,9) = V(2,9)  
20260 V(1,10) = V(2,10); V(1,11) = V(2,11) - S7 / DF  
20300 REM  
20305 REM COEFFICIENTI ROTAZIONE STRATO ESTERNO  
20310 REM  
20320 R(1,1) = V \* V(1,1); R(1,2) = - V \* V(1,2)  
20330 R(1,3) = A \* V(1,3) + B \* V(1,4); R(1,4) = - B \* V(1,3) + A \* V(1,4)  
20340 R(1,5) = - A \* V(1,5) + B \* V(1,6); R(1,6) = - B \* V(1,5) - A \* V(1,6)  
20350 R(1,7) = 4 \* V(1,7); R(1,8) = 3 \* V(1,8); R(1,9) = 2 \* V(1,9); R(1,10) = V(1,10)  
20400 REM  
20405 REM COEFFICIENTI MOMENTO FLETTENTE STRATO ESTERNO  
20410 REM  
20420 M(1,1) = - EJ(1) \* V \* R(1,1); M(1,2) = EJ(1) \* V \* R(1,2)  
20430 M(1,3) = - EJ(1) \* (A \* R(1,3) + B \* R(1,4)); M(1,4) = - EJ(1) \* ( - B \* R(1,3) + A \* R(1,4))  
20440 M(1,5) = - EJ(1) \* ( - A \* R(1,5) + B \* R(1,6)); M(1,6) = - EJ(1) \* ( - B \* R(1,5) - A \* R(1,6))  
20450 M(1,7) = - 3 \* EJ(1) \* R(1,7); M(1,8) = - 2 \* EJ(1) \* R(1,8); M(1,9) = - EJ(1) \* (R(1,9) - TA \* DT(1) /  
D1)  
20500 REM  
20505 REM COEFFICIENTI TAGLIO STRATO ESTERNO  
20510 REM

```
20520 T(1,1) = V * M(1,1) + R0 * C1 / 2; T(1,2) = - V * M(1,2) + R0 * C2 / 2
20530 T(1,3) = A * M(1,3) + B * M(1,4) + R0 * C3 / 2
20535 T(1,4) = - B * M(1,3) + A * M(1,4) + R0 * C4 / 2
20540 T(1,5) = - A * M(1,5) + B * M(1,6) + R0 * C5 / 2
20545 T(1,6) = - B * M(1,5) - A * M(1,6) + R0 * C6 / 2
20550 T(1,7) = 2 * M(1,7) + R0 * C7 / 2; T(1,8) = M(1,8) + R0 * C8 / 2
20600 REM
20605 REM          COEFFICIENTI TAGLIO STRATO INTERNO
20610 REM
20620 T(2,1) = V * M(2,1) + R0 * C1 / 2; T(2,2) = - V * M(2,2) + R0 * C2 / 2
20630 T(2,3) = A * M(2,3) + B * M(2,4) + R0 * C3 / 2
20635 T(2,4) = - B * M(2,3) + A * M(2,4) + R0 * C4 / 2
20640 T(2,5) = - A * M(2,5) + B * M(2,6) + R0 * C5 / 2
20645 T(2,6) = - B * M(2,5) - A * M(2,6) + R0 * C6 / 2
20650 T(2,7) = 2 * M(2,7) + R0 * C7 / 2; T(2,8) = M(2,8) + R0 * C8 / 2
20700 REM
20705 REM          COEFFICIENTI SPOSTAMENTO LUNGO X STRATO ESTERNO
20710 REM
20715 DK = KX * B0
20720 U(1,1) = U(2,1) - C1 / DK + R0 * (R(1,1) + R(2,1)) / 2
20725 U(1,2) = U(2,2) - C2 / DK + R0 * (R(1,2) + R(2,2)) / 2
20730 U(1,3) = U(2,3) - C3 / DK + R0 * (R(1,3) + R(2,3)) / 2
20740 U(1,4) = U(2,4) - C4 / DK + R0 * (R(1,4) + R(2,4)) / 2
20750 U(1,5) = U(2,5) - C5 / DK + R0 * (R(1,5) + R(2,5)) / 2
20760 U(1,6) = U(2,6) - C6 / DK + R0 * (R(1,6) + R(2,6)) / 2
20770 U(1,7) = U(2,7) + R0 * (R(1,7) + R(2,7)) / 2
20775 U(1,8) = U(2,8) + R0 * (R(1,8) + R(2,8)) / 2
20780 U(1,9) = U(2,9) - C7 / DK + R0 * (R(1,9) + R(2,9)) / 2 + R0 / 2 * TA * (DT(1) / D1 + DT(2) / D2)
20785 U(1,10) = U(2,10) - C8 / DK + R0 * (R(1,10) + R(2,10)) / 2
28500 REM
28550 REM          -----
28600 REM          6) STAMPA DEI RISULTATI
28650 REM          -----
28700 REM
28750 REM          STAMPA DEI VALORI DELLO SPOSTAMENTO LUNGO X
28800 REM          DELLO SPOSTAMENTO LUNGO Y E DELLA ROTAZIONE
28850 REM
28860 NP = 10; DX = L / NP
28950 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT : PRINT SPC( 4)"B)  RISULTATI NUMERICI"
29000 PRINT SPC( 4)"  ====="
29050 FOR I = 1 TO 2
29100 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 8)" SPOSTAMENTO LUNGO X, LUNGO Y E ROTAZIONE - STRATO ";I
29150 PRINT SPC( 8)"=====
29200 PRINT SPC( 10)"X(mm)" SPC( 4)"SPOST. X (mm)"; SPC( 3)"SPOST. Y (mm)"; SPC( 3)"ROTAZIONE"
29250 PRINT SPC( 8)"=====
29300 FOR J = 0 TO NP
29350 X(J) = J * DX; X = X(J)
29750 UU = U(I,1) * EXP (V * X) + U(I,2) * EXP ( - V * X) + U(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + U(I,4) * EXP
      (A * X) * SIN (B * X) + U(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + U(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)
29752 UU = UU + U(I,7) * X ^ 3 + U(I,8) * X ^ 2 + U(I,9) * X + U(I,10)
29760 VV = V(I,1) * EXP (V * X) + V(I,2) * EXP ( - V * X) + V(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + V(I,4) * EXP
      (A * X) * SIN (B * X) + V(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + V(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)
29762 VV = VV + V(I,7) * X ^ 4 + V(I,8) * X ^ 3 + V(I,9) * X ^ 2 + V(I,10) * X + V(I,11)
29770 RO = R(I,1) * EXP (V * X) + R(I,2) * EXP ( - V * X) + R(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + R(I,4) * EXP
      (A * X) * SIN (B * X) + R(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + R(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)
29772 RO = RO + R(I,7) * X ^ 3 + R(I,8) * X ^ 2 + R(I,9) * X + R(I,10)
```



```
30000 ND = 2:HO = X: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
30100 ND = 3:HO = 1000 * UU: GOSUB 35150: PRINT SPC( 13 - NO)A$;
30160 ND = 3:HO = 1000 * VV: GOSUB 35150: PRINT SPC( 15 - NO)A$;
30200 ND = 7:HO = RO: GOSUB 35150: PRINT SPC( 17 - NO)A$
30300 PRINT SPC( 8)"-----"
30350 NEXT J: NEXT I
30400 REM
30450 REM STAMPA DELLA FORZA ASSIALE, TAGLIO E
30500 REM MOMENTO FLETTENTE DI CIASCUNO STRATO
30550 REM
31600 FOR I = 1 TO 2
31620 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 8)" FORZA NORMALE, TAGLIO E MOMENTO FLETTENTE - STRATO ";I
31630 PRINT SPC( 8)"-----"
31640 PRINT SPC( 9)"X(m)" SPC( 4)"FORZA NORMALE"; SPC( 4);"TAGLIO"; SPC( 4)"MOMENTO FLETTENTE"
31645 PRINT SPC( 22)"(N)"; SPC( 11)"(N)"; SPC( 12)"(Nm)"
31650 PRINT SPC( 8)"-----"
31700 FOR J = 0 TO NP
31730 X = X(J)
31750 ND = N(I,1) * EXP (V * X) + N(I,2) * EXP ( - V * X) + N(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + N(I,4) * EXP
(A * X) * SIN (B * X) + N(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + N(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)

31752 ND = ND + N(I,7) * X ^ 2 + N(I,8) * X + N(I,9)
31760 TG = T(I,1) * EXP (V * X) + T(I,2) * EXP ( - V * X) + T(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + T(I,4) * EXP
(A * X) * SIN (B * X) + T(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + T(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)

31762 TG = TG + T(I,7) * X + T(I,8)
31770 MO = M(I,1) * EXP (V * X) + M(I,2) * EXP ( - V * X) + M(I,3) * EXP (A * X) * COS (B * X) + M(I,4) * EXP
(A * X) * SIN (B * X) + M(I,5) * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + M(I,6) * EXP ( - A * X) * SIN (B * X)

31772 MO = MO + M(I,7) * X ^ 2 + M(I,8) * X + M(I,9)
31780 ND(I,J) = ND:MO(I,J) = MO:TG(I,J) = TG
31820 ND = 2:HO = X: GOSUB 35150: PRINT SPC( 13 - NO)A$;
31848 ND = 0:HO = ND: GOSUB 35150: PRINT SPC( 13 - NO)A$;
31860 ND = 0:HO = TG: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
31880 ND = 0:HO = MO: GOSUB 35150: PRINT SPC( 15 - NO)A$
31900 PRINT SPC( 8)"-----"
31950 NEXT J: NEXT I
32100 REM
32150 REM STAMPA DEGLI SPOSTAMENTI DIFFERENZIALI
32200 REM E DELLE INTERAZIONI TRA I DUE STRATI
32250 REM
32620 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 8)" SPOSTAMENTO DIFFERENZIALE LUNGO Y ED X - INTERAZIONI TRA I DUE STRATI"
32630 PRINT SPC( 8)"-----"
32640 PRINT SPC( 10)"X(m)" SPC( 5)"DELTA (mm)"; SPC( 6);"ETA (mm)"; SPC( 7)"HY (N/m)"; SPC( 6)"QX (N/m)"
32650 PRINT SPC( 8)"-----"
32700 FOR J = 0 TO NP
32730 X = X(J)
32770 HY = S1 * EXP (V * X) + S2 * EXP ( - V * X) + S3 * EXP (A * X) * COS (B * X) + S4 * EXP (A * X) * SIN
(B * X) + S5 * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + S6 * EXP ( - A * X) * SIN (B * X) + S7
32780 QX = C1 * EXP (V * X) + C2 * EXP ( - V * X) + C3 * EXP (A * X) * COS (B * X) + C4 * EXP (A * X) * SIN
(B * X) + C5 * EXP ( - A * X) * COS (B * X) + C6 * EXP ( - A * X) * SIN (B * X) + C7 * X + C8
32790 DL = HY / (KY * BO) * 1000:ET = QX / (KX * BO) * 1000:DL(J) = DL:ET(J) = ET
32820 ND = 2:HO = X: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
32848 ND = 4:HO = DL: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
32860 ND = 4:HO = ET: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
32880 ND = 0:HO = HY: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$;
32890 ND = 0:HO = QX: GOSUB 35150: PRINT SPC( 14 - NO)A$
32900 PRINT SPC( 8)"-----"
32910 NEXT J
```

```
33400 REM    CALCOLO DELLE TENSIONI NELL'ARMATURA DI COLLEGAMENTO
33450 REM    E DELLE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI MAX NEI DUE STRATI
33550 REM
33600 PRINT : PRINT : PRINT SPC( 4) "=====
="
33650 PRINT SPC( 5) " CALCOLO DELLE TENSIONI NORMALI (N/mm^2) NELL'ARMATURA DI COLLEGAMENTO"
33700 PRINT SPC( 10) " E DELLE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI MASSIME NEI DUE STRATI"
33750 PRINT SPC( 4) "=====
"
33800 PRINT SPC( 20) "STRATO 1"; SPC( 17) "STRATO 2"; SPC( 10) "ARMATURA COLLEG."
33950 PRINT SPC( 5) "X(m)"; SPC( 3) "SIG.DX" SPC( 2) "SIG.SIN" SPC( 3) "TAU"; SPC( 4) "SIG.DX" SPC( 2) "SIG.SIN" SPC(
3) "TAU"; SPC( 5) "SIG.1"; SPC( 4) "SIG.2"
34100 PRINT SPC( 4) "=====
"
34250 FOR J = 0 TO NP
34300 X = X(J)
34350 ND = 2; HO = X: GOSUB 35150: PRINT SPC( 8 - NO)A$;
34360 SA(1) = ES / (RO * 1E9) * SIN (60) * (DL(J) * SIN (60) + ET(J) * COS (60)); SA(2) = ES / (RO * 1E9) * SIN
(60) * (DL(J) * SIN (60) - ET(J) * COS (60))
34370 TU(1) = TG(1,J) * 1.5 / (A1 * 1E6); TU(2) = TG(2,J) * 1.5 / (A2 * 1E6)
34380 SI(1,1) = (NO(1,J) / A1 - MO(1,J) * D1 / (2 * J1)) / 1E6; SI(1,2) = (NO(1,J) / A1 + MO(1,J) * D1 / (2 * J1
)) / 1E6
34390 SI(2,1) = (NO(2,J) / A2 - MO(2,J) * D2 / (2 * J2)) / 1E6; SI(2,2) = (NO(2,J) / A2 + MO(2,J) * D2 / (2 * J2
)) / 1E6
34550 ND = 2; HO = SI(1,1): GOSUB 35150: PRINT SPC( 10 - NO)A$;
34560 ND = 2; HO = SI(1,2): GOSUB 35150: PRINT SPC( 8 - NO)A$;
34570 ND = 2; HO = TU(1): GOSUB 35150: PRINT SPC( 7 - NO)A$;
34580 ND = 2; HO = SI(2,1): GOSUB 35150: PRINT SPC( 10 - NO)A$;
34590 ND = 2; HO = SI(2,2): GOSUB 35150: PRINT SPC( 8 - NO)A$;
34600 ND = 2; HO = TU(2): GOSUB 35150: PRINT SPC( 7 - NO)A$;
34610 ND = 0; HO = SA(1): GOSUB 35150: PRINT SPC( 10 - NO)A$;
34620 ND = 0; HO = SA(2): GOSUB 35150: PRINT SPC( 9 - NO)A$
34700 PRINT SPC( 4) "=====
"
34850 NEXT J
34900 END
34950 REM
35000 REM    SOTTOPROGRAMMA CHE ARROTONDA VALORI NUMERICI
35100 REM
35150 A$ = STR$ ( INT (HO * 10 ^ ND + 0.5) / 10 ^ ND)
35155 FOR II = 1 TO LEN (A$): IF MID$ (A$,II,1) = "E" THEN 35160
35156 NEXT II
35157 FOR II = 1 TO LEN (A$)
35158 IF MID$ (A$,II,1) = "." THEN A$ = LEFT$ (A$,II + ND): GOTO 35160
35159 NEXT II
35160 NO = LEN (A$): RETURN
```

ASPETTI TEORICI RELATIVI A STRUTTURE DA PONTE CON SEZIONE

A CASSONE REALIZZATA CON GUSCIO PREFABBRICATO

Gianmaria Donida  
Università di Chieti

Francesco Martinez y Cabrera  
Politecnico di Milano

SOMMARIO

Gli autori affrontano un tema di modellazione relativa ad un sistema di prefabbricazione per impalcati da ponte che prevedono la realizzazione di un guscio prefabbricato da integrare, con getti in opera, nel complesso strutturale e ad esso collegato con spinottatura di parete.

SUMMARY

The authors study a kind of prestressed bridges realizing a precast folded-plate to join afterwards with concrete.

1. PREMESSA

La tecnica della prefabbricazione, ai suoi inizi, si è sviluppata fondamentalmente come tecnica di supporto per la costruzione di opere di notevole impegno, attraverso la realizzazione di elementi strutturali prefabbricati che successivamente venivano assemblati ed incorporati, con getti in opera, nell'organismo principale.

Le tecnologie dell'epoca, pur escludendo l'impiego di complesse cassetture in opera, adottavano, in genere, sofisticate operazioni di montaggio e di getti di completamento con oneri economici che negli anni successivi hanno dovuto essere ridimensionati con innovazioni, di base, di tutti gli schemi strutturali e costruttivi.

Negli anni cinquanta, infatti, nel periodo di ricostruzione successivo alla 2<sup>a</sup> guerra mondiale, la prefabbricazione assume un ruolo autonomo come tecnica costruttiva e gli schemi strutturali subiscono evoluzioni subalterne alla tecnica stessa sino a giungere in alcuni casi, praticamente, alla prefabbricazione a secco con assenza quasi totale del getto in opera anche a livello di semplici connessioni.

Tali orientamenti non hanno sempre conseguito risultati brillanti, particolarmente nel campo delle strutture da ponte.

La scelta obbligata di elementi a sezione aperta, la tendenza a ridurre

gli spessori ed i pesi degli elementi strutturali, la convenienza ad adottare schemi a trave appoggiata hanno condizionato e vincolato la progettazione riducendo ogni scelta all'adozione, con soli criteri economici, della uniforme e spesso mediocre produzione di serie.

Le impostazioni, invece, già adottate ampiamente nelle prime applicazioni della prefabbricazione, rivolte alla integrazione degli elementi prefabbricati in uno schema di progetto, possono con le attuali tecnologie, avere ancora ampia validità. Tale orientamento può anche estendere i campi di applicazione attribuendo all'elemento prefabbricato aspetti di flessibilità e versatilità lasciando al progettista possibilità più diversificate di scelta sia per lo schema strutturale che per le fasi costruttive.

In tale quadro si pone la proposta della Società Ing. Franco di Trino Vercellese, già brevettata.

Tale proposta riprende, alla base, molti dei problemi avanzati e ripropone il concetto di prefabbricazione, nell'ambito delle strutture da ponte, con contorni più ampi e non legati in modo vincolante ad un solo schema o tipo strutturale.

In tale lavoro, oltre a descrivere il sistema si esaminano alcuni problemi statici specifici che caratterizzano il comportamento di tali tipi strutturali insieme ad alcune proposte relative alla modellazione strutturale.

## 2. DESCRIZIONE DEL SISTEMA DI PREFABBRICAZIONE

Il sistema proposto dalla Società Ing. Franco si basa sulla realizzazione di un guscio prefabbricato di tipo scatolare a forma trapezia con lato minore inferiore, con pareti dello spessore di circa 4.00 + 5.00 cm ed altezza rapportata alla luce da coprire (Fig. 2.1).

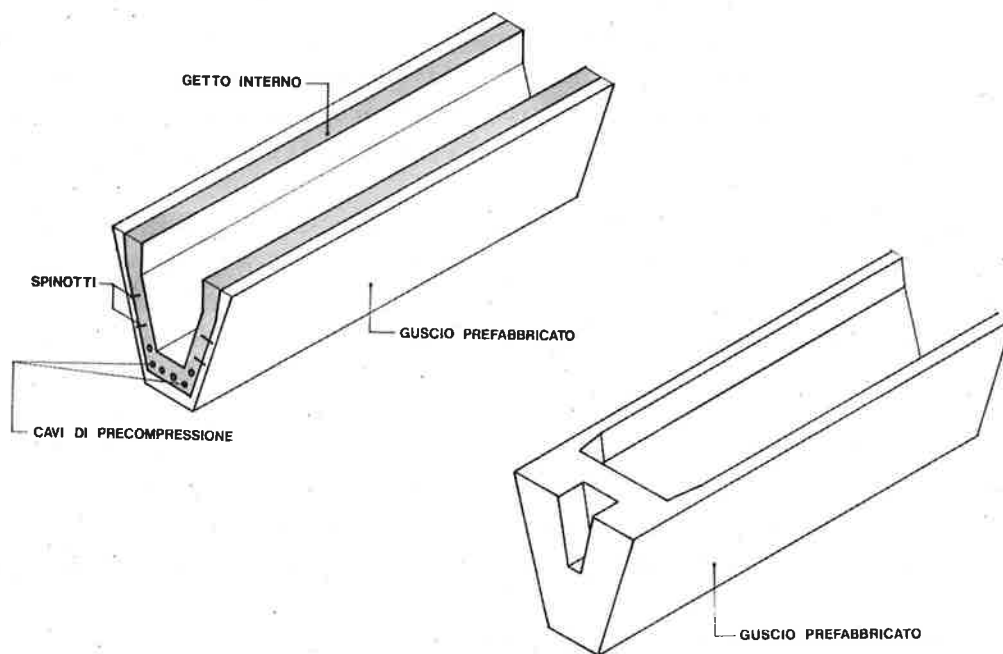


FIG. 2.1

Tale guscio, che riveste la funzione di cassero integrato collaborante, viene prefabbricato nei cantieri fissi della Società (Trino Vercellese) ed, a getto maturato, corredato di tutte le armature, convenzionali e di precompressione, ivi compresi gli ancoraggi per i cavi. Il guscio prevede opportune armature (spinotti) emergenti dalla parete che lo collegano al getto successivo. (Foto n° 1).

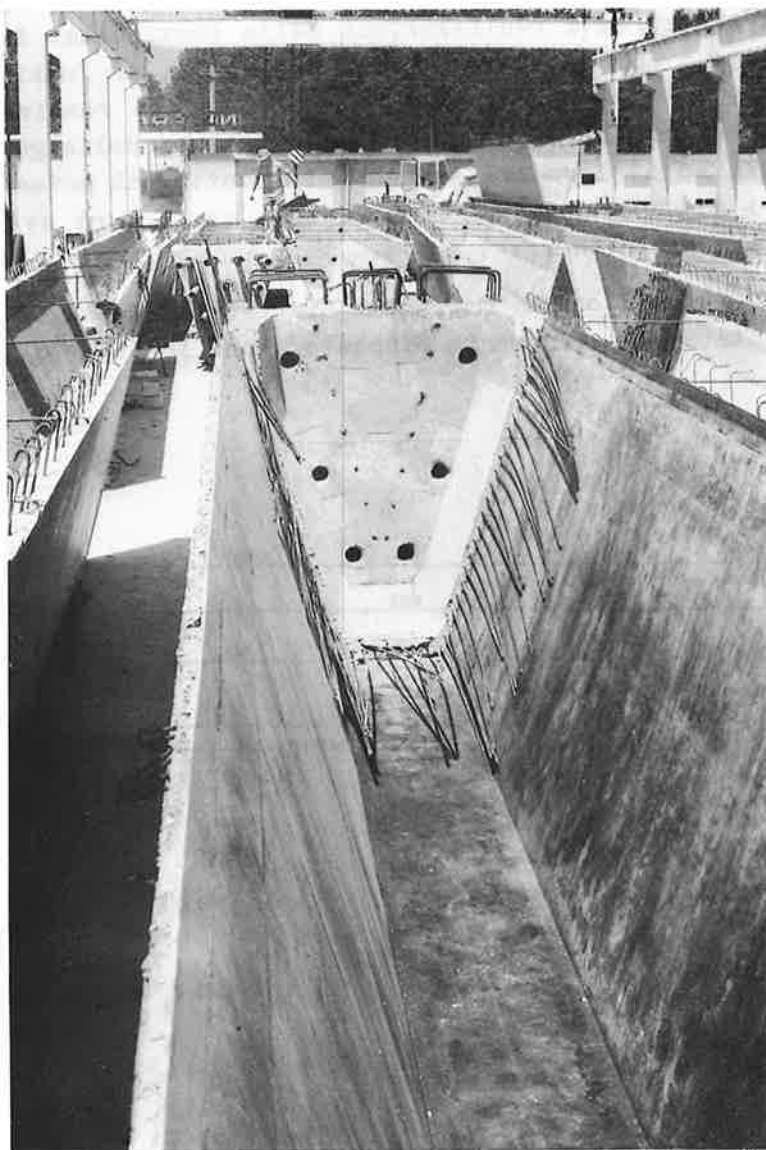


Foto n° 1

Gusci prefabbricati

Tale guscio può essere auto-portante per i successivi getti, con particolare riferimento a quelli di fondo e di parete che realizzano la sezione definitiva, od, in alternativa, può essere completato a piè d'opera con precompressione parziale o totale e successivamente montato.

Il completamento della sezione del ponte può essere realizzato con l'impiego di opportune "predalles" prefabbricate irrigidite da tralicci di armatura corredata anche dello sbalzo per la formazione del marciapiede (Fig. n°2.2).

La adozione della sezione a cassone lascia libera la scelta dello schema longitudinale che può, quindi, prevedersi anche a trave continua (Fig. n° 2.3).

In conseguenza le armature di precompressione possono essere di tre tipi:

- a) cavidiisposti nell'elemento base atti a far fronte alle sollecitazioni presenti nelle fasi transitorie di montaggio e getto, ivi compreso quello della soletta di impalcato. Tali cavi interessano lo schema appoggiato del guscio e sono, in genere, ancorati alle sue estremità;
- b) cavi atti alla realizzazione della continuità. Essi vengono tesati in opera, prima o dopo il montaggio della soletta, in funzione del loro profilo. Tali cavi, a loro volta, possono essere realizzati in due fasi successive attraverso la predisposizione di attese delle guaine negli elementi strutturali ed il loro collegamento in continuità prima, ed attraverso l'infilaggio dei trefoli poi. Il tiro di tali cavi dovrà avvenire dalle estremità della travata continua;
- c) cavi cappello, di lunghezza limitata, disposti a cavallo degli appoggi, con testate opportunamente disposte anche in soletta, atti ad integrare le azioni

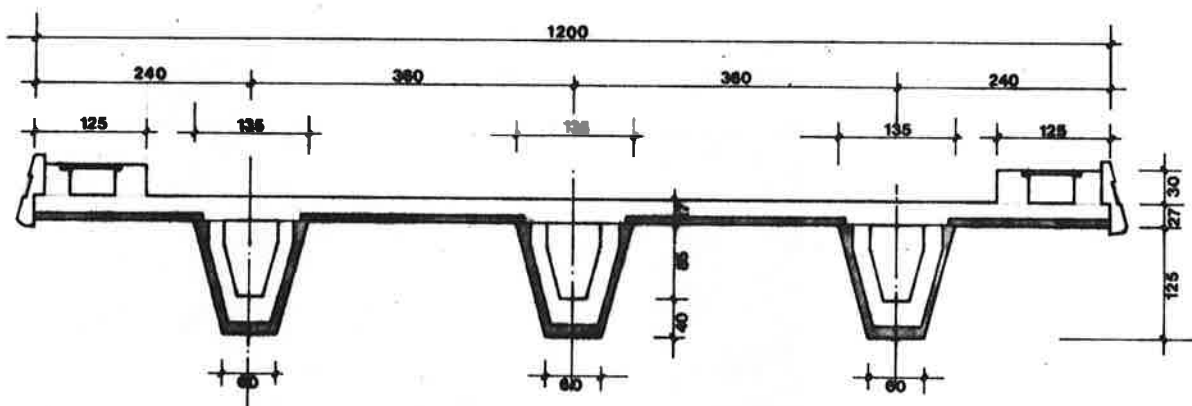


FIG. 2.2

di precompressione in continuità, od, al limite, a realizzarla totalmente con eliminazione dei cavi di cui al punto b). Questi ultimi, infatti, possono presentare difficoltà per l'infilaggio dei trefoli e comunque forniscono alte perdite per attrito.

Si precisa che la continuità può essere realizzata anche con armature convenzionali. Lo schema costruttivo si articola con le seguenti fasi:

- prefabbricazione dei gusci a tutta lunghezza od a conci;
- arredo dei gusci o dei conci (opportunosamente composti), a pié d'opera, con le armature inerti, con i cavi di precompressione od eventuale predisposizione di guaine.

- getto all'interno dei gusci, a piè d'opera, precompressione o 1<sup>a</sup> fase di precompressione a maturazione avvenuta e varo del guscio.  
Una variante a tale fase riguarda il caso dei gusci in un solo concio, previsti autoportanti all'atto della loro costruzione. In questo modo i gusci possono essere varati prima del getto ed il getto avviene in opera con successiva messa in tensione, (1<sup>a</sup> fase di precompressione) dei cavi;
- eventuale messa in opera dei cavi per la realizzazione della continuità se non interessanti la soletta;
- posa delle predalles di impalcato, sistemazione di eventuali cavi che interessano la soletta (ivi compresi i cavi cappello se presenti) e messa in opera delle armature convenzionali;
- eventuale 2<sup>a</sup> fase di precompressione o di cavi di campata o di cavi di continuità se non interessanti la soletta;
- getto della soletta, dei traversi in asse alla pila.
- 3<sup>a</sup> fase ed ultima fase di precompressione.

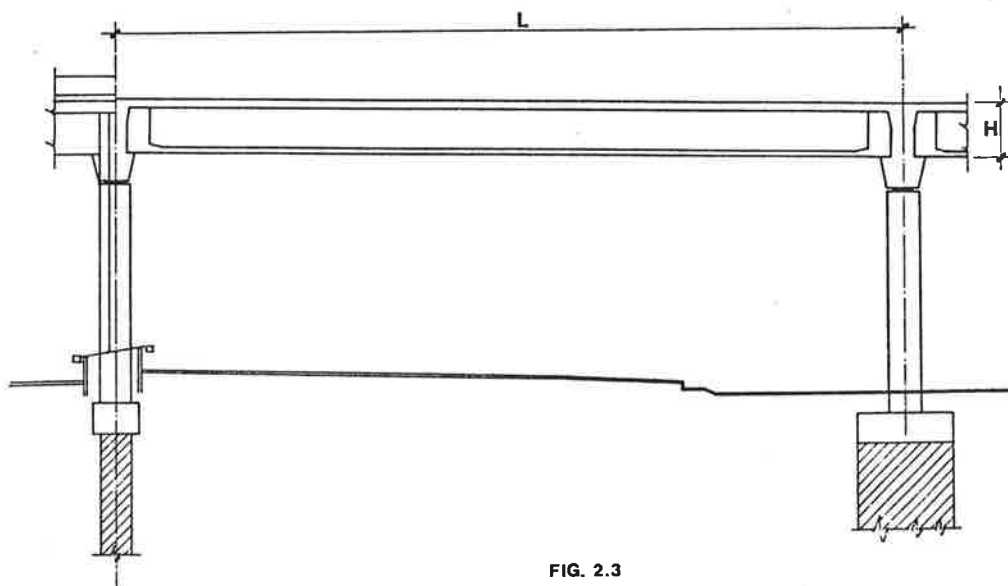


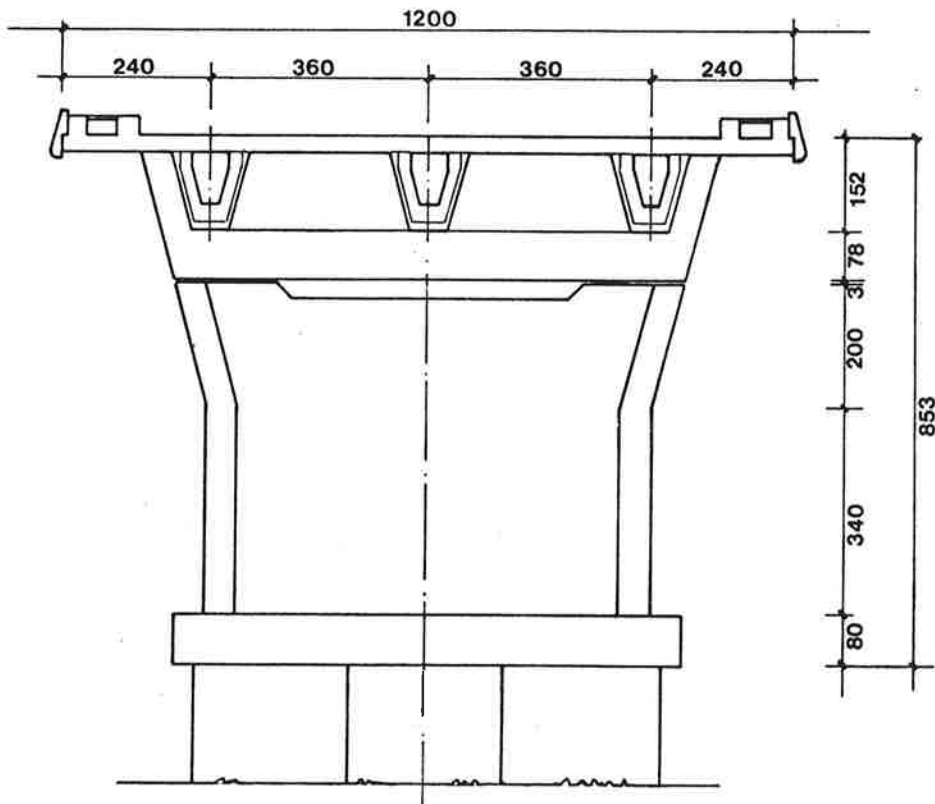
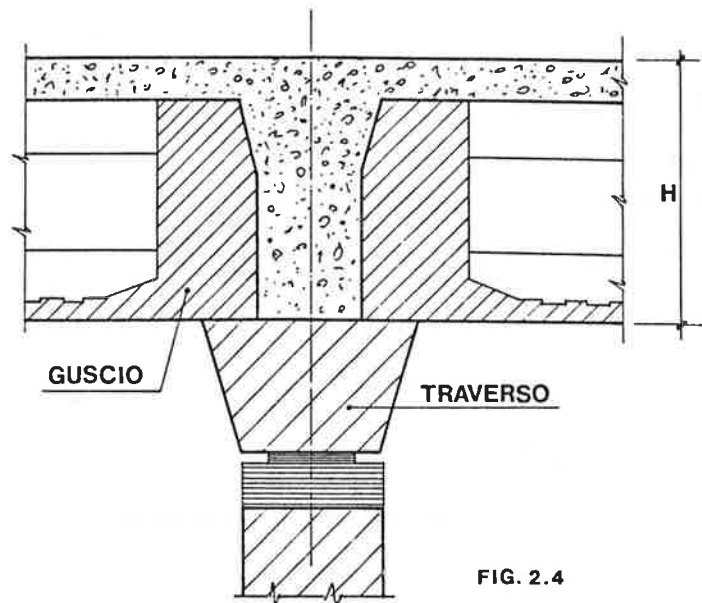
FIG. 2.3

Si precisa che, per quanto concerne gli appoggi, può risultare necessario, all'atto del montaggio dei singoli gusci, prevedere appoggi provvisori ed appoggi definitivi in asse alle pile. In alternativa è stata studiata una soluzione che prevede il preliminare conglobamento delle testate dei gusci nel traverso sulla pila e la sistemazione degli appoggi all'intradosso del traverso (Fig. 2.4 - Fig. 2.5).

Gli appoggi provvisori, adottati con la prima soluzione, possono essere realizzati con scatole a sabbia in modo che col loro svuotamento se ne ha l'automatica esclusione insieme al trasferimento del carico sugli appoggi definitivi.

Le fasi operative precedentemente indicate segmentano anche i corrispondenti schemi strutturali transitori e fasi di verifica.

Tali fasi vanno attentamente esaminate singolarmente e particolare attenzione dovrà porsi alle fasi di precompressione su schema iperstatico. In tale ambito vanno fatte opportune scelte. Parte della precompressione può essere sviluppata prima del getto della soletta, eventualmente dopo il montaggio delle predalles e renderà subito continua la parte strutturale costituita dai soli gusci e getti interni. La rimanente parte, invece, può coinvolgere anche la soletta di impalcato.





L'esame dei fenomeni lenti, ritiro e viscosità, semplificato se riferito ai soli effetti di continuità longitudinale, presenta invece aspetti complessi se riferiti ai getti interni di completamento dei gusci, tenuto anche conto delle probabili diverse caratteristiche dei vari getti.

L'aspetto particolare che si vuole esaminare in questa sede riguarda la statica dei collegamenti di parete o spinottatura di parete.

Essi devono assicurare la monoliticità del guscio prefabbricato al getto di parete ed alla soletta al fine di realizzare uno stato di continuità per ogni tipo di sollecitazione. Tali collegamenti possono essere realizzati con opportune armature emergenti. La loro previsione presenta difficoltà costruttive ed incidenze economiche e di conseguenza il loro corretto calcolo, la loro disposizione in parete e lungo l'asse della trave assumono una notevole importanza nel processo costruttivo proposto.

A ciò si aggiungono, come già accennato, le diverse qualità dei calcestruzzi con riferimento a quelle del guscio, o quelle delle pareti interne di getto ed a quelle della soletta.

Si vuole sottolineare che tali problemi, sotto l'aspetto concettuale non sono nuovi ed investono, di fatto, tutti i collegamenti tra parti strutturali realizzate separatamente e poi assemblate.

Pertanto il poter risolvere questo problema nel caso specifico del sistema strutturale proposto dalla Società Ing. Franco può essere di utile conoscenza, in più vasti campi, per comprendere il reale funzionamento di questi tipi di collegamento.

Si fa presente, infine, che lo studio di questo sistema può anche essere ricondotto per certi aspetti a quello dei pannelli multistrato adottando anche il criterio della armatura di collegamento spalmate.

### 3. IMPOSTAZIONE TEORICA

La parte speciale relativa alla analisi del comportamento di tali elementi strutturali è quella di valutare il campo tensionale e deformativo negli strati componenti la sezione strutturale nonché negli spinotti di collegamento e di conseguenza il regime di interazione.

Le fasi realizzative, precedentemente esposte, fanno individuare un complesso strutturale costituito da due strati di calcestruzzo a diverse caratteristiche elasto-geometriche, dipendenti anche dai tempi successivi di realizzazione.

Tali due strati, a differenti caratteristiche ed a comportamento ortotropo sono poi mutuamente collegate, in forma discreta, da spinotti di acciaio il cui funzionamento risulta determinante per la realizzazione della richiesta di monoliticità.

Una possibile interpretazione del comportamento di tali materiali mutuamente assemblati può essere sviluppata nel quadro di una analogia con le teorie applicate ai pannelli multistrato.

Come è noto la trattazione dei pannelli multistrato, che si identifica nelle linee fondamentali con quella dei pannelli "sandwich", viene condotta, in generale, attraverso una formulazione variazionale del problema agli autovalori, che con assegnate condizioni al contorno, impone la stazionarietà della energia totale (dei due strati componenti e degli elementi di cucitura)

$$\delta U = 0$$

essendo, nel caso generale

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{iJ} \cdot \epsilon_{ij} \cdot dV$$

con  $\sigma_{iJ}$ ,  $\epsilon_{iJ}$  componenti speciali di tensione e di deformazione rispettivamente.

In particolare con le consuete ipotesi di stato tensionale piano valido per ogni strato, si può porre:

$$\sigma_z = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0$$

Ricordando che:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{g} (\epsilon_x + \nu_{yx} \cdot \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{g} (\epsilon_y + \nu_{xy} \cdot \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy}$$

con  $E_x$ ,  $E_y$  moduli di elasticità normale secondo x ed y

$G_{xy}$  = modulo di elasticità tangenziale

$\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  coefficienti di Poisson

$$g = 1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx} \qquad e \qquad E_x \cdot \nu_{yx} = E_y \cdot \nu_{xy}$$

l'espressione generale dell'energia può essere posta nella seguente forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{E_x \epsilon_x^2}{g} + \frac{E_y \epsilon_y^2}{g} + 2 \frac{E_x \nu_{yx} \epsilon_x \epsilon_y}{g} + G_{xy} \gamma_{xy}^2 \right) dV$$

con

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Il valore dell'energia, come detto, va determinato per ognuno degli elementi costituenti la struttura.

Per quanto riguarda la schematizzazione della armatura si può procedere come segue:

- armatura discreta;
- armatura diffusa o spalmata.

Una completa modellazione discreta dell'armatura annessa nei due strati componenti modellati con E.F. solidi può effettuarsi con un elemento trave attribuendo opportune leggi di aderenza acciaio-calcestruzzo.

Una tale modellazione, però, richiede una ulteriore partizione degli spessori degli elementi solidi che delimiti in modo opportuno l'armatura stessa con conseguente aumento di gradi di libertà del complesso strutturale.

La diffusione o spalmatura delle armature può risultare più idonea nel quadro della modellazione, in quanto ciò equivale ad un inserimento di un ulteriore strato componente.

In alternativa alle due precedenti schematizzazioni e nell'ipotesi cautelativa di assenza di ogni tipo di aderenza ed interazioni tra le facce a contatto si può proporre una schematizzazione della spinottatura di connessione che ne preveda il posizionamento coincidente con i nodi delle facce degli E.F. solidi.

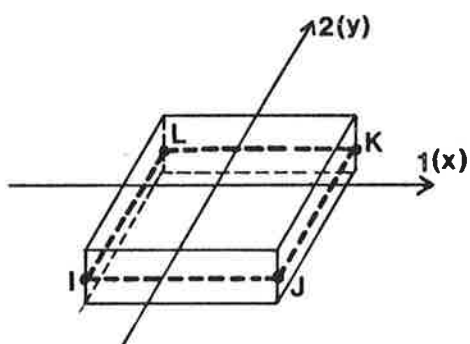


FIG. 4.2. a

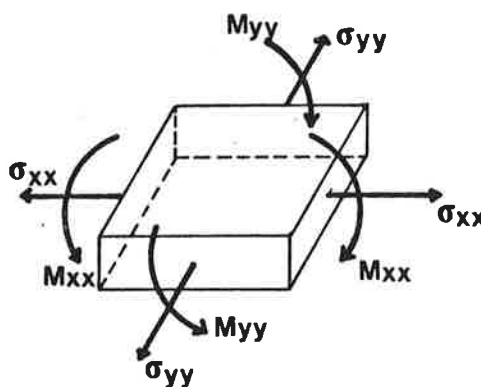


FIG. 4.2. b

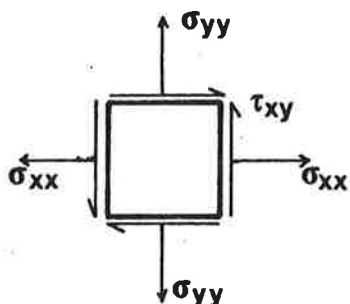


FIG. 4.2. c

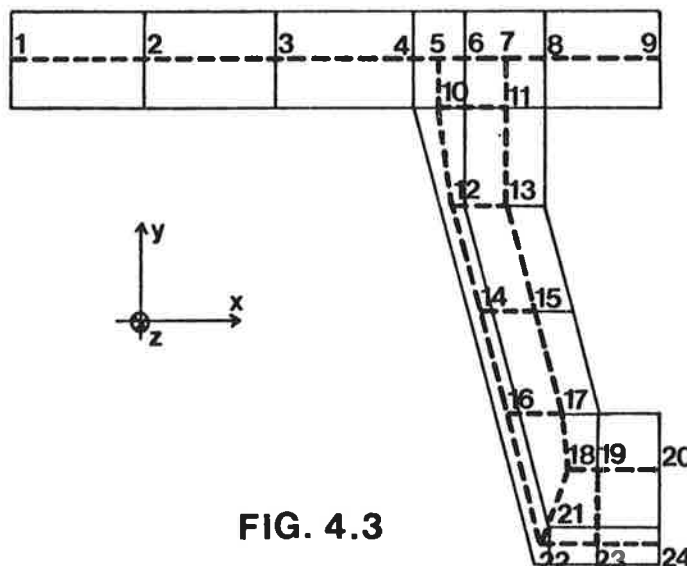


FIG. 4.3

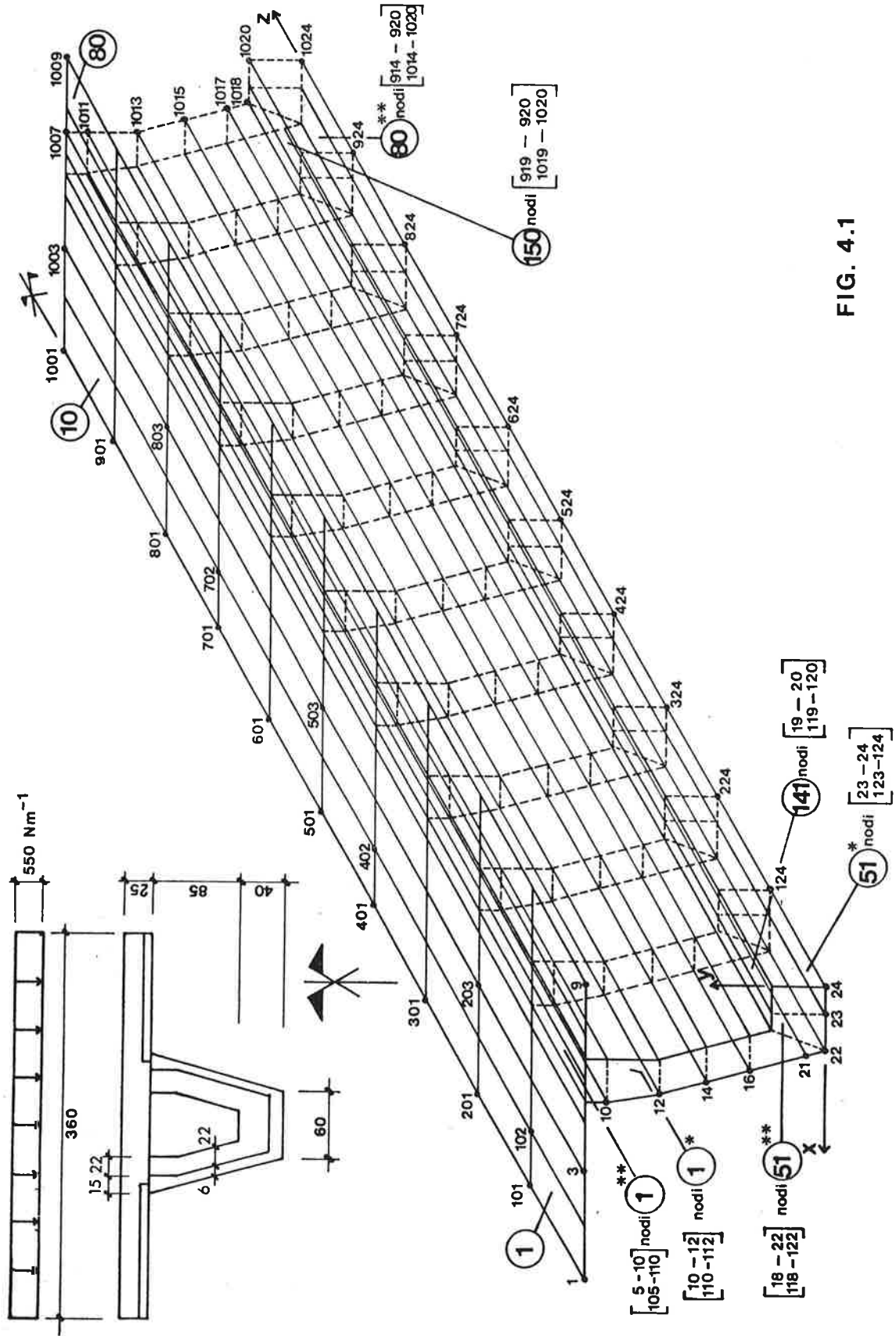


FIG. 4.1

#### 4. IMPOSTAZIONE DELL'ANALISI NUMERICA E RISULTATI

L'analisi strutturale viene condotta discretizzando il complesso con 1024 punti nodali e con 290 E.F. (Fig. 4.1) di tipo plate-shell (Fig. 4.2.a,b,c). La modellazione tipo della sezione è consegnata in Fig. 4.3 e lo schema di armatura in Fig. 4.4.

La struttura è stata segmentata in tre gruppi di E.F. e precisamente:

- 150 E.F. per la soletta ed il nucleo di calcestruzzo gettato in opera con modulo di elasticità trasversale  $E_c$  pari a  $30.000 \text{ Ncm}^{-2}$  e coefficiente di Poisson pari a  $0,12$ .
- 60 E.F. per il guscio prefabbricato con modulo  $E_c$  pari a  $40.000 \text{ Ncm}^{-2}$  e coefficiente di Poisson pari a  $0,16$ .
- 80 E.F. per l'armatura di collegamento con modulo  $E_s$  pari a  $200.000 \text{ Ncm}^{-2}$  e coefficiente di Poisson  $\nu = 0,33$ .

Tale armatura è stata spalmata sulla superficie di competenza.

Inoltre nella matrice di elasticità dei materiali si è tenuto conto unicamente del modulo di elasticità tangenziale.

Successivamente i valori delle tensioni tangenziali relativi alla armatura spalmata vengono riportati al discreto.

Sono state analizzate due condizioni di carico relative al peso proprio ed al carico di  $550 \text{ Nm}^{-1}$  distribuito trasversalmente ed uniformemente sulla soletta. La simmetria strutturale e di carico ha permesso di ridurre il modello ad un quarto. Per quanto concerne i vincoli, si sono presi in considerazione gli schemi di trave incastrata alle due estremità o appoggiata.

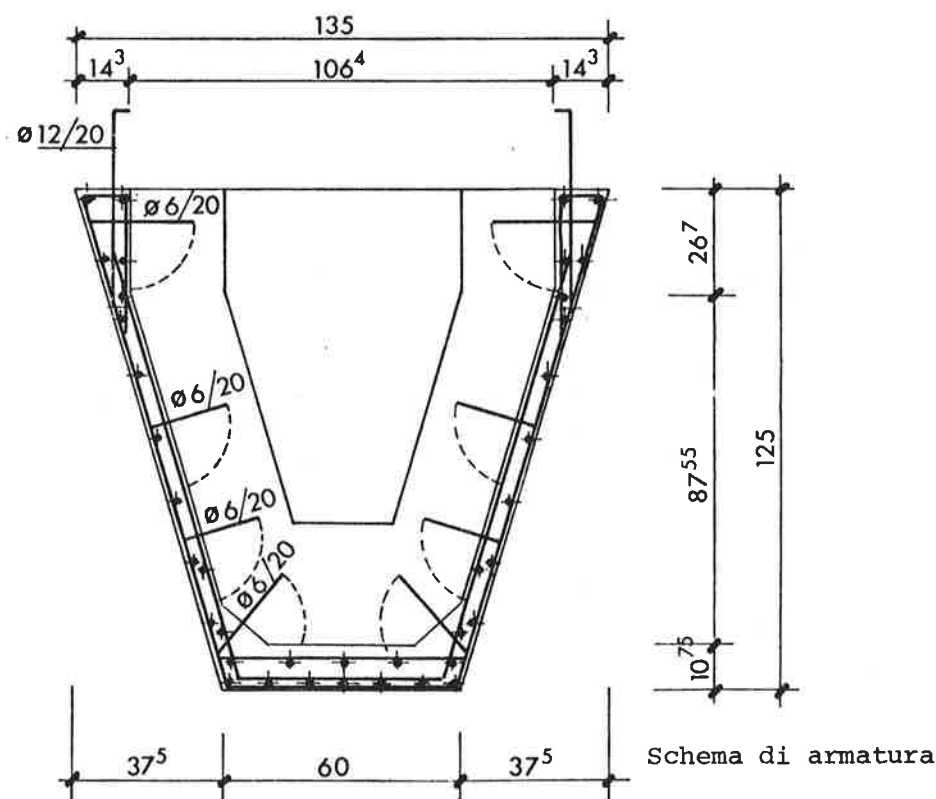
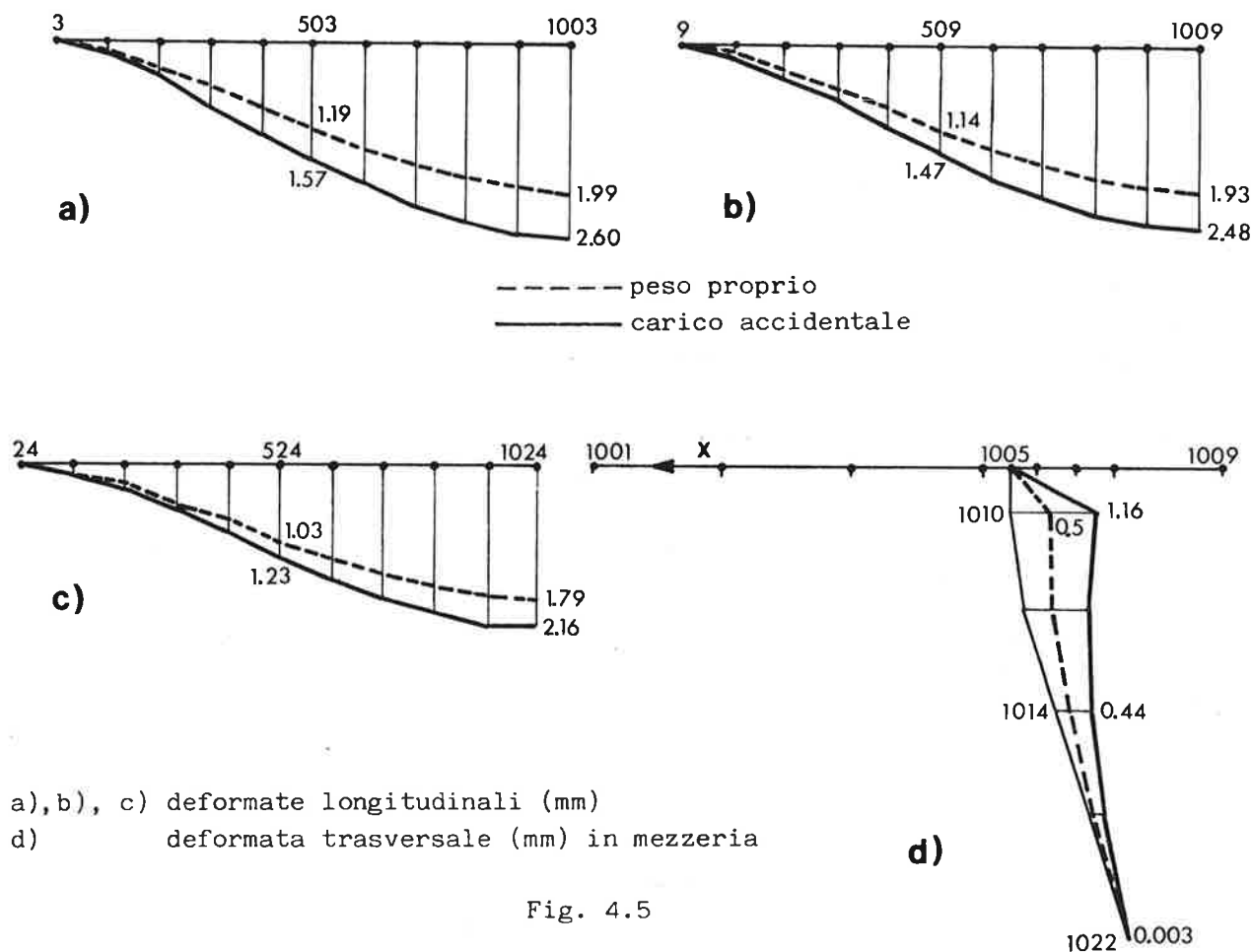


FIG. 4.4

Caso A): Struttura incastrata



a), b), c) deformate longitudinali (mm)  
 d) deformata trasversale (mm) in mezzeria

Fig. 4.5

Si è provveduto a diagrammare alcuni dei risultati di maggior interesse con riferimento ai due precedenti schemi di vincolo.

Per quanto concerne la struttura incastrata agli estremi le deformate longitudinali di Fig. 4.5, mostrano una sensibile variazione dei valori in vari punti della sezione trasversale con scarti massimi dell'ordine del 15%. Si deve tenere conto che in questo primo approccio si è operato con condizioni di carico trasversalmente distribuito uniformemente e simmetrico e di conseguenza tale scarto potrebbe accentuarsi per condizioni di carico trasversalmente non simmetriche. Per quanto concerne lo stato tensionale il fenomeno trova conferma nei diagrammi riportati in Fig. 4.6 a,b,c, per le tensioni normali  $\sigma_{yy}$  con scarto dell'ordine massimo del 20% e nei diagrammi di Fig. 4.7 a,b per le tensioni tangenziali  $\tau_{xy}$ . Da quanto evidenziato si desume che la presenza del guscio prefabbricato, a caratteristiche elastogeometriche differenziate, e la presenza della spinottatura, inducono variazioni rispetto al comportamento di elementi a getto unico.

Per la struttura appoggiata si sono riportati, nelle Fig. 4.8), 4.9), 4.10) i corrispondenti diagrammi.

Per ulteriori considerazioni e confronti sul comportamento strutturale si rimanda ai diagrammi stessi.

Caso A): Struttura incastrata

sezione di mezzeria

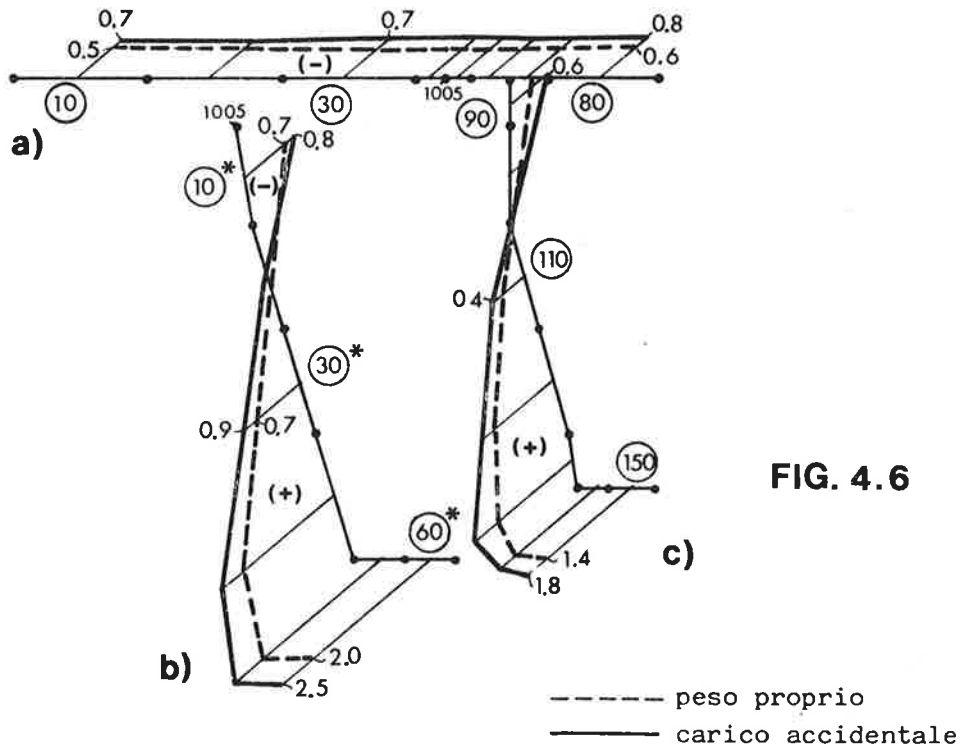


FIG. 4.6

- a) Tensioni normali nella soletta (MPa) nel baricentro E.F.
- b) Tensioni normali nel guscio (MPa) nel baricentro E.F.
- c) Tensioni normali nella parete gettata in opera (MPa) nel baricentro E.F.

Caso A): Struttura incastrata

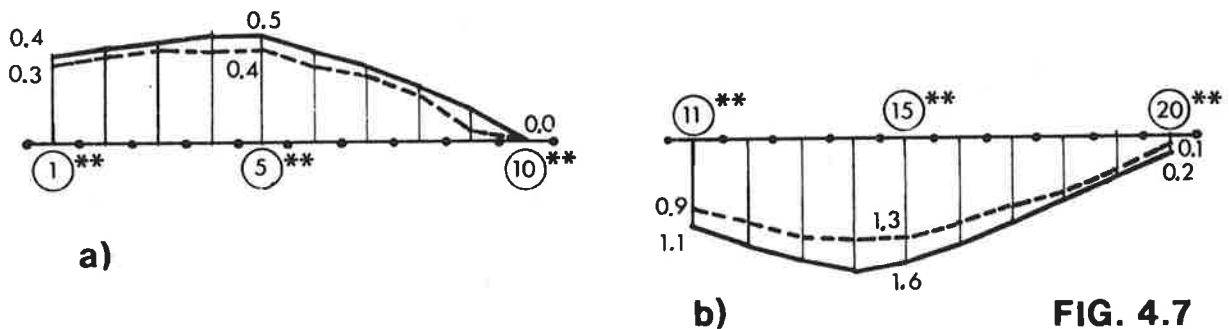


FIG. 4.7

- a) Tensioni tangenziali (MPa) negli spinotti di collegamento tra guscio esterno e soletta
- b) Idem tra parete interna gettata in opera e soletta

Caso B): Struttura appoggiata

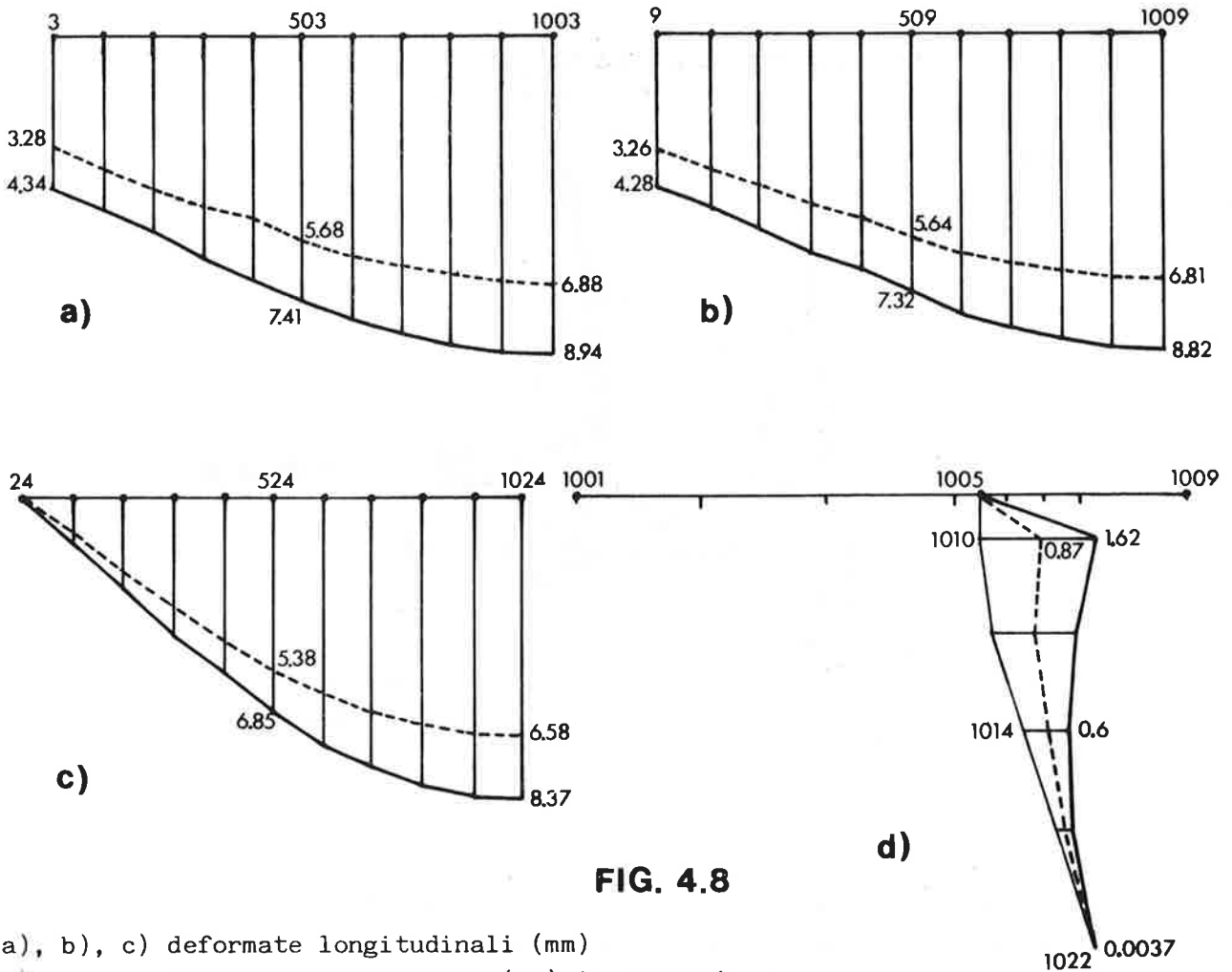


FIG. 4.8

a), b), c) deformate longitudinali (mm)  
d) deformata trasversale (mm) in mezzeria

Risulta, però, interessante sottolineare quanto segue:

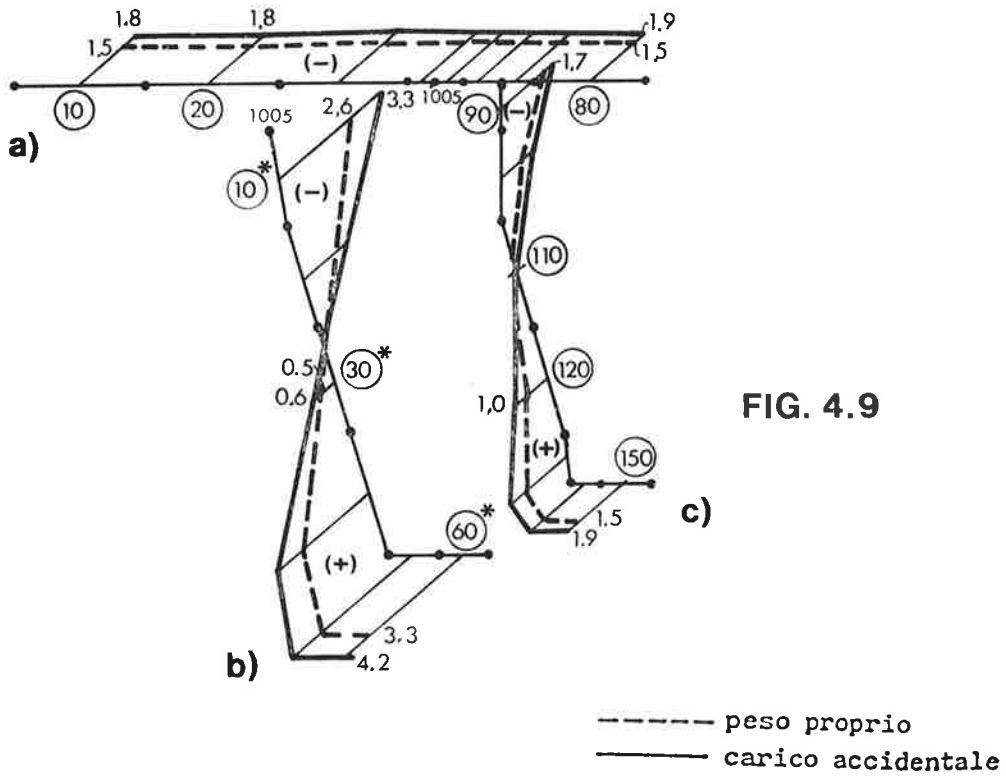
I diagrammi delle tensioni tangenziali per la struttura incastrata evidenziano valori massimi circa ai quarti della luce. Ciò dipende dalla tipologia del vincolo che nel caso dell'incastro impedisce gli scorrimenti a tutta altezza della sezione mentre nel caso dell'appoggio sulle testate gli scorrimenti mutui sono consentiti.

L'esame dei diagrammi delle tensioni normali evidenzia un allontanamento dalle linearità imputabile alla presenza di scorrimenti.



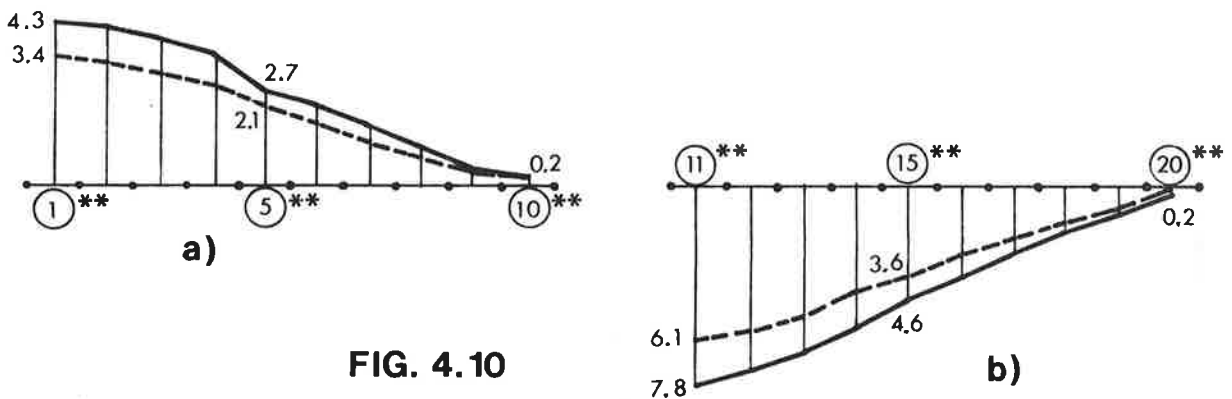
Caso A): Struttura appoggiata

sezione di mezzeria



- a) Tensioni normali nella soletta (MPa) nel baricentro E.F.
- b) Tensioni normali nel guscio (MPa) nel baricentro E.F.
- c) Tensioni normali nella parete gettata in opera (MPa) nel baricentro E.F.

Caso B): Struttura appoggiata



- a) Tensioni tangenziali (MPa) negli spinotti di collegamento tra guscio esterno e soletta
- b) Idem tra parete interna gettata in opera e soletta

## 5. CONCLUSIONI

L'impostazione di questo studio, cui seguirà una completa illustrazione dei risultati numerici, va oltre l'applicazione specifica in quanto essa focalizza problemi ricorrenti nelle strutture prefabbricate ogni volta che si procede ad un assemblaggio con armatura passante di elementi a caratteristiche elasto-geometriche differenziate.

Si ritiene inoltre, che tali procedimenti costruttivi possano trovare applicazione in un'ampia fascia di realizzazioni strutturali. Ciò può segnare un nuovo sviluppo della tecnica della prefabbricazione e fornire al progettista una più ampia e diversificata possibilità di realizzazione di schemi strutturali non legati rigidamente a processi industrializzati predeterminati.

In tale direzione la proposta della Società Ing. Franco (Trino Vercellese), rappresenta un fatto innovativo sotto vari aspetti.

Sempre rimanendo nell'ambito della teoria di 1° ordine risulta di interesse integrare lo studio attuale con i problemi di ritiro differenziato e di viscosità. Tali studi potranno però essere svolti solo dopo un compiuto completamento della conoscenza del regime statico e delle interazioni anche con concentrazione della modellazione nelle zone di maggior interesse.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) J. Born, Hipped-plate structures. Ed. Crosby Lock-wood, London, 1962.
- (2) S.P. Timoshenko, Woinowsky, S. Krieger, Theory of plates and shell. Mc Graw-Hill Book Company, London, 1959.
- (3) P. Billington, Thin shells concrete structures, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965.
- (4) W. Flugge, Stresses in shells. Heidelberg Berlin, 1973.
- (5) O.C. Zuenkiewicz, Y.K. Cheung, The finite element method in structural and continuum mechanics. Mc Graw-Hill, London, 1967.
- (6) G. Donida, G. Menditto, S. Di Fabio, Sul calcolo dei pannelli multistrato. La prefabbricazione n. 7/8 agosto 1982.
- (7) G. Donida, F. Martinez y Cabrera, G. Menditto, Analisi statica di strutture scatolari con il metodo degli elementi finiti, un tentativo di ottimizzazione con riferimento a risultati sperimentali. L'industria delle costruzioni, Gennaio 1983.

SULLA CAPACITA' PORTANTE DELLE SOLETTE FORATE ESTRUSE PRECOMPRESSE

Dante Galeota - Matteo M. Giammatteo

Dip. di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno  
Facolta' di Ingegneria  
Universita' dell'Aquila  
L' AQUILA

SOMMARIO

E' stata effettuata una vasta indagine sperimentale sul comportamento strutturale di 55 solette precomprese vibroestruite realizzate in calcestruzzo leggero e normale. In particolare sono state rilevate le resistenze ultime a taglio, a flessione ed allo sfilamento dei cavi.

E' stata, inoltre, valutata l'applicabilita' di differenti criteri di verifica al caso di solette vibroestruite realizzate in calcestruzzo leggero.

SUMMARY

A research was carried out on 55 extruded hollow core slabs made of lightweight and normal weight concrete.

Various tests were performed in order to determine the shear strength, the anchorage failure and the flexural load capacity of the slabs.

The aim of this study was to examine the applicability of several theoretical approaches to design of prestressed lightweight concrete extruded hollow core slabs.

1. INTRODUZIONE

Le solette forate in c.a. precompresso sono divenute, nel corso degli ultimi anni, un componente di grande diffusione nell'ambito delle strutture prefabbricate. Infatti, solo per estrusione, vengono prodotti annualmente nel mondo circa 40.000.000 m<sup>2</sup> di solette.

Le ragioni di questo successo sono diverse; esse vanno ricercate essenzialmente nel basso consumo di materiale e nell'alto livello di industrializzazione delle tecniche di produzione. L'uso di avanzate tecniche di produzione, quali appunto l'estrusione, consente di ottenere calcestruzzi di alta resistenza (circa 60N/mm<sup>2</sup>) ed una elevata produttivita' (25-30m<sup>2</sup> al giorno, per operaio specializzato). Il peso contenuto e l'impiego della precompressione, inoltre, permettono di valicare con solette in semplice appoggio luci fino a 20m.

A causa, pero', della particolarita' di tali strutture (assenza di armatura ordinaria trasversale, precompressione, forma della sezione, elevate resistenze dei materiali, ecc.) non esistono ancora regole di calcolo codificate ed universalmente accettate per la loro verifica e dimensionamento. A tale scopo la Commissione FIP per la Prefabbricazione nel 1978 ha istituito un gruppo di lavoro, che in occasione del Convegno FIP del 1982 a Stoccolma ha presentato un primo Rapporto Tecnico (V). Successivi, ma non definitivi aggiornamenti sono venuti nei Convegni FIP del 1984 a Calgary (XVII), (XX) e del 1986 a New Delhi (XVIII).

L'interesse per tali componenti prefabbricati e' testimoniato, inoltre, dai numerosi lavori di ricerca sia teorici, che sperimentali (I), (II), (X), (XI), (XII), (XIV), (XV), (XVI), (XIX) svolti in Europa e negli Stati Uniti.

Negli ultimi due anni, presso il Laboratorio Prove Materiali e Strutture della Facolta' di Ingegneria dell'Aquila, sono stati studiati sperimentalmente (IV), (VI), (VII), (VIII) i diversi aspetti (taglio, flessione, aderenza) del

comportamento allo stato limite ultimo delle solette forate estruse e precomprese, realizzate in calcestruzzo leggero strutturale. La scelta di questo materiale e' giustificata dalla crescente difficolta' di approvvigionamento di inerti pesanti di buona qualita' in alcune regioni italiane, e dalla possibilita' di ottenere ulteriori riduzioni di peso.

Il presente lavoro raccoglie i risultati e le elaborazioni relative alla sperimentazione di 55 solette, alcune delle quali realizzate per confronto in calcestruzzo normale, con lunghezze comprese tra 2.90m e 5.80m ed altezza h=200mm.

Viene, inoltre, esaminata la possibilita' di applicare diverse metodologie teoriche per la valutazione della resistenza ultima a taglio e della rottura per sfilamento dei cavi, al caso di solette realizzate in calcestruzzo leggero strutturale.

## 2. MODALITA' DI ROTTURA

La rottura delle solette forate precomprese puo' avvenire secondo quattro modalita':

- a) rottura puramente flessionale (fig.1a); essa e' preceduta da inflessioni molto elevate ed e' caratterizzata, nella maggior parte dei casi, dal cedimento dell'acciaio, data la bassa percentuale geometrica di armatura;
- b) rottura taglio-compressione; e' innescata, solitamente, da una lesione di tipo flessionale che successivamente, evolvendo in lesione di taglio, riduce la zona compressa di calcestruzzo provocandone la rottura (fig.1b);
- c) rottura taglio-trazione; e' generata dal raggiungimento della resistenza a trazione del calcestruzzo nelle anime della soletta, all'interno di una zona non fessurata per flessione e nella quale la precompressione non e' ancora completamente sviluppata (fig.1c); in questo caso le lesioni inclinate si propagano istantaneamente verso l'intradosso e l'estradosso della soletta determinandone la rottura con spiccate caratteristiche di fragilita';
- d) rottura per sfilamento dei cavi; e' provocata da una fessurazione all'interno della lunghezza di trasferimento o di aderenza flessionale dei cavi (fig.1d); in questo caso la lunghezza di ancoraggio e' insufficiente, pertanto i cavi possono scorrere rispetto al calcestruzzo circostante.

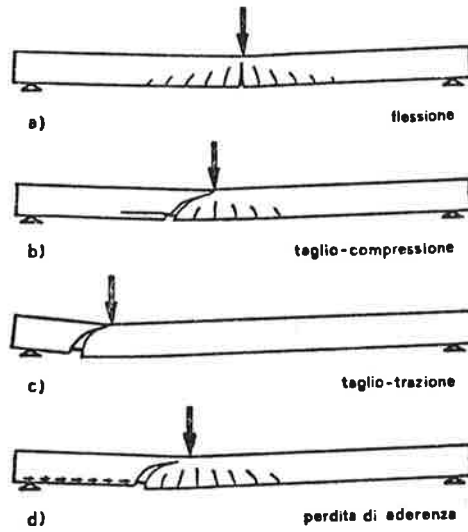
## 3. PROVE SPERIMENTALI

L'indagine sperimentale e' stata condotta su due gruppi di solette del tipo SPIROLL, per un totale di 55 campioni, confezionate in calcestruzzo leggero strutturale e normale, con l'intento di determinare mediante prove di carico statico di breve durata, le resistenze ultime a taglio, a flessione ed allo sfilamento dei cavi.

Tutti i campioni avevano la medesima sezione trasversale (fig.2) e lunghezze di 2.90m, 4.30m e 5.80m. La condizione di vincolo esterno adottata e' stata quella di semplice appoggio ed il carico, crescente in maniera monotonica e' stato applicato secondo una linea ortogonale all'asse longitudinale della soletta e sull'intera larghezza della stessa. Nel caso di prove a flessione o per la resistenza allo sfilamento, i campioni sono stati sottoposti ad una condizione di carico simmetrica (fig.3a); nel caso di prove a taglio e' stata invece utilizzata una condizione di carico non simmetrica (fig.3b).

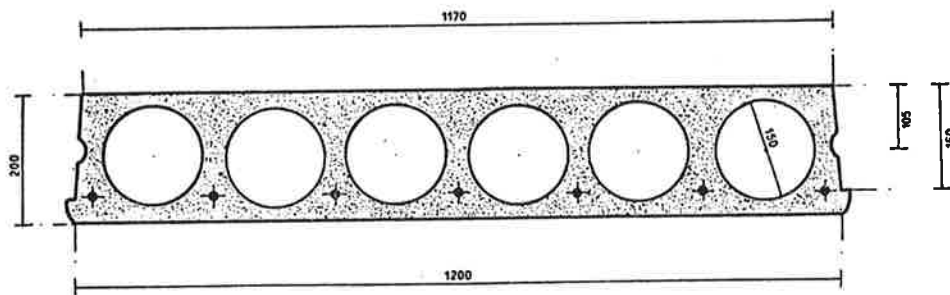
Le variabili considerate durante la sperimentazione sono state le seguenti:

- la posizione (s) dell'appoggio rispetto alla estremita' della soletta;
- la posizione (a) del carico rispetto all'appoggio;



MODI DI ROTTURA

Fig. 1



7 CAVI	$A_s$ 52.5 mm <sup>2</sup>
LUNGHEZZA	2.9 m 4.3 m 5.8 m

Fig. 2

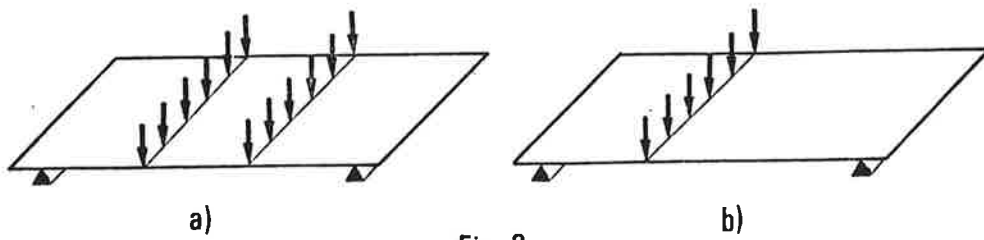


Fig. 3

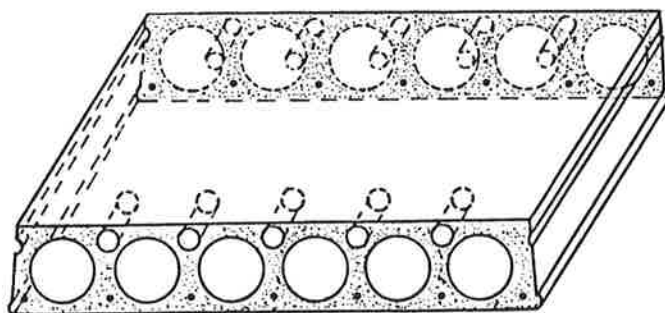


Fig. 4

- il materiale (calcestruzzo leggero strutturale e normale).

Il primo gruppo di campioni era composto da 24 solette confezionate con calcestruzzo leggero strutturale. Tredici solette sono state provate con l'intento di ottenere una rottura per taglio (tab.1); in altre nove solette si e' provocato lo sfilamento dei cavi, mentre le restanti due sono state provate a flessione, (tab.2). La sperimentazione per questo primo gruppo e' stata effettuata dopo circa tre mesi dalla data di getto.

Il secondo gruppo ha compreso 31 solette, 19 delle quali sono state confezionate in calcestruzzo leggero strutturale, utilizzando per l'impasto di calcestruzzo la stessa composizione prevista per il primo gruppo. Le rimanenti 12 solette sono state confezionate in calcestruzzo normale e molte di esse, prima delle prove, hanno presentato uno o piu' cavi con elevati rientri iniziali, a causa di una imperfetta maturazione del getto. Quindici campioni di questo secondo gruppo sono stati caricati secondo lo schema di tab.3 (prove di taglio). Tredici sono stati caricati secondo lo schema di tab.4 (prove di flessione e sfilamento dei cavi). Infine tre campioni sono stati sottoposti a carichi ciclici (tab.5). Tutte queste prove sono state effettuate dopo circa un anno dalla data di getto.

#### 4. CARATTERISTICHE DEI MATERIALI

Le caratteristiche meccaniche dei materiali, acciaio e calcestruzzo, utilizzati per il confezionamento delle solette, sono state determinate in laboratorio mediante prove su campioni ricavati dalle solette stesse.

##### Acciaio

Le armature erano costituite da trefoli da 7 fili, tesati inizialmente a circa 1300 N/mm<sup>2</sup>, ed aventi le seguenti caratteristiche:

diametro nominale	Ds	=	3/8 in	(9.52mm)
area	As	=	52.5	mm <sup>2</sup>
tensione media di rottura	fps	=	2054	N/mm <sup>2</sup>
tensione media all'1%	fp(1)	=	1650	N/mm <sup>2</sup>
modulo di elasticita'	Es	=	195000	N/mm <sup>2</sup>

##### Calcestruzzo

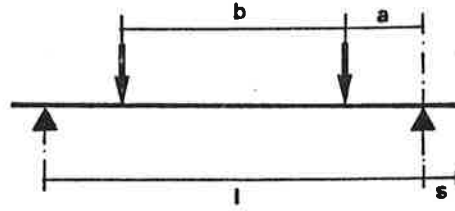
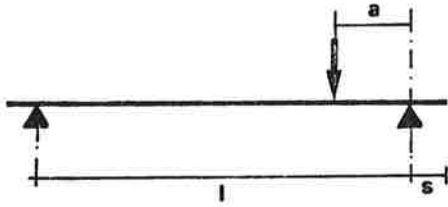
Il calcestruzzo utilizzato per il primo e secondo gruppo aveva la seguente composizione per m<sup>3</sup> di impasto:

##### Calcestruzzo leggero strutturale

cemento Portland	400 Kg
sabbia	900 Kg
inerte leggero Termolite T6	420 Kg
acqua teorica (A/C = 0.4)	160 l

##### Calcestruzzo normale

cemento Portland	400 Kg
sabbia	1100 Kg
inerti	880 Kg
acqua teorica (A/C = 0.35)	140 l



Campione	a (mm)	s (mm)	l (mm)	a/h
1a	400	150	2600	2
2a	600	150	2600	3
3a	800	150	2600	4
4a	800	150	2600	4
5a	600	150	2600	3
6a	600	50	2800	3
7a	600	50	2800	3
8a	400	50	2800	2
9a	400	50	2800	2
10a	800	50	2800	4
11a	800	150	2600	4
12a	400	150	2600	2
13a	400	50	4200	2

Tab. 1

Campione	b (mm)	s (mm)	l (mm)	a/h
14a	1300	50	4200	7.25
15a	1300	50	4200	7.25
16a	1300	50	4200	7.25
17a	1300	50	4200	7.25
18a	2000	50	4200	5.5
19a	2000	50	4200	5.5
20a	2000	50	4200	5.5
21a	2000	50	4200	5.5
22a	2000	50	4200	5.5
23a	2000	50	5700	9.25
24a	2000	50	5700	9.25

Tab. 2

Campione	a (mm)	s (mm)	l (mm)	a/h
17b	400	50	2800	2
18b	400	50	2800	2
19b	400	50	2800	2
20b	400	50	2800	2
21b	400	50	2800	2
22b	600	50	2800	3
23b	600	50	2800	3
24b	600	50	2800	3
25b	600	50	2800	3
26b	600	50	2800	3
27b	800	50	2800	4
28b	800	50	2800	4
29b	800	50	2800	4
30b	800	50	2800	4
31b	800	50	2800	4

Tab. 3

Campione	b (mm)	s (mm)	l (mm)	a/h
1b	2000	50	5700	9.25
2b	2000	50	5700	9.25
3b	2000	50	5700	9.25
4b	2000	50	4200	5.5
5b	2000	50	4200	5.5
7b	2000	50	4200	5.5
8b	2000	50	4200	5.5
9b	2000	50	4200	5.5
10b	1300	50	4200	7.25
11b	1300	50	4200	7.25
12b	1300	50	4200	7.25
14b	1300	50	4200	7.25
16b	1300	50	4200	7.25

Tab. 4

Campione	b (mm)	s (mm)	l (mm)	a/h
6b	2000	50	4200	5.5
13b	1300	50	4200	7.25
15b	1300	50	4200	7.25

Tab. 5

In ambedue i gruppi i provini sono stati ricavati dalla parte superiore delle solette, come indicato in fig.4. Le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo sono riportate nella tabella 6.

## 5. ANALISI DEI RISULTATI

La sperimentazione e' stata preceduta dal rilevamento della posizione e del rientro dei cavi in corrispondenza delle testate di ciascuna soletta. Nella fig.5a, 5b si riportano i valori medi e le deviazioni standard delle distanze del baricentro dei trefoli dal lembo superiore. In tutti i campioni esaminati il cavo centrale risulta essere il piu' prossimo al lembo superiore.

Questa configurazione e' provocata dal verso di rotazione delle coclee dell'estrusore. Le fig.6a, 6b e 6c illustrano l'andamento dei valori medi e le deviazioni standard del rientro iniziale dei cavi. Come si puo' osservare i rientri maggiori si verificano in corrispondenza dei trefoli piu' esterni; tale comportamento va attribuito alla minor compattazione del getto della soletta in corrispondenza delle zone laterali ed alla oscillazione dei trefoli durante il processo di estrusione.

### 5.1 Prove di taglio

Le prove sono state effettuate applicando una sola linea di carico secondo lo schema di tab.1 e tab.3. I dati rilevati sono illustrati sinteticamente nelle tab.7 (cls leggero) e B (cls normale), nelle quali:

- $\delta_m$  = valore medio del rientro iniziale dei trefoli nella sezione d'estremita' della soletta piu' prossima al carico;
- $P_{sf}$  = carico di sfilamento, individuato come il carico in corrispondenza del quale si e' osservato il primo inizio di sfilamento di un qualsiasi cavo;
- $P_u$  = carico massimo misurato;
- $M_{sf}, \mu$  = momenti flettenti valutati nella sezione direttamente caricata in corrispondenza di  $P_{sf}$  e  $P_u$ , tenendo conto del peso proprio della soletta.

Dalle tabelle si puo' constatare che in molti casi  $P_{sf}$  coincide o e' molto prossimo a  $P_u$ . Il comportamento delle solette dopo aver raggiunto  $P_u$  e' stato piuttosto variabile; nella maggior parte dei casi il carico ha subito un brusco decremento conservando valori residui compresi tra il 40%-70% del carico ultimo. In un solo caso il carico e' sceso a valori prossimi a zero, dopo aver raggiunto  $P_u$ . Il carico massimo ( $P_u$ ) ha mostrato la tendenza a crescere con l'aumento della distanza dell'appoggio ( $s$ ) dalla testata della soletta.

### 5.2 Valutazione del limite inferiore della resistenza di taglio-trazione e taglio-compressione

La valutazione teorica della resistenza ultima per taglio-trazione e per taglio-compressione puo' essere effettuata mediante le seguenti espressioni (III), (V), distinte a seconda del tipo di calcestruzzo:

Calcestruzzo normale:

taglio-trazione

$$V_{ul} = 0.75 \frac{l b_w}{S} \sqrt{f_{ct}^2 + \alpha \sigma_{cp} f_{ct}} \quad (1)$$

taglio-compressione



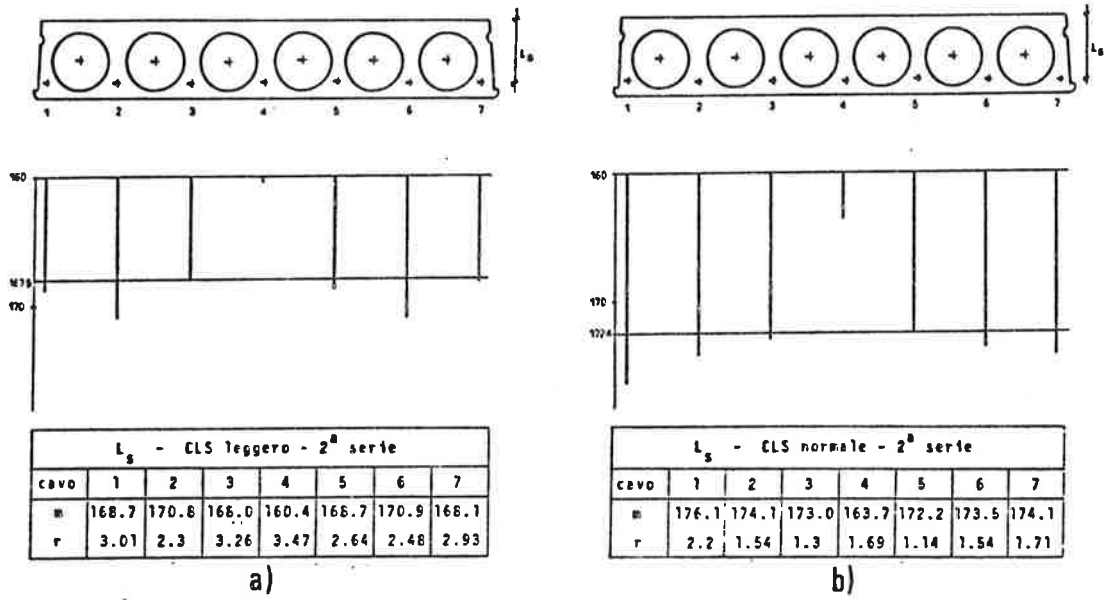


Fig. 5

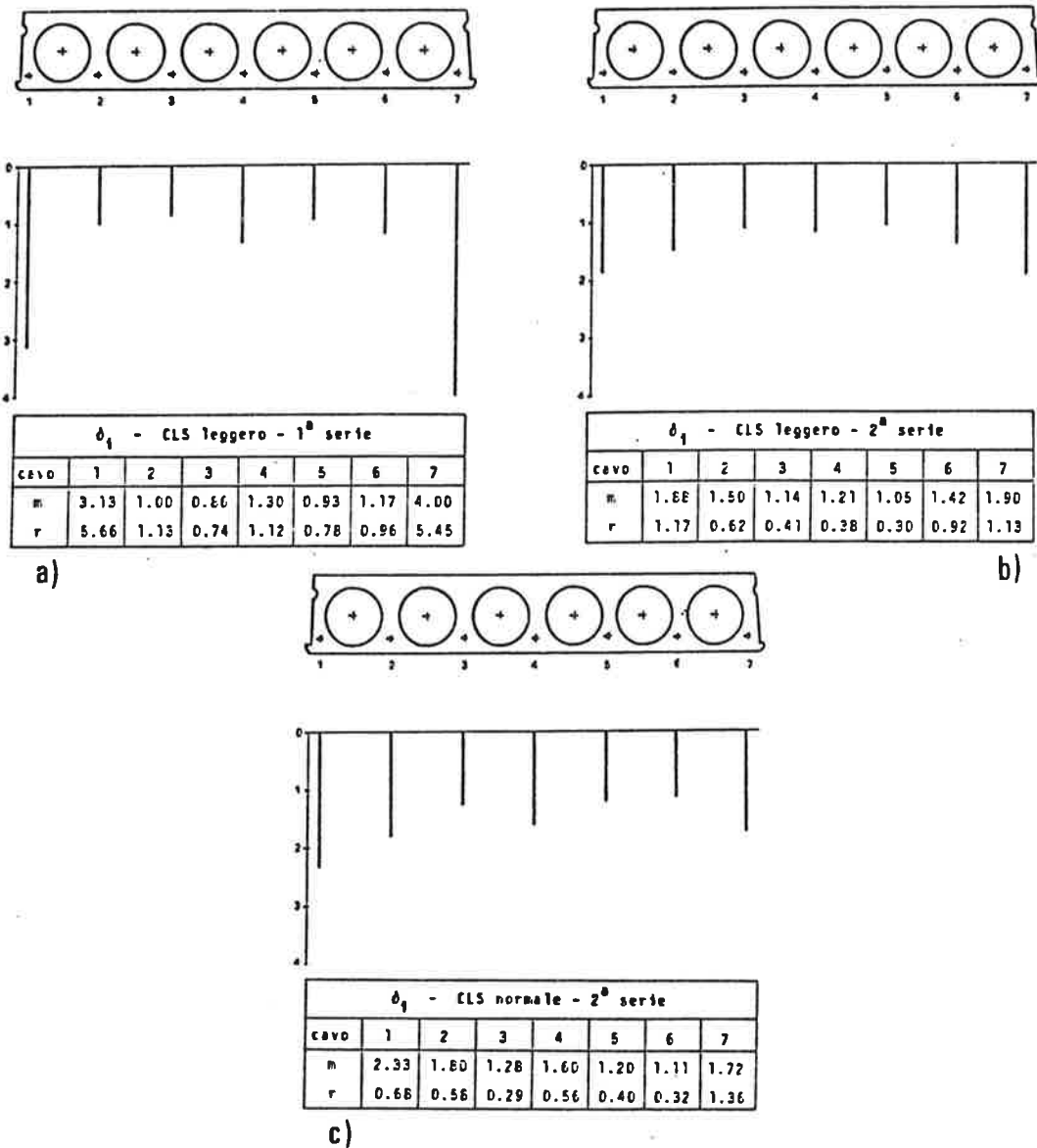


Fig. 6

	CLS LEGGERO 1 <sup>a</sup> serie	2 <sup>a</sup> serie	CLS NORMALE
resistenza a compressione cilindrica media	40 (N/mm <sup>2</sup> )	36.31 (N/mm <sup>2</sup> )	59.43 (N/mm <sup>2</sup> )
resistenza a trazione per fenditura media	2.4 (N/mm <sup>2</sup> )	4.05 (N/mm <sup>2</sup> )	5.85 (N/mm <sup>2</sup> )
peso dell'unità di volume	18 (kN/m <sup>3</sup> )	17.43 (kN/m <sup>3</sup> )	23.48 (kN/m <sup>3</sup> )

Tab. 6

Campione	a/h	$\delta_m$ (mm)	$P_{sf}$ (kN)	$M_{sf}$ (kN m)	$P_u$ (kN)	$M_u$ (kN m)
1a	2*	0.30	184.75	63.5	196.00	67.4
2a	3*	0.91	119.50	56.5	132.00	62.3
3a	4*	0.86	83.25	47.8	112.75	64.1
4a	4*	0.97	115.75	65.8	136.25	77.1
5a	3*	1.03	146.50	69.0	146.50	69.0
6a	3	0.76	93.75	45.7	97.25	47.4
7a	3	0.66	125.25	60.6	138.50	66.8
8a	2	0.90	113.75	40.1	113.75	40.1
9a	2	0.63	116.00	40.9	116.00	40.9
10a	4	1.16	105.50	62.2	126.75	74.3
11a	4*	0.61	128.50	72.8	157.50	88.9
12a	2*	0.89	139.75	48.3	139.75	48.3
13a	2	1.53	97.50	34.6	97.50	34.6
19b	2	1.23	140.00	49.1	140.00	49.1
20b	2	1.61	116.00	40.9	116.00	40.9
21b	2	1.38	135.00	47.4	135.00	47.4
22b	3	1.00	118.25	57.2	118.25	57.2
24b	3	1.92	100.25	48.8	100.25	48.8
25b	3	0.98	164.00	78.8	176.00	84.5
29b	4	1.60	110.25	64.8	120.25	70.5
30b	4	1.26	114.50	67.2	114.50	67.2
31b	4	1.31	163.25	95.1	169.00	98.4

\* s = 150 mm

Tab. 7

Campione	a/h	$\delta_m$ (mm)	$P_{sf}$ (kN)	$M_{sf}$ (kNm)	$P_u$ (kN)	$M_u$ (kNm)
17b	2	1.61	148.25	52.3	148.25	52.3
18b	2	1.27	146.25	51.6	147.25	52.0
23b	3	1.61	138.25	67.2	169.50	81.9
26b	3	1.31	179.00	86.4	179.00	86.4
27b	4	1.25	140.25	82.6	195.25	114.0
28b	4	1.43	132.75	78.3	196.25	114.6

Tab. 8

$$V_{uII} = 0.068 db_w \xi (1 + 0.5 \rho_o) \sqrt{f_c} + M_o / (M/V) \quad (2)$$

Calcestruzzo leggero:  
taglio-trazione

$$V_{uI} = 0.65 \frac{I b_w}{S} \sqrt{f_{ct}^2 + \alpha \sigma_{cp} f_{ct}} \quad (3)$$

taglio-compressione

$$V_{uII} = 0.05 db_w \xi (1 + 0.5 \rho_o) \sqrt{f_c} + M_o / (M/V) \quad (4)$$

Per la simbologia si rimanda ai riferimenti (III), (V).

Il confronto dei risultati sperimentali con i valori di previsione  $V_{uI}$  e  $V_{uII}$ , deducibili, a seconda del tipo di calcestruzzo, dalle (1) e (2) o dalle (3) e (4), mostra che in buona parte dei casi la valutazione teorica e' conservativa, particolarmente se si assume il minimo tra i due valori calcolati (fig.7).

Se peraltro si assume la formula della taglio-compressione (2) e (4) come unica base della stima del taglio ultimo, si ottiene un andamento del rapporto  $V_{u,exp}/V_{uII}$  non indipendente dalla posizione del carico. Cio' risulta evidente dalle figg. 8a e 8b, in cui sono raccolti sia i risultati delle prove qui descritte, individuabili in corrispondenza di  $a/h=2,3,4$ , che quelli di prove analoghe riportati in (V). Una correzione di tale effetto si puo' ottenere riformulando le espressioni (2) e (4) come segue:

Calcestruzzo normale

$$V_{uII} = 0.1 db_w \xi (1 + 0.5 \rho_o) \sqrt{f_c} + 0.4 M_o / (M/V) \quad (5)$$

Calcestruzzo leggero

$$V_{uII} = 0.1 db_w \xi (1 + 0.5 \rho_o) \sqrt{f_c} + 0.3 M_o / (M/V) \quad (6)$$

sulla base delle quali, la distribuzione dei valori  $V_{u,exp}/V_{uII}$  suddetti risulta come illustrato nelle figg. 9a e 9b.

La deduzione dei nuovi coefficienti e' stata fatta utilizzando tecniche di regressione lineare, in modo sia da rendere significativamente nulla la dipendenza di  $V_{u,exp}/V_{uII}$  da  $a/h$ , che da produrre una stima del limite inferiore della resistenza a taglio, che sia valore caratteristico relativamente ai dati sperimentali utilizzati.

### 5.3 Prove a flessione

Lo scopo principale delle prove e' stato quello di investigare quale effetto potessero avere sulla capacita' portante, i carichi concentrati, applicati entro la lunghezza di aderenza flessionale.

Prima di descrivere le prove e' pero' opportuno premettere alcune definizioni relative al problema dell'ancoraggio dei cavi pretesi.

La lunghezza necessaria per sviluppare pienamente la forza di precompressione e' indicata con il termine "lunghezza di trasferimento" ( $l_t$ ). La distanza dall'estremita' della soletta, al di la' della quale e' possibile raggiungere la tensione ultima dell'acciaio senza che venga perturbato l'equilibrio viene chiamata "lunghezza di sviluppo" ( $l_d$ ). Infine la lunghezza compresa tra  $l_t$  ed  $l_d$  e' detta "lunghezza di aderenza flessionale" ed al suo interno, in corrispondenza di ciascuna sezione, e' possibile determinare l'incremento critico di tensione nell'acciaio, cioe' quell'aumento di tensione capace di creare lo sfilamento delle armature.

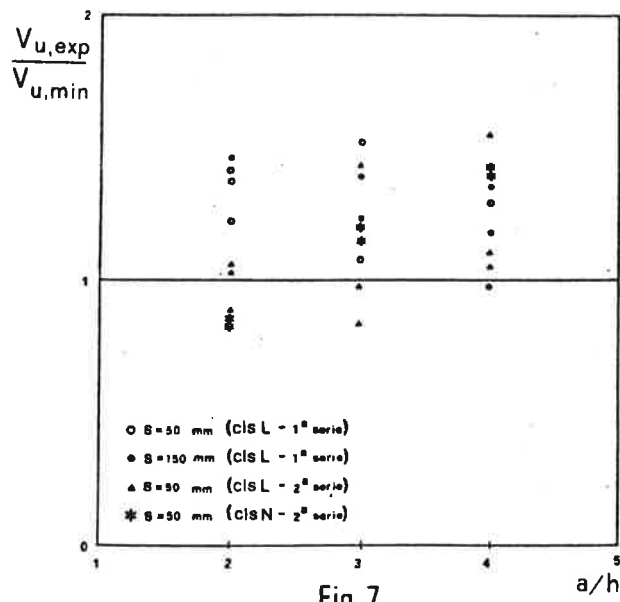


Fig. 7

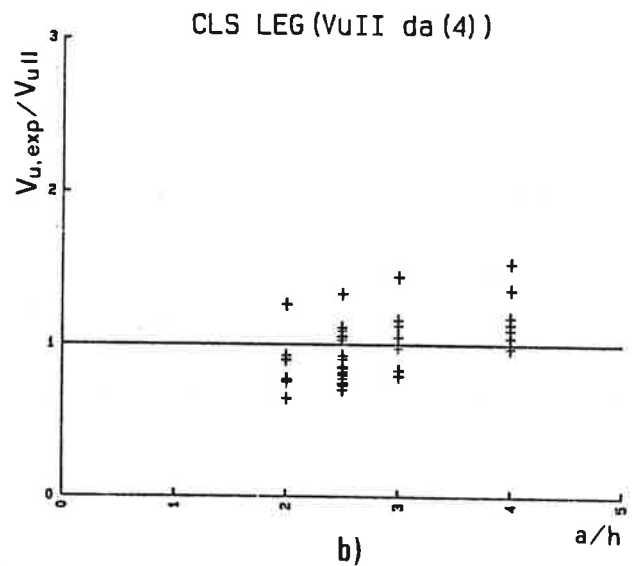
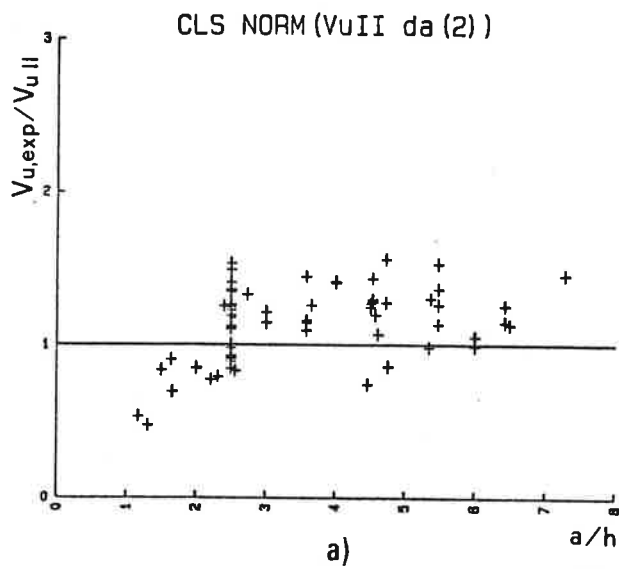


Fig. 8

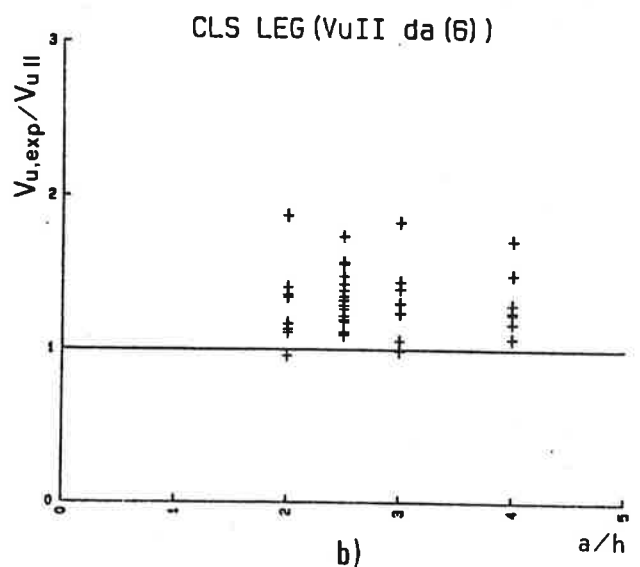
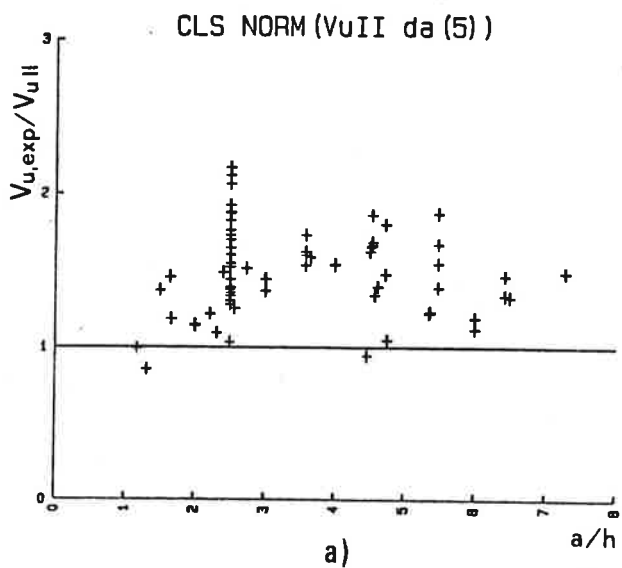


Fig. 9

Le prove sono state condotte secondo gli schemi illustrati nelle tab.2,4,5. Le grandezze rilevate sono sintetizzate nelle tab.9 (cls leggero) e tab.10 (cls normale), nelle quali:

$\delta_m$  = valore medio del rientro iniziale delle estremità dei trefoli di ciascuna soletta;  
Pcr = carico di fessurazione;  
Psf = carico di sfilamento, individuato come il carico in corrispondenza del quale si è osservato il primo inizio di sfilamento di un qualsiasi cavo;  
P = carico massimo raggiunto durante le prove;  
fmax = freccia massima nella sezione di mezzeria;  
fr = freccia residua nella sezione di mezzeria;  
Mcr, Msf, M = valore medio del rientro iniziale delle estremità dei trefoli di ciascuna soletta.

Il carico massimo (P) non può essere sempre inteso come il carico ultimo a flessione, infatti in alcuni casi la prova è stata interrotta in corrispondenza di un elevato valore di fmax, allorché l'andamento del diagramma carico-abbassamento era pressoché orizzontale; in altri casi sono stati osservati sfilamenti nei cavi tali da consigliare, per motivi di sicurezza, l'interruzione della prova. Dall'osservazione delle tab.9 e 10 risulta che il carico di fessurazione è stato sempre minore di quello di sfilamento, tranne che nel campione 7b, che peraltro presentava inizialmente il rientro medio dei trefoli più elevato tra tutte le solette di calcestruzzo normale. Il valore medio del rapporto Pcr/Psf per i campioni in calcestruzzo normale è risultato pari a 0.92 con dev.st. 0.16; per i campioni in calcestruzzo leggero invece esso è stato pari a 0.74 con dev.st. 0.07. È stato inoltre valutato, nei casi in cui era possibile, il valore medio del rapporto Psf/P, dove P è il carico ultimo a flessione rilevato.

Tale rapporto fornisce rispettivamente per i campioni in calcestruzzo leggero strutturale e per quelli in calcestruzzo normale i seguenti valori: v.m.=0.82 dev.st.=0.08, v.m.=0.79, dev.st.=0.06.

Nella fig.10 sono rappresentati alcuni diagrammi carico-abbassamento registrati in corrispondenza delle sezioni di mezzeria. Dall'esame di tali grafici emerge una sostanziale differenza tra gli elementi in calcestruzzo normale e quelli in calcestruzzo leggero per quanto riguarda il comportamento durante la fessurazione. Nei primi la fessurazione è individuabile, sul diagramma, dai ripetuti tratti ascendenti e discendenti, nei secondi la fessurazione è caratterizzata dal semplice cambiamento di pendenza della curva, con il carico tuttavia sempre crescente. Inoltre, durante le prove, nel caso del calcestruzzo leggero la fessurazione è risultata più regolare e distribuita, mentre negli elementi in calcestruzzo normale sono state rilevate poche lesioni, piuttosto aperte.

#### 5.4 Valutazione del limite inferiore della resistenza a flessione in dipendenza dal rientro iniziale dei cavi.

Nel codice ACI (318-83) è proposto un criterio (I), (V), (IX) per prevenire la rottura per sfilamento nel caso di precompressione a cavi aderenti; tale criterio consiste nella costruzione di una curva involuppo, che limita la tensione nei cavi. Metodi analoghi sono stati formulati da Martin-Scott (XIII) e Zia-Mostafa (XXI). Tuttavia bisogna notare che questi criteri sono basati su dati sperimentali ottenuti da elementi strutturali in calcestruzzo normale; pertanto non si ritiene sicura una loro diretta applicazione al caso del calcestruzzo leggero strutturale.

Camp.	a/h	$\delta_m$ (mm)	$P_{cr}$ (kN)	$P_{sf}$ (kN)	P (kN)	$f_{max}$ (mm)	$f_r$ (mm)	$M_{cr}$ (kNm)	$M_{sf}$ (kNm)	M (kNm)
14a	7.25	1.94	38.57	55.25	65.88	113.60	26.12	61.1	84.8	100.7
15a	7.25	2.66	34.00	51.25	64.50	118.70	32.30	54.5	79.0	98.7
16a	7.25	0.93	29.44	36.32	58.13	113.22	37.00	47.9	57.3	89.5
17a	7.25	2.39	37.44	53.50	62.75	109.06	20.00	59.5	82.3	96.2
18a	5.50	1.76	45.57	69.94	82.50	105.76	21.78	55.3	80.9	95.9
19a	5.50	1.87	47.00	71.38	77.53	78.86	13.12	56.9	82.5	90.5
20a	5.50	1.36	50.75	68.88	83.96	93.30	-	61.0	79.8	97.2
21a	5.50	1.98	46.94	63.19	71.57	66.00	-	56.8	73.5	83.9
22a	5.50	2.31	44.38	63.19	70.82	55.60	-	54.0	73.5	83.1
23a	9.25	2.83	24.50	-	44.25	114.68	11.80	54.9	-	91.4
24a	9.25	3.91	27.25	39.19	42.25	121.32	14.40	59.9	80.9	87.7
2b	9.25	1.96	32.57	37.75	53.13	211.34	59.06	69.5	77.9	107.5
3b	9.25	2.11	25.88	35.69	51.69	195.96	53.30	57.1	74.1	104.9
4b	5.50	1.64	58.69	64.50	84.32	63.26	11.70	69.6	74.8	97.8
5b	5.50	1.37	57.82	77.25	92.38	135.28	93.08	68.1	88.9	106.6
9b	5.50	1.31	55.88	71.75	90.00	79.22	13.26	66.5	82.8	104.0
10b	7.25	1.44	43.69	63.25	69.00	100.82	23.52	68.4	96.2	105.1
11b	7.25	1.42	45.57	60.07	69.32	100.38	20.52	71.1	91.6	105.5
12b	7.25	1.22	46.88	58.69	72.19	96.82	20.62	73.0	89.6	109.7

Tab. 9

Camp.	a/h	$\delta_m$ (mm)	$P_{cr}$ (kN)	$P_{sf}$ (kN)	P (kN)	$f_{max}$ (mm)	$f_r$ (mm)	$M_{cr}$ (kNm)	$M_{sf}$ (kNm)	M (kNm)
1b	9.25	1.69	36.80	50.75	59.63	223.10	-	80.5	104.8	122.8
7b	5.50	2.24	64.75	56.38	67.38	24.78	3.52	78.0	67.2	80.9
8b	5.50	1.64	67.57	69.13	85.25	48.36	8.18	81.1	81.3	100.5
14b	7.25	1.45	55.50	62.82	77.63	101.06	31.30	87.2	97.2	119.3
16b	7.25	1.56	49.44	57.82	75.50	100.96	27.64	78.5	89.9	116.2

Tab. 10

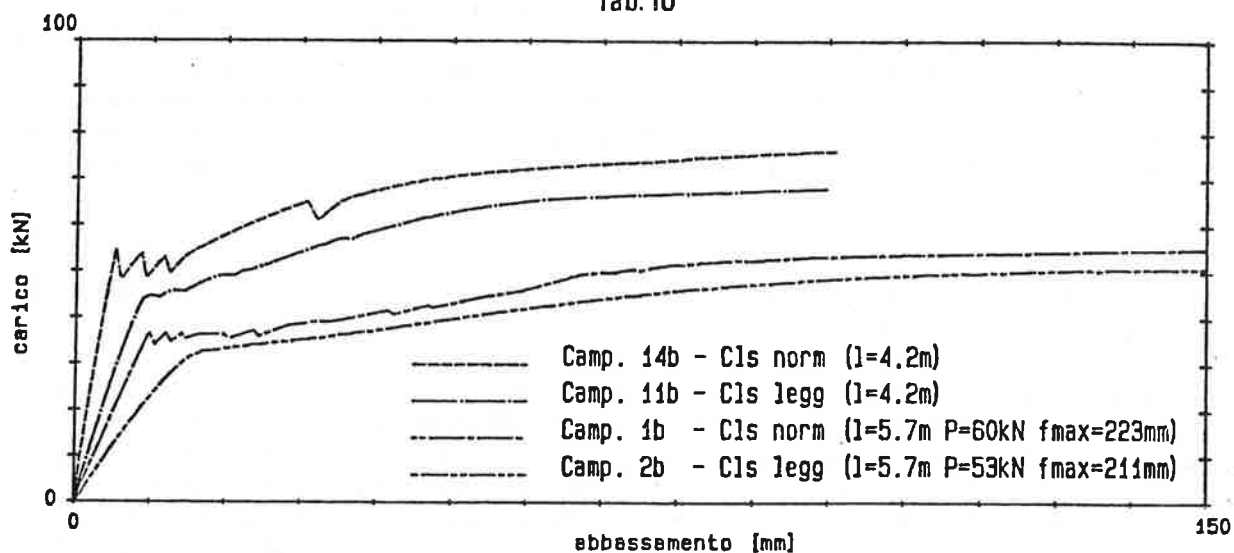


Fig. 10

Relativamente ai campioni in calcestruzzo leggero provati a flessione, e' stato quindi seguito un approccio differente. I valori del rapporto  $M_u/M_{u,th}$ , tra il momento ultimo riscontrato in prova ed il momento ultimo teorico, hanno mostrato una sensibile correlazione con il valor medio dei rientri  $\delta_m$ . E' stato quindi possibile, adottando tecniche di regressione lineare (fig.11), ricavare il legame  $M_u/M_{u,th}=1-0.054 \delta_m$ .

Il momento  $M_{u,th}$  e' il valore ultimo calcolato in base ai valori medi delle resistenze dei materiali. Adottando valori di calcolo, cosi' da valutare il momento  $M_{u,d}$ , la relazione precedente si puo' usare per stimare il valore  $M'_{u,d}$ , corretto in funzione di  $\delta_m$ :  $M'_{u,d}=(1-0.054 \delta_m)M_{u,d}$ .

In particolare, calcolato per i campioni esaminati, in base alla Normativa Italiana, il momento  $M_{u,d}=93kNm$ , relativamente alle luci adottate nelle prove, e nei casi limite  $\delta_m=0mm$  e  $\delta_m=3.91mm$  (valore massimo riscontrato tra i suddetti campioni), se ne deducono i seguenti carichi massimi di utilizzo  $P_e$ , al netto del peso proprio, in condizione di semplice appoggio:

	l=4.20m			l=5.70m		
	$\delta_m=0mm$	$\delta_m=3.91mm$	decr.	$\delta_m=0mm$	$\delta_m=3.91mm$	decr.
Pe[kN/m <sup>2</sup> ]	22	17	(23%)	11	9	(18%)

### 5.5 Prove cicliche

E' stata indagata l'influenza dei carichi ripetuti sull'aderenza, applicando a tre campioni dieci cicli di carico successivamente al raggiungimento di  $P_{sf}$ , prima di proseguire la prova fino a rottura. Le tre solette esaminate sono state caricate secondo lo schema di tab.5 ed i carichi ripetuti sono stati di livello pari a quello che aveva provocato il primo sfilamento dei cavi. Nelle figure 12a e 13a sono rappresentati gli andamenti delle curve carico-abbassamento in corrispondenza delle sezioni di mezzeria. Le figure 12b e 13b illustrano invece il progredire degli sfilamenti all'estremita' dei cavi durante le prove cicliche.

Sebbene il numero dei campioni sia esiguo, si possono fare ugualmente alcune considerazioni:

- i cavi che per primi hanno perso aderenza non sempre erano quelli che avevano il rientro iniziale piu' elevato;
- i cicli di carico e scarico hanno provocato incrementi di scorrimento nei cavi;
- le deformazioni residue allo scarico, non hanno subito nei cicli successivi al primo aumenti significativi;
- l'applicazione dei dieci cicli di carico non ha influenzato il valore del carico massimo raggiunto durante le prove, anzi nel caso delle due solette in calcestruzzo leggero, esso e' risultato, a parita' di deformazione, superiore al valore medio ottenuto dagli altri campioni sottoposti alla stessa condizione di carico pero' con andamento monotono.

### 6. CONCLUSIONI

E' stata effettuata una ampia indagine sperimentale sul comportamento a taglio e a flessione, con particolare riguardo ai problemi di aderenza, di 55 solette precomprese di tipo SPIROLL, la maggior parte realizzate in calcestruzzo leggero strutturale e alcune in calcestruzzo normale.

I risultati sperimentali e le relative elaborazioni consentono di trarre le seguenti conclusioni:

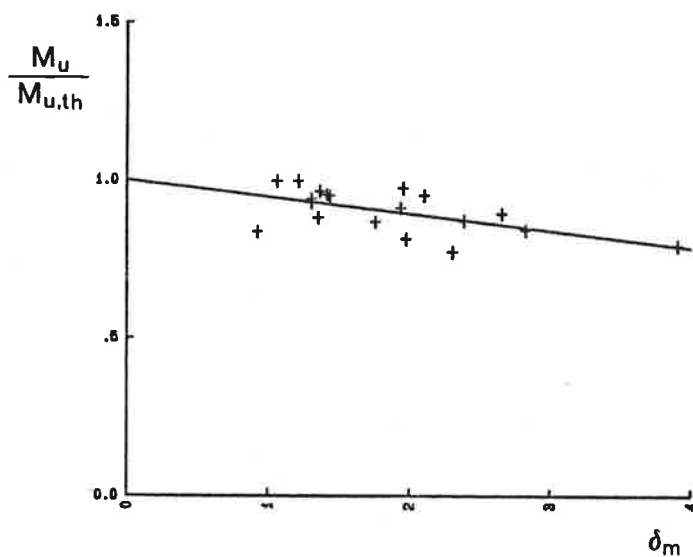


Fig. 11

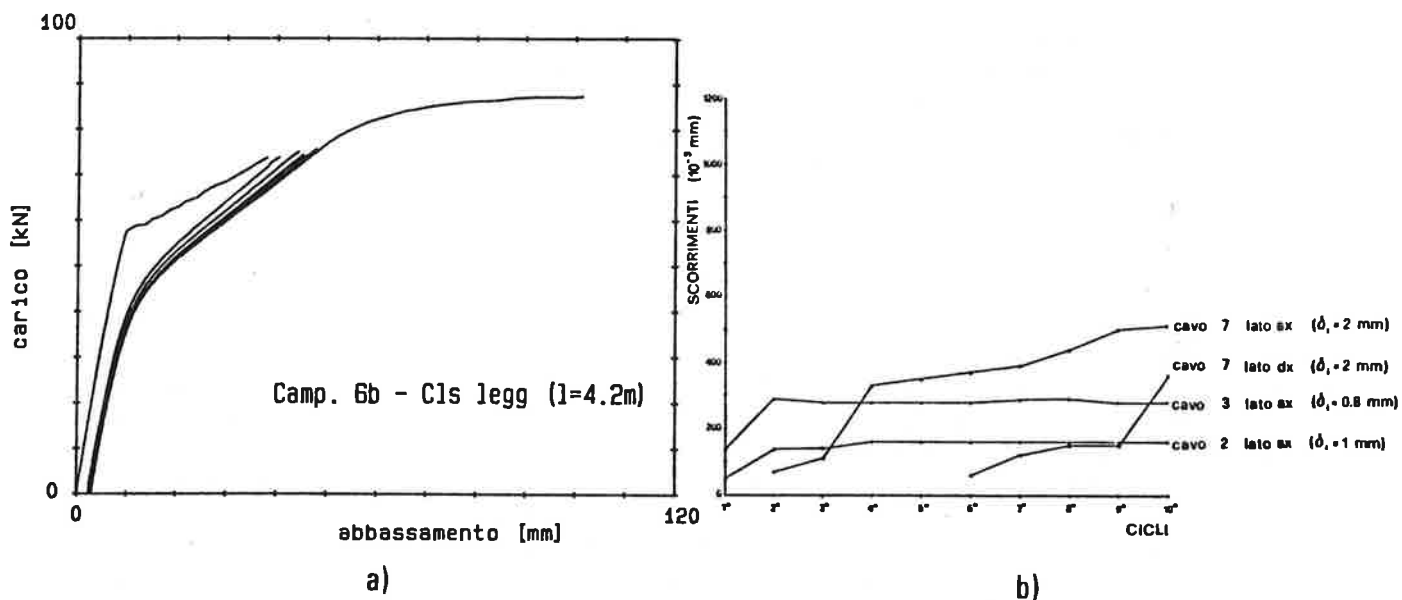


Fig. 12

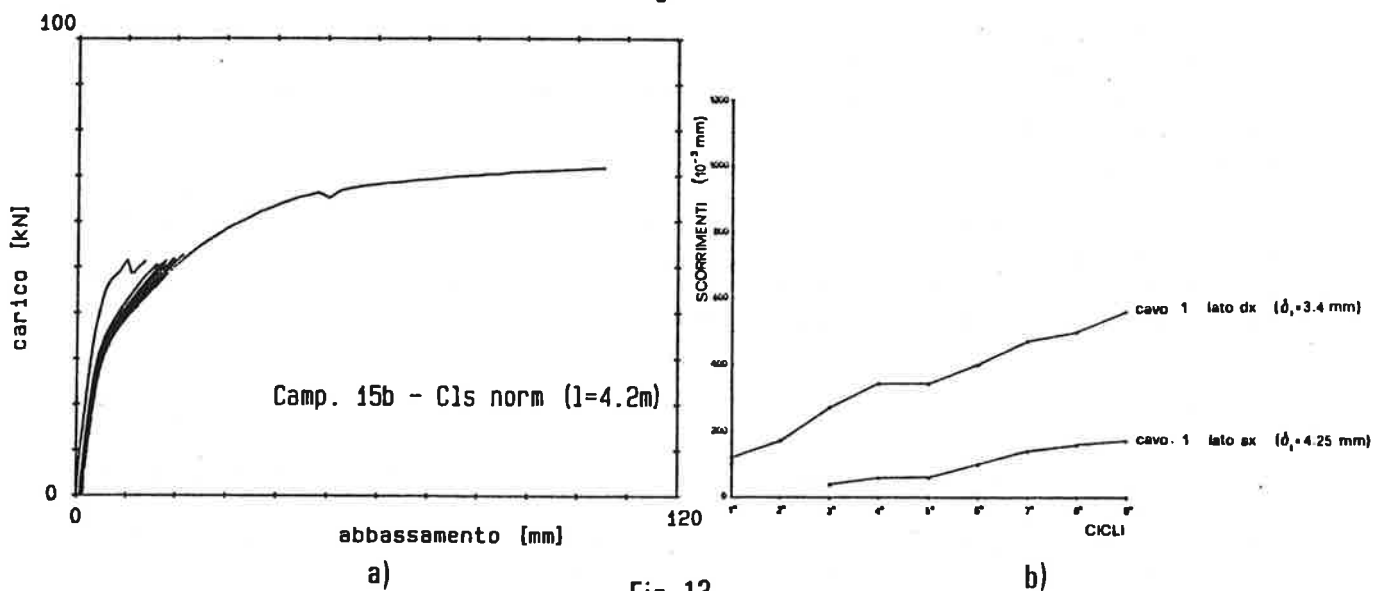


Fig. 13



- I valori sperimentali, per quanto concerne le prove di resistenza a taglio, sono risultati nella maggior parte dei casi superiori alle previsioni teoriche fornite dalle relazioni (1), (2), (3), (4) che consentono, dunque, una stima conservativa della capacita' portante a taglio. Assumendo le relazioni della taglio-compressione (2) e (4) come uniche basi della previsione della resistenza e riformulandole opportunamente, si ottiene una stima della resistenza a taglio piu' aderente ai risultati sperimentali sia per i campioni in calcestruzzo leggero, che per quelli in calcestruzzo normale.
- Il carico di sfilamento per i cavi, durante le prove a taglio, e' risultato coincidente o comunque molto prossimo al carico massimo raggiunto.
- Dopo la rottura a taglio i campioni hanno conservato una resistenza residua compresa tra il 40% ed 70% del carico massimo raggiunto.
- La resistenza a taglio ha mostrato un incremento all'aumentare della distanza dell'appoggio dalla testata della soletta.
- Riguardo la resistenza a flessione, nel caso delle solette in calcestruzzo leggero, che costituivano la popolazione piu' numerosa, e' stata trovata una sensibile correlazione tra il rientro medio dei cavi di ciascun campione ed il valore del momento flettente ultimo sperimentale. Utilizzando le tecniche di regressione lineare e' stata messa a punto una relazione che fornisce la resistenza a flessione, al variare del rientro iniziale medio dei cavi.
- In tutte le solette (leggere e normali) e' stato riscontrato un significativo aumento di carico, oltre il livello in corrispondenza del quale aveva avuto inizio lo sfilamento dei cavi.
- Le sollecitazioni cicliche hanno provocato incrementi di scorrimento nei cavi, ma non hanno influenzato il valore del carico massimo raggiunto durante le prove.

#### RINGRAZIAMENTO

I materiali ed i campioni utilizzati sono stati gentilmente forniti dalla S.M.A.E. (Roma) e dalla VIBROSUD (S.Salvo-CH).

Gli autori esprimono il piu' vivo apprezzamento agli Ingg. Anna L. Corti, Patrizia De Iulis e Anna M. Mucciante, per la preziosa collaborazione prestata durante la sperimentazione ed elaborazione dei dati.

#### BIBLIOGRAFIA

- I) Anderson A.R., Anderson R.G.: "An assurance criterion for flexural bond in pretensioned hollow core units". ACI Journal, Vol. 73, No. 8, August 1976, pp.457-464.
- II) Becker R., Buettner D.R.: "Shear tests of extruded hollow core slabs". PCI Journal, Vol. 30, No. 2, March-April 1985, pp. 40-54.
- III) CEB Bulletin d'Information, No. 126, "Shear and Torsion", Juin 1978, Paris.
- IV) Corti A.L., De Iulis P., Mucciante A.M.: "Sulla capacita' portante delle solette forate precomprese: analisi teorico-sperimentale". Tesi di Laurea, 17 Dicembre 1986, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facolta' di Ingegneria, Universita' dell'Aquila.
- V) FIP Technical Report: "Design principles for hollow core slabs regarding shear and transverse load bearing capacity, splitting and quality control". FIP, 9/10 October 1982, Wexham Springs Slough SL3 6PL.
- VI) Galeota D., Giammatteo M.M., Grillo F.: "Comportamento a taglio di lastre estruse precomprese in calcestruzzo leggero. Sperimentazione ed analisi dei risultati". Giornate A.I.C.A.P. 1985, 2-4 Maggio 1985, Riva del Garda, pp.155-167.

- VII) Galeota D., Giammatteo M.M., Valente G.: "Non linear analysis of prestressed hollow core slabs by finite elements". 1st International Conference on Computer Applications in Concrete, 26-27 March 1986, Singapore, pp. 30-50.
- VIII) Galeota D., Giammatteo M.M.: "Results of tests on hollow core slabs with lightweight concrete". 18th Annual Conference of the International Spiroll Producers Association, 25-28 May 1986, Perugia, Italy.
- IX) Ghosh S.K., Fintel M.: "Development length of prestressing strands, including debonded strands, and allowable concrete stresses in pretensioned members". PCI Journal, Vol. 31, No. 5, September-October 1986, pp. 39-57.
- X) Huyghe G.F., Walraven J.C., Stroband J.: "Research on extruded prestressed concrete hollow core slabs". Stevin Report 5/80/2, Dept. of Civil Engineering, November 1980, Delft.
- XI) Levi F., Debernardi P.G.: "Prove di continuita' longitudinale di solai di tipo alveolare privi di cappa di completamento". La Prefabbricazione No. 4, Aprile 1986, pp. 221-236.
- XII) Lewicki B., Pereswiet-Soltan S.: "Pannelli alveolari precompressi. Calcolo della capacita' portante al taglio secondo le normative CEB/FIP e di diversi paesi. Parte I-II". La Prefabbricazione, No. 3-4, 1984, pp. 187-198, pp. 241-248.
- XIII) Martin L.D., Scott N.L.: "Development of prestressing strand in pretensioned members". ACI Journal, Vol. 73, No. 8, August 1976, pp. 453-456.
- XIV) Menegotto M., Morelli G.: "Prove di scorrimento su unioni longitudinali di solai prefabbricati". Congresso CTE, 9-10-11 Novembre 1984, Firenze, Italy, pp. 151-163.
- XV) Moustafa S.E.: "Effectiveness of shear-friction reinforcement in shear diaphragm capacity of hollow core slabs". PCI Journal, Vol. 26, No. 1, January-February 1981, pp. 118-132.
- XVI) Uijl J.A.: "Tensile stresses in the transmission zones of hollow core slabs prestressed with pretensioned strands". Stevin Report 5/83/10, Dept. of Civil Engineering, Sept. 1983, Delft.
- XVII) Van Acker A.: "Intermediate Report on FIP design methods for hollow core slabs". FIP/CPCI Symposia, August 25-31 1984, Calgary, pp. 25-33.
- XVIII) Van Acker A.: "Design of prestressed hollow core slabs and slab field". Tenth International Congress of the FIP, February 16-20 1986, New Delhi, pp. 97-101.
- XIX) Walraven J.C., Mercx W.P.M.: "The bearing capacity for prestressed hollow core slabs". Heron, Vol. 28, No. 3, 1983, Delft.
- XX) Walraven J.C.: "Shear design for hollow core slabs". FIP/CPCI Symposia, August 25-31 1984, Calgary, pp. 34-40.
- XXI) Zia P., Mostafa T.: "Development length of prestressing strands". PCI Journal, Vol. 22, No. 5, September-October 1977, pp. 54-65.

GRAFICI PER L'ANALISI ELASTOVISCOSA DI STRUTTURE SOGGETTE  
AL CAMBIAMENTO DI SCHEMA STATICO

Giovanni MENDITTO<sup>(1)</sup>

Luigino DEZI<sup>(2)</sup>

A. Marcello TARANTINO<sup>(3)</sup>

- (1) Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni - Università degli Studi di Ancona.
- (2) Ricercatore Confermato - Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - Università degli Studi di Ancona.
- (3) Ingegnere Civile - Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - Università degli Studi di Ancona.

SOMMARIO

La soluzione di strutture elastoviscose soggette al cambiamento di schema statico è nel caso più generale affine alla soluzione elastica mediante una funzione integrale, dipendente dagli istanti di applicazione del carico, di cambiamento di schema statico e di lettura. Tale funzione viene rappresentata impiegando le procedure numeriche del Metodo Generale; i risultati vengono inoltre confrontati con quelli ricavati dall'applicazione di alcuni metodi semplificati.

SUMMARY

Generally the solution of the viscoelastic structural system is proportional to elastic solution by the integral function, which depends from: the instant of the load application, the instant of the change of the static system, and the reference time. In this work the integral function is obtained from the General Numerical Method step by step procedures; these numerical results are compared with those obtained from the application of some simplified methods.

1. PREMESSA

Nella realizzazione di medie e grandi strutture in conglomerato cementizio con armatura lenta o presollecitata (impalcato da ponte, solai industriali, ecc.) sono ormai diffuse tecniche costruttive che ricorrono alla prefabbricazione di componenti solidarizzati in opera con cavi e/o con getti integrativi di calcestruzzo.

In ogni caso si è in presenza di una variazione dell'assetto strutturale, da una configurazione iniziale ad una finale, con aumento del grado di iperstaticità. Il che comporta un'analisi degli schemi statici durante l'evoluzione costruttiva, tenendo presenti come elementi fondamentali i tempi di costruzione e di applicazione delle azioni, dai quali dipende la risposta del conglomerato per le sue caratteristiche elastoviscose.

Lo stato tensionale e deformativo, che si instaura per effetto dei carichi di lunga durata in una struttura realizzata per fasi successive è chiaramente diverso da quello che si avrebbe nella stessa struttura realizzata in un'unica fase (così detto "regime principale" o "canonico").

Le proprietà viscosi del materiale tendono a riportare lo stato di sollecitazione di una struttura a "fasi" verso quello dello schema statico finale, in modo tanto più efficace quanto più giovani risultano i conglomerati costituenti gli elementi da unire ("Principio del riacquisto del regime principale"). Al limite, nel caso che l'unione avvenga a conglomerati ancora freschi, la costruzione risulta un insieme monolitico sin dall'inizio.

Il problema affrontato nelle ipotesi usuali di viscosità lineare e validità del principio di sovrapposizione conduce alla scrittura di un sistema di equazioni integrali di Volterra nelle incognite reazioni sovrabbondanti, agevolmente disaccoppiabile in presenza di strutture omogenee a vincoli rigidi. In tal caso, com'è noto, la soluzione è affine a quella elastica tramite la funzione integrale  $\xi(t, t_0, t_1)$  che tiene conto degli effetti viscosi (III).

Nella presente nota vengono determinati i valori di queste funzioni integrali con l'impiego delle procedure numeriche del Metodo Generale (I), (II), (III), (IV) pervenendo al tracciamento di grafici di pronto impiego in funzione dei principali parametri in gioco e dell'istante di applicazione dei carichi ( $t_0$ ). Le curve, consegnate nei grafici, una per ogni istante di cambiamento dello schema statico ( $t_1$ ), forniscono i valori della funzione  $\xi$  ad un qualsiasi istante di lettura ( $t$ ), consentendo la soluzione immediata del problema una volta nota la soluzione elastica associata. L'impiego dei grafici facilita, tra l'altro, la soluzione di particolari problemi connessi alla scelta di un opportuno istante di solidarizzazione al fine di ottimizzare lo stato di sollecitazione interno a fenomeno viscoso esaurito.

Si sono, altresì, valutate le funzioni  $\xi$  a mezzo del metodo  $\tilde{r}$ , che impiega una legge algebrica empirica per la funzione rilassamento (VIII), e del metodo ID (Improved Dischinger) (III), operativamente meno onerosi di quello generale al fine di valutare mediante confronti con le analoghe funzioni ottenute da quest'ultimo metodo il loro campo di applicabilità. Infine viene mostrata la scarsa attendibilità per il problema in esame dei metodi algebrizzati (IX) che in molti problemi di viscosità e rilassamento forniscono risultati soddisfacenti.

## 2. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Si considerano strutture omogenee a vincoli rigidi, per la validità dei principi di elastoviscosità lineare, soggette al cambiamento dello schema statico all'istante  $t_1$ , dopo l'applicazione di azioni statiche costanti nel tempo all'istante  $t_0$ . Si farà riferimento a strutture che passano da uno schema statico iniziale con  $k$  vincoli sovrabbondanti (sistema 1) ad uno schema statico finale con  $m > k$  vincoli (sistema 2), mediante l'introduzione contemporanea di  $(m-k)$  vin-

coli all'istante  $t_1$ .

La soluzione è ottenuta col metodo delle forze nell'ipotesi di viscosità lineare (III).

Le equazioni di compatibilità, che costituiscono un sistema di  $(m-k)$  equazioni integrali di Volterra, assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} & (a_{j0} + \sum_1^k a_{jh} X_h^{el,1}) E_c(t_0) \{ \phi(t, t_0) - \phi(t_1, t_0) \} = \\ & - E_c(t_0) \sum_{k+1}^m a_{j\ell} \int_{t_1}^t \phi(t, \tau) dX_\ell(\tau) \end{aligned} \quad (1)$$

$(j = k+1, \dots, m) ; (t \geq t_1)$

dove si è indicato con:

- $a_{j0}$  - lo spostamento elastico della sezione  $j$  nella direzione di  $X_j$ , dovuto ai carichi permanenti nello schema statico principale, valutato con modulo elastico  $E_c(t_0)$ ;
- $a_{jh}$  - lo spostamento elastico della sezione  $j$  nella direzione di  $X_j$ , dovuto a una forza unitaria diretta come  $X_h^{el,1}$ , nello schema statico principale, valutato con modulo elastico  $E_c(t_0)$ ;
- $X_h^{el,1}$  -  $h$ -esima reazione elastica sovrabbondante valutata nello schema statico iniziale;
- $E_c(t_0)$  - modulo di Young del calcestruzzo all'istante  $t_0$ ;
- $\phi(t, t_0)$  - funzione di viscosità, definita come la deformazione all'istante  $t$  causata da una tensione unitaria applicata all'istante  $t_0$ .

In questo caso, tale sistema può essere facilmente disaccoppiato e ricondotto a  $(m-k)$  equazioni integrali di Volterra nella singola funzione incognita  $X_j(t)$ .

Le reazioni sovrabbondanti  $X_j(t)$  indotte dalla viscosità nei vincoli aggiuntivi, producono le variazioni  $\Delta X_i^j(t)$  delle reazioni nei vincoli preesistenti, che in accordo al 1° principio di elastoviscosità lineare, possono essere valutate elasticamente.

In definitiva al generico istante  $t \geq t_1$ , si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} X_i(t) &= X_i^{el,1} + \Delta X_i^{el} \xi(t, t_0, t_1) \\ & \text{(reazione nei vincoli preesistenti)} \\ X_j(t) &= X_j^{el,2} \xi(t, t_0, t_1) \\ & \text{(reazione nei vincoli posticipati)} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$(i = 1, 2, \dots, k) ; (j = k + 1, \dots, m)$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \Delta X_i^{el} &= X_i^{el,2} - X_i^{el,1} \\ \xi(t, t_0, t_1) &= \int_{t_1}^t r(t, \tau) d\phi(\tau, t_0) ; \end{aligned} \quad (3)$$

dove  $X_j^{el,2}$  indica la reazione elastica sovrabbondante al  $j$ -esimo vincolo posticipati

pato, nello schema statico finale, mentre  $r(t, \tau)$  è la funzione di rilassamento (tensione al tempo  $t$  causata da una deformazione unitaria costante applicata all'istante  $\tau$ ).

La funzione  $\xi$ , che assume valori sempre minori dell'unità, moltiplica la differenza tra la distribuzione di tensione secondo lo schema statico finale ( $m$  vincoli) e la distribuzione di tensione secondo lo schema statico iniziale ( $k < m$  vincoli), qualora il carico sia applicato all'istante  $t_0$  e i vincoli posticipati siano introdotti all'istante  $t_1$ .

Nel caso particolare in cui  $t_1 = t_0^+$ , utilizzando la relazione che sussiste fra funzione di viscosità e funzione di rilassamento ("legame integrale"), si ha:

$$\int_{t_0^+}^t r(t, \tau) d\phi(\tau, t_0) = 1 - \frac{r(t, t_0)}{E_c(t_0)}$$

Pertanto nel caso in cui l'istante di cambiamento di schema statico coincide con l'istante immediatamente successivo all'applicazione dei carichi, consentendo la sola deformazione elastica istantanea, la funzione integrale  $\xi$  assume la seguente forma semplificata (VI), (V), (X):

$$\xi(t, t_0, t_0) = 1 - r(t, t_0)/E_c(t_0) \quad (4)$$

E' evidente che risulta sempre:

$$\xi(t, t_0, t_1) < \xi(t, t_0, t_0)$$

essendo  $t_1 > t_0$ .

Il problema è ricondotto alla determinazione della funzione integrale  $\xi(t, t_0, t_1)$ .

### 3. DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE INTEGRALE $\xi(t, t_0, t_1)$ .

Per la determinazione della funzione integrale  $\xi$  occorre prima valutare la funzione di rilassamento  $r(t, t_0)$  ed effettuare poi il calcolo dell'integrale.

La definizione delle proprietà elastoviscose del materiale mediante la funzione di rilassamento con diretto riferimento alle prove sperimentali è in genere difficoltosa, per le inerenti complicazioni nella misura delle tensioni sotto uno stato di deformazione costante nel tempo.

Si ricorre allora, com'è noto, all' "inversione" della funzione di viscosità, che si presenta di più facile determinazione sperimentale, risolvendo l'equazione integrale di Volterra non omogenea:

$$1 = E_c(t_0) \phi(t, t_0) + \int_{t_0^+}^t \phi(t, \tau) d\tau(\tau, t_0) \quad (5)$$

La soluzione della (5), impiegando le procedure numeriche di step - by - step del Metodo Generale, è fornita dalla (III):

$$r(t_k, t_0) = \sum_{i=1}^k \Delta r(t_i, t_0) \quad (6)$$

con

$t_k$  = istante di lettura

$t_0$  = istante di applicazione del carico

$$\Delta r(t_1, t_0) = 1/\phi(t_0, t_0) = E_C(t_0) \quad (t_1 = t_0)$$

$$\Delta r(t_k, t_0) = - \frac{1}{\phi(t_k, t_k) + \phi(t_k, t_{k-1})} \sum_{i=1}^{k-1} \Delta r(t_i, t_0) \{ \phi(t_k, t_i) + \\ + \phi(t_k, t_{i-1}) - \phi(t_{k-1}, t_i) - \phi(t_{k-1}, t_{i-1}) \}$$

Nota la funzione di rilassamento, per la determinazione di  $\xi(t, t_0, t_1)$ , occorre calcolare l'integrale (3), approssimabile (regola del trapezio), dalla:

$$\xi(t, t_0, t_1) = \int_{t_1}^t r(t, \tau) d\phi(\tau, t_0) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k \{ r(t_k, t_j) + r(t_k, t_{j-1}) \} \cdot \\ \cdot \{ \phi(t_j, t_0) - \phi(t_{j-1}, t_0) \} \quad (7)$$

Specializzando la (6) per il generico istante  $t_j$ , con  $\Delta r(t_j, t_j) = 1/\phi(t_j, t_j) = E_C(t_j)$ , ed introducendola nella (7) si ottiene l'algoritmo ricorrente per il calcolo dei valori della funzione integrale  $\xi(t, t_0, t_1)$  all'istante  $t$ .

L'intervallo temporale  $(t - t_1)$  è stato convenientemente discretizzato in intervalli parziali con la stessa legge <sup>(1)</sup> adottata per la (6).

In questo modo si sono tracciati i grafici della funzione integrale  $\xi(t, t_0, t_1)$  (Figg. 1÷24) che consentono l'immediata soluzione del problema del cambiamento dello schema statico di strutture omogenee, qualora i vincoli posticipati siano introdotti tutti contemporaneamente all'istante  $t_1$  ( $> t_0$ ), ed il carico permanente venga applicato all'istante  $t_0$ .

La funzione di viscosità adottata è quella fornita dal CEB-78 come funzione somma <sup>(2)</sup>.

L'onere computazionale derivante dall'applicazione del Metodo Generale può essere notevolmente ridotto facendo ricorso a metodi approssimati per la determinazione della funzione di rilassamento.

<sup>(1)</sup> L'intervallo temporale di riferimento viene suddiviso mediante  $k$  tempi intermedi (III):

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 0$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 0.05 \text{ giorni}$$

$$t_i/t_{i-1} = 1.15 \quad (i = 3, 4, \dots, k)$$

<sup>(2)</sup> Per le espressioni analitiche delle funzioni che compaiono nella funzione di viscosità del CEB-78 si rimanda all'App. D di (III).

In particolare si può impiegare la seguente formula empirica (VIII):

$$\tilde{r}(t, \tau) = \frac{1}{\Phi(t, \tau)} - \frac{0.115}{\Phi(t, t-1)} \left( \frac{\Phi(t^*, \tau)}{\Phi(t, t^*)} - 1 \right) \quad (8)$$

$$\text{con } t^* = \frac{t+\tau}{2}$$

che, con soddisfacente accuratezza, consente la determinazione diretta della funzione di rilassamento da una qualsiasi funzione di viscosità.

Sostituendo la (8) nella (7), con le stesse modalità del caso precedente, si determinano i valori della funzione integrale  $\xi_r$ .

Alternativamente si può impiegare il metodo del Dischinger migliorato, basato sulle semplificazioni della funzione di viscosità del CEB-78 che fornisce le seguenti funzioni di viscosità e di rilassamento (III):

$$\Phi_{ID}(t, \tau) = \frac{1}{E_{cf}} \{1 + \varphi_{ff} (\beta_f(t) - \beta_f(\tau))\} \quad (9)$$

$$r_{ID}(t, \tau) = E_{cf} e^{-\varphi_{ff} \{\beta_f(t) - \beta_f(\tau)\}}$$

con

$$\varphi_{ff} = \frac{\varphi_f}{1 + \varphi_d} = \frac{\varphi_f}{1.4} \quad ; \quad E_{cf} = \frac{E^*_{c28}}{1 + \varphi_d} = \frac{E^*_{c28}}{1.4}$$

Il calcolo della funzione integrale è allora immediato:

$$\xi_{ID} = \int_{t_1}^t r_{ID}(t, \tau) d\Phi_{ID}(\tau, t_0) = 1 - e^{-\varphi_{ff} \{\beta_f(t) - \beta_f(t_1)\}} \quad (10)$$

Il risultato ottenuto in forma chiusa mostra l'indipendenza della funzione  $\xi$  da  $t_0$ .

In fig. 27 i valori numerici ottenuti con i due metodi approssimati sono posti a confronto con quelli ricavati dall'impiego del Metodo Generale.

Con l'impiego dei metodi algebrizzati, ed in particolare col metodo AAEM ("Age - Adjusted Effective Modulus Method") (IX) le equazioni (1) possono essere così riscritte:

$$\begin{aligned} & (a_{j0} + \sum_1^k a_{jh} X_h^{e_{h,1}}) E_c \{\Phi(t, t_0) - \Phi(t_1, t_0)\} = \\ & = -E_c \sum_{k+1}^m a_{j\ell} X_j(t) \left\{ \frac{1}{E_c} + \chi(t, t_1) \frac{\varphi(t, t_1)}{E_c} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$(j = k+1, \dots, m) \quad ; \quad (t \geq t_1)$$

dove  $\chi(t, t_1)$  è il coefficiente di invecchiamento e  $\varphi(t, t_0)$  il coefficiente di viscosità.

Le soluzioni delle (11) possono essere ancora poste nella forma delle (2),



attribuendo alla funzione integrale la seguente espressione approssimata:

$$\xi_{AAEM}(t, t_0, t_1) = \frac{\varphi(t, t_0) - \varphi(t_1, t_0)}{1 + \chi(t, t_1) \varphi(t, t_1)} \quad (12)$$

La (12) fornisce in genere risultati inaccettabili, comunque la concordanza con i valori esatti aumenta al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo  $(t_1 - t_0)$ , per diventare rigorosa nel caso particolare  $t_1 = t_0^+$  (<sup>3</sup>), poiché solo in quest'ultimo, la storia degli spostamenti varia linearmente al coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  (ipotesi di Trost-Bazant per l'applicabilità del metodo).

#### 4. TRACCIAMENTO DELLE CURVE DELLA FUNZIONE INTEGRALE $\xi(t, t_0, t_1)$

I grafici della funzione  $\xi(t, t_0, t_1)$  sono stati tracciati adottando i seguenti parametri:

- coefficiente legato all'ambiente esterno:  $\varphi_{f_1} = 1, 2, 3$  (tab. 1);
- spessore fittizio:  $h_0 = 20, 40$  cm;
- istante di applicazione del carico:  $t_0 = 7, 14, 28, 90$  giorni.

Lo spessore fittizio è definito da:

$$h_0 = \frac{2A}{p} \cdot \lambda$$

essendo:

- A - l'area della sezione trasversale,
- p - il perimetro a contatto con l'atmosfera,
- $\lambda$  - il parametro dipendente dalle condizioni ambientali.

Ogni diagramma è relativo ad un valore di  $\varphi_{f_1}$ ,  $h_0$  e  $t_0$ , mentre le curve nello stesso diagramma sono caratterizzate ciascuna dai seguenti istanti  $t_1$  di cambiamento dello schema statico:

$$t_1 = 7, 14, 28, 90, 365, 730 \text{ giorni.}$$

Il rapido incremento iniziale delle curve caratterizzate da  $t_0 = t_1$  è dovuto al termine  $\beta_a$  che compare nella funzione di viscosità del CEB-78.

Di particolare ausilio possono essere i diagrammi del tipo di fig. 25, dove viene riportato l'andamento della  $\xi$  per un prefissato istante di lettura ( $t = 10^4$ gg) e per assegnati valori di  $t_0$ , in funzione di  $t_1$ .

(<sup>3</sup>) Infatti sostituendo nella (12) l'espressione del coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$ :

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - \frac{r(t, t_0)}{E_c}} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)}$$

si riottiene la (4).

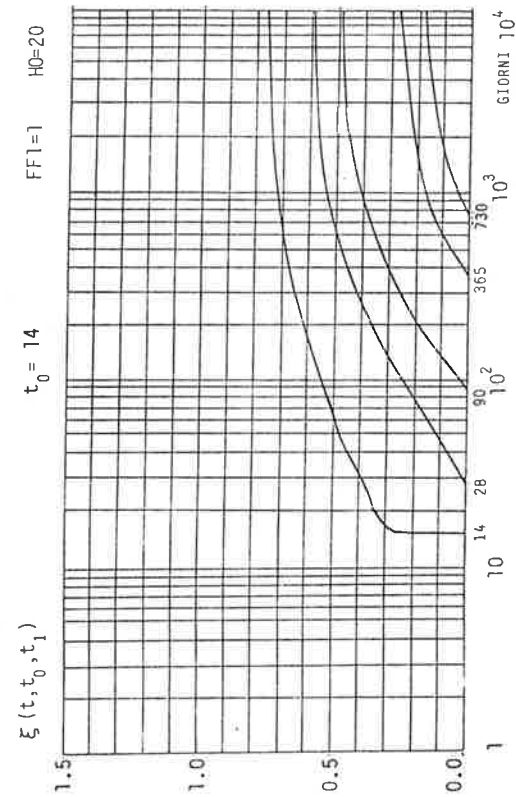


Fig. 2

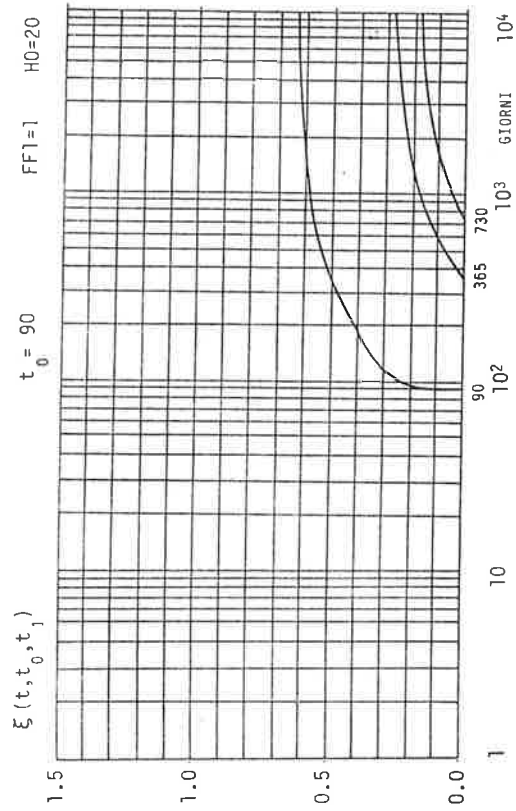


Fig. 4

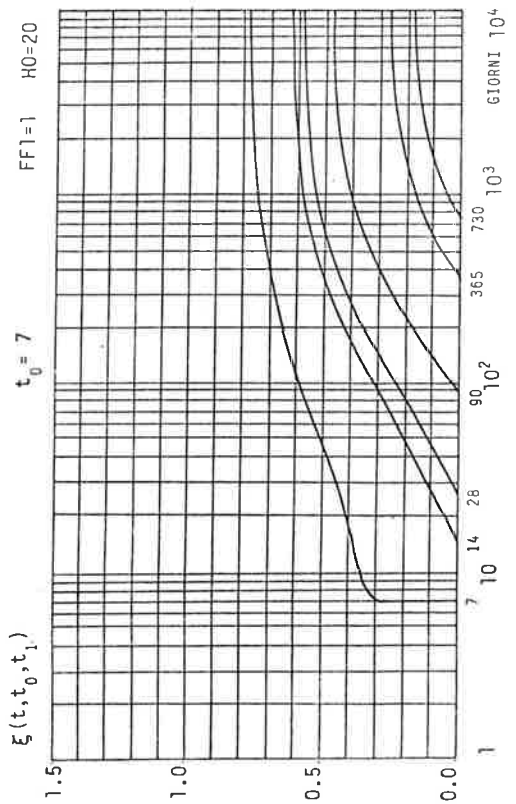


Fig. 1

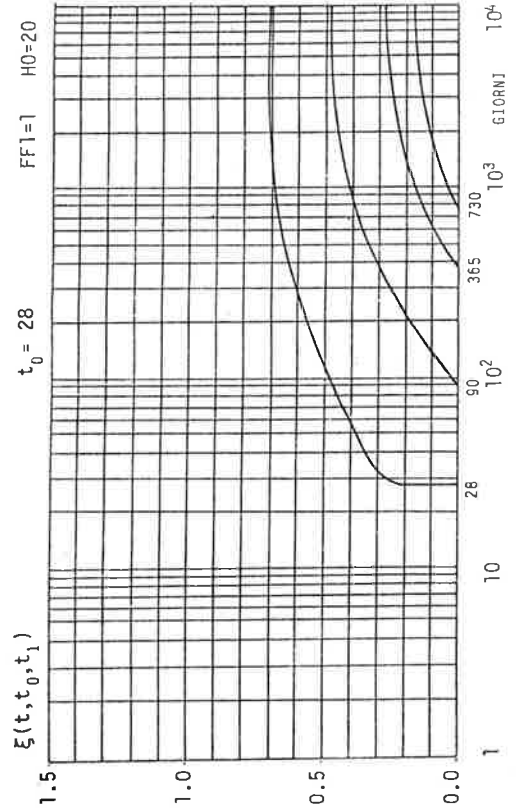


Fig. 3

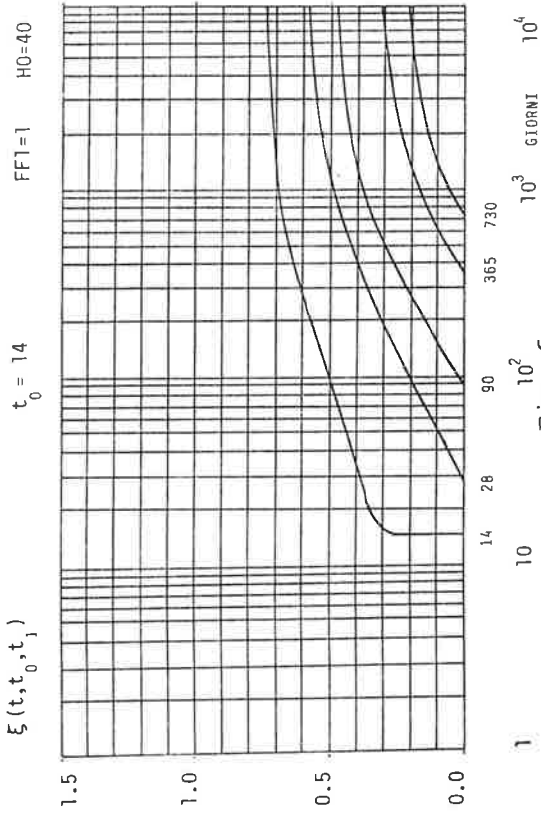


Fig. 6

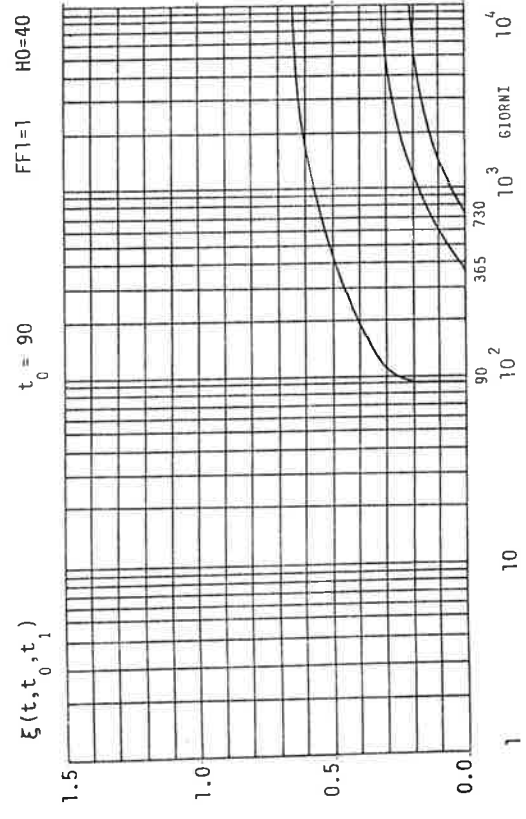


Fig. 8

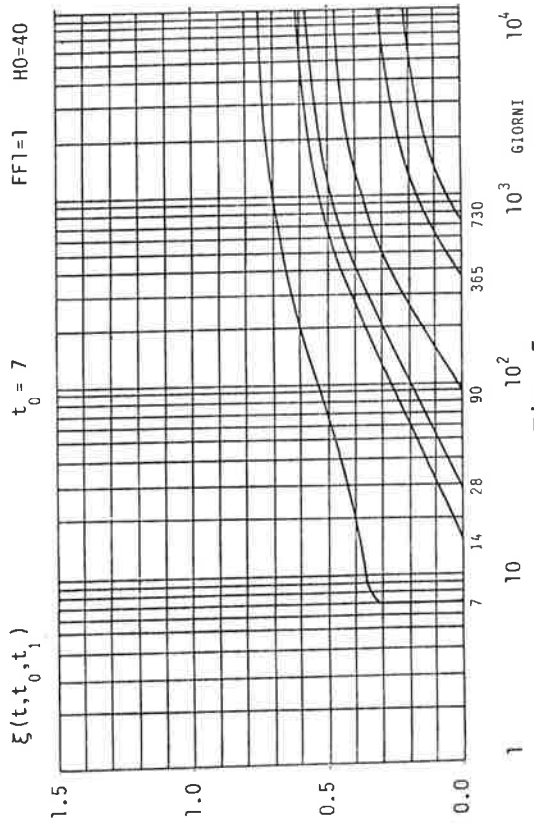


Fig. 5

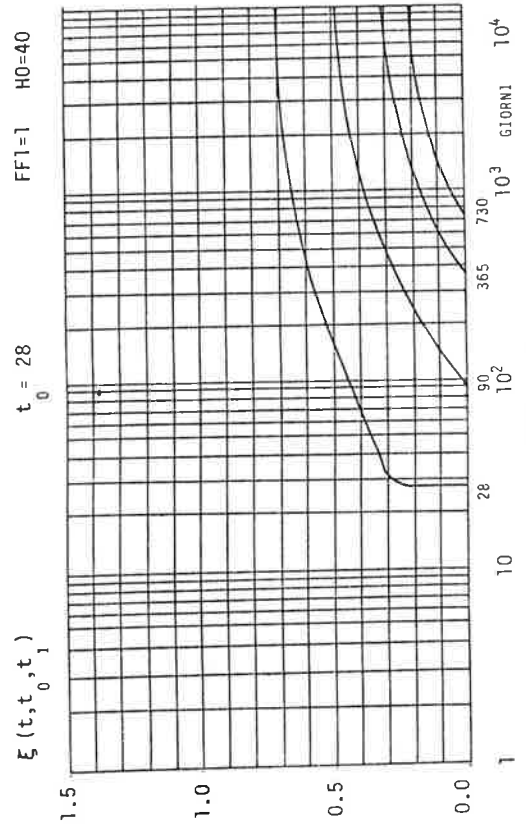
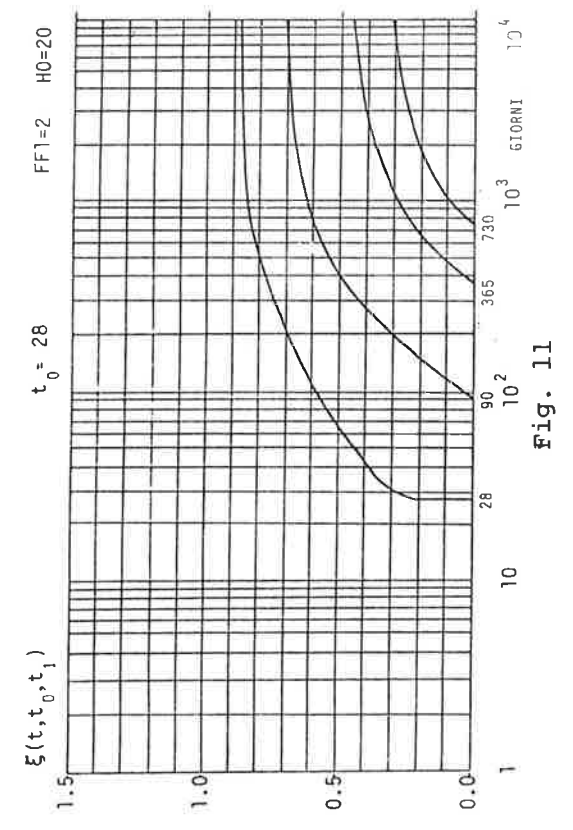
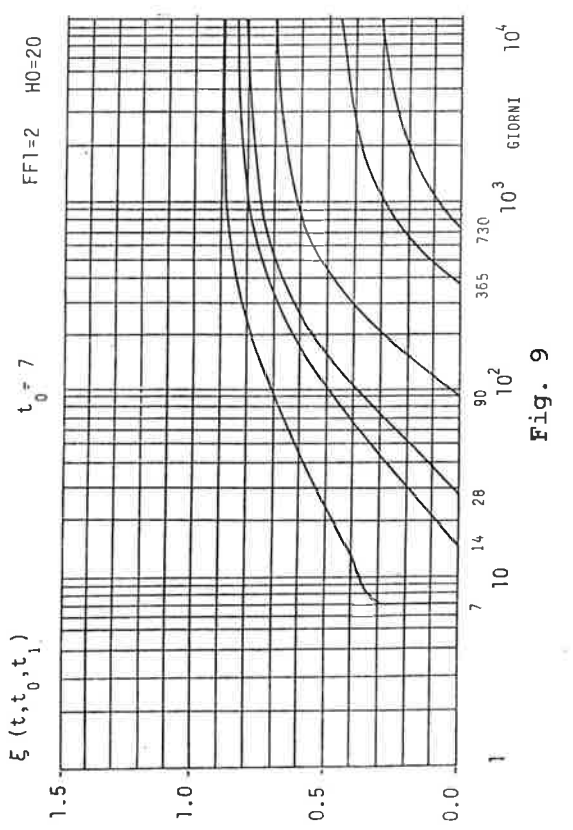
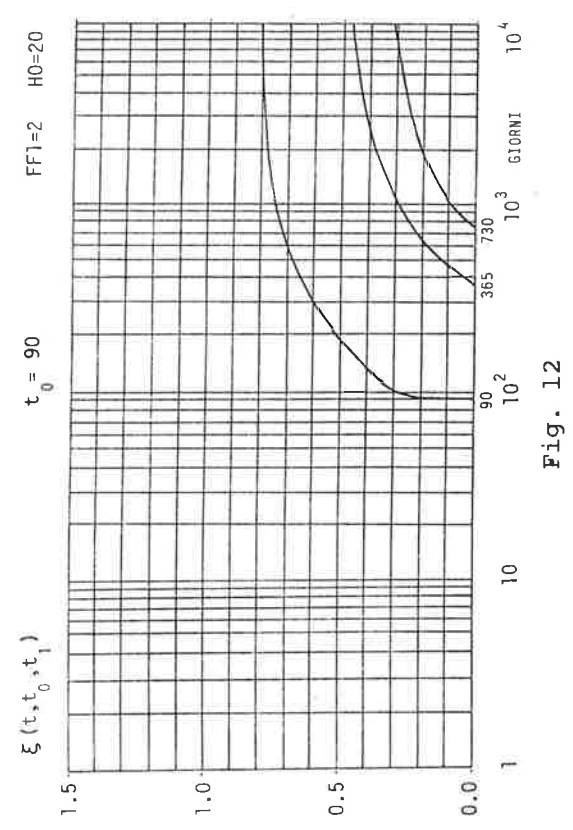
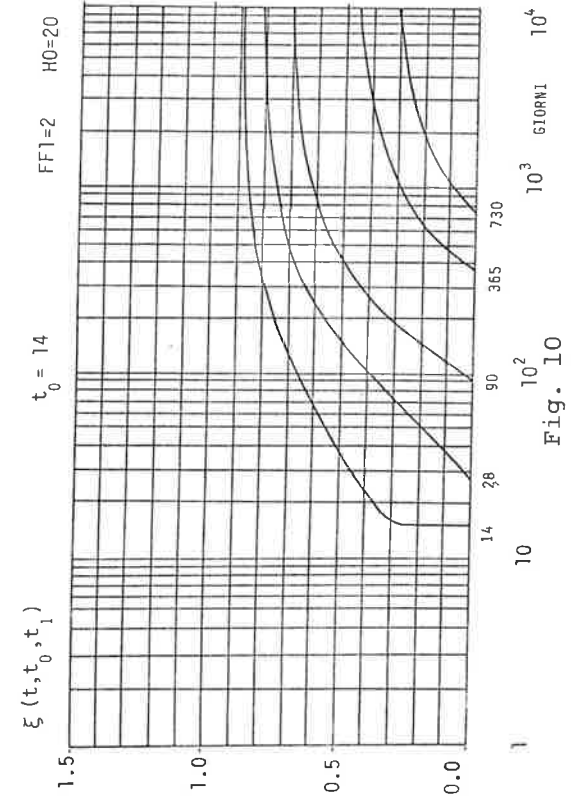
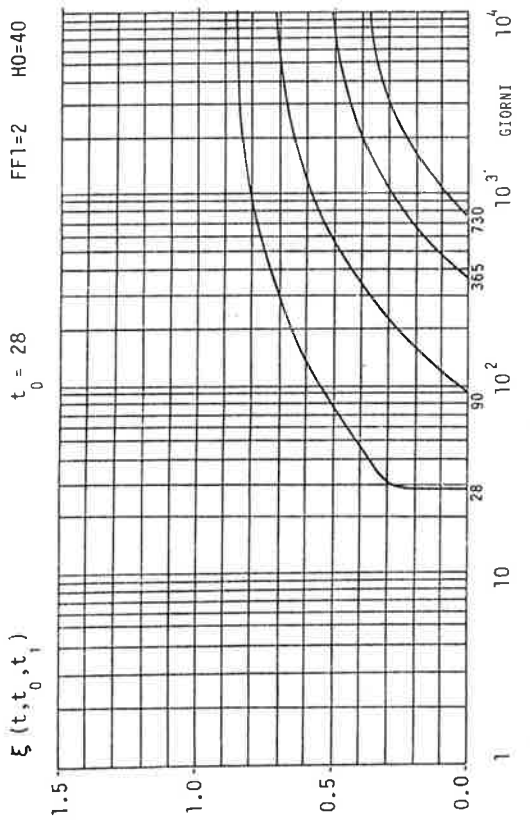
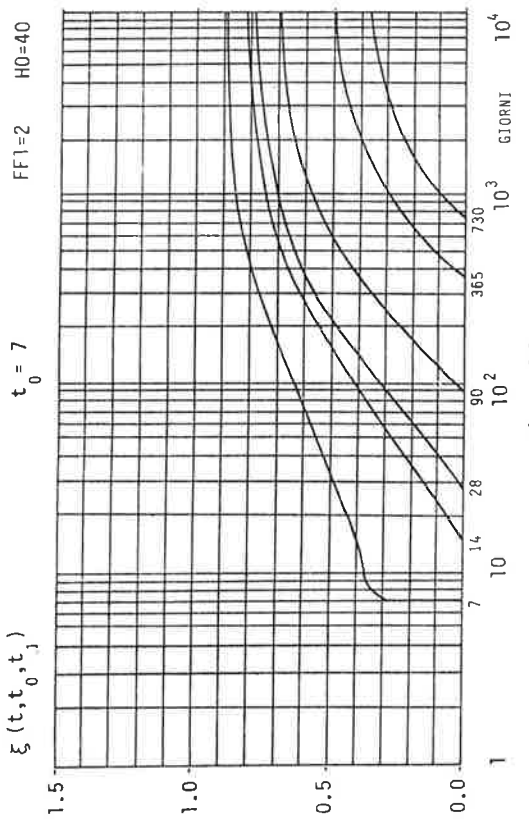
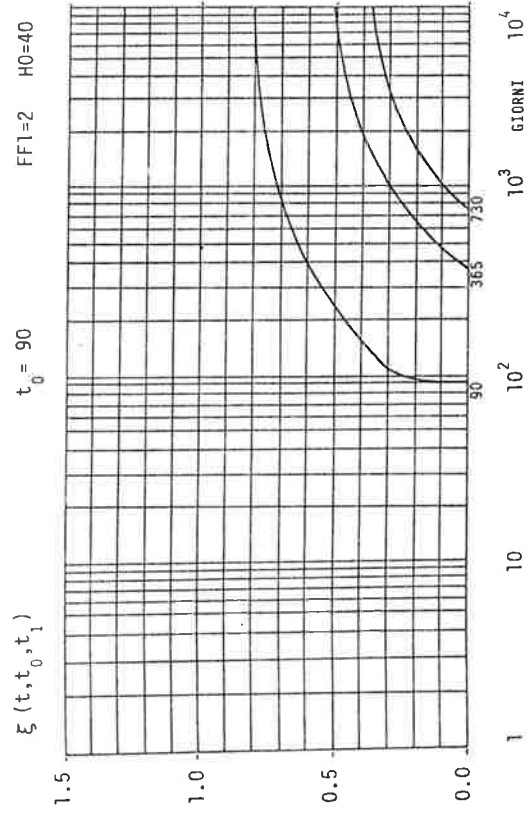
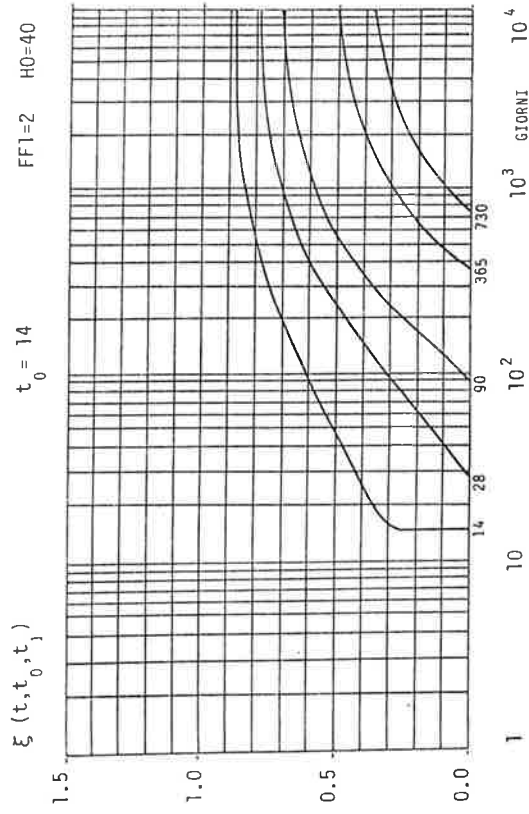


Fig. 7





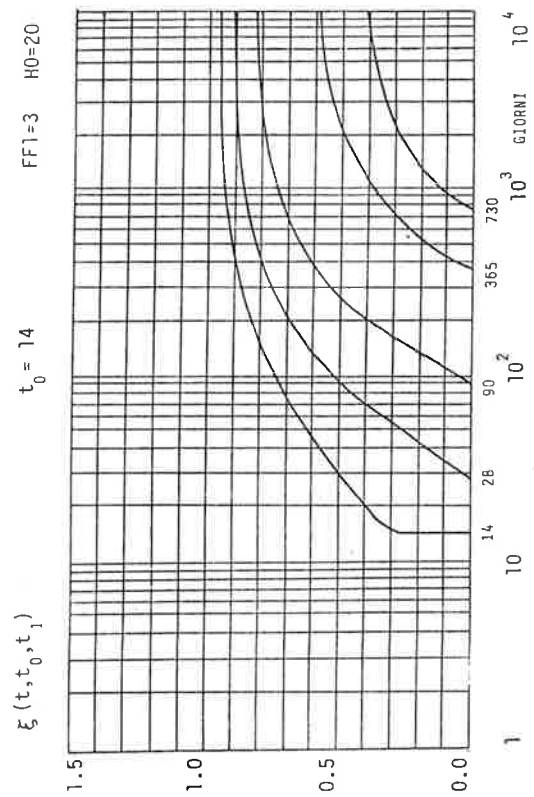


Fig. 18

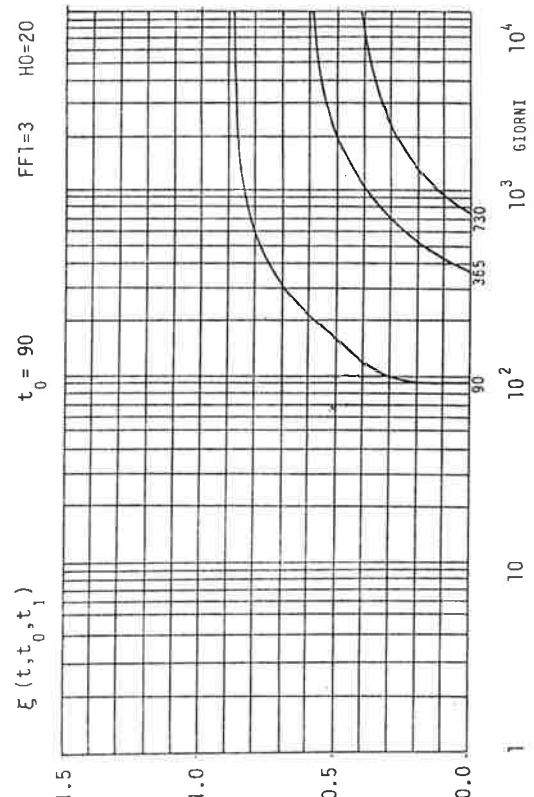


Fig. 20

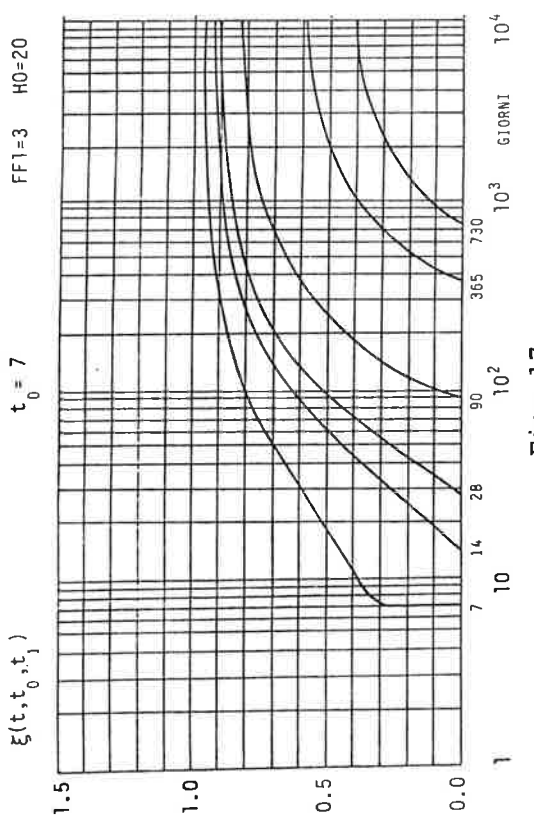


Fig. 17

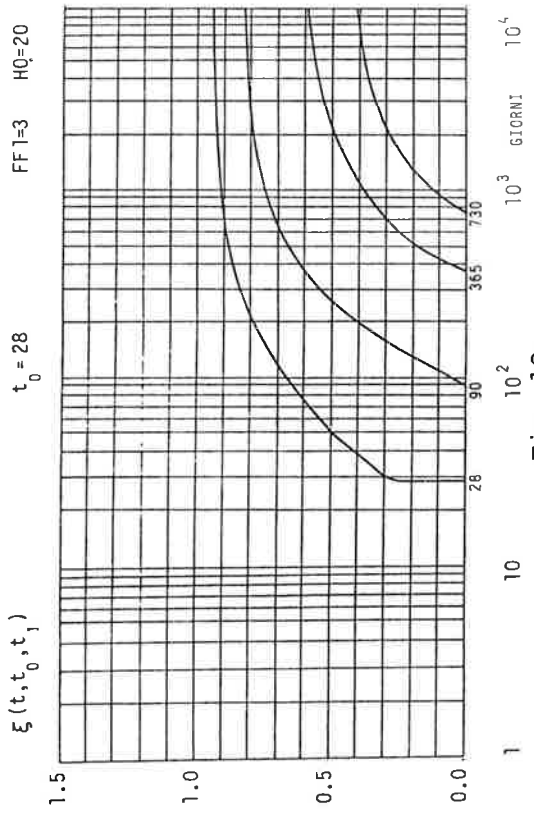


Fig. 19

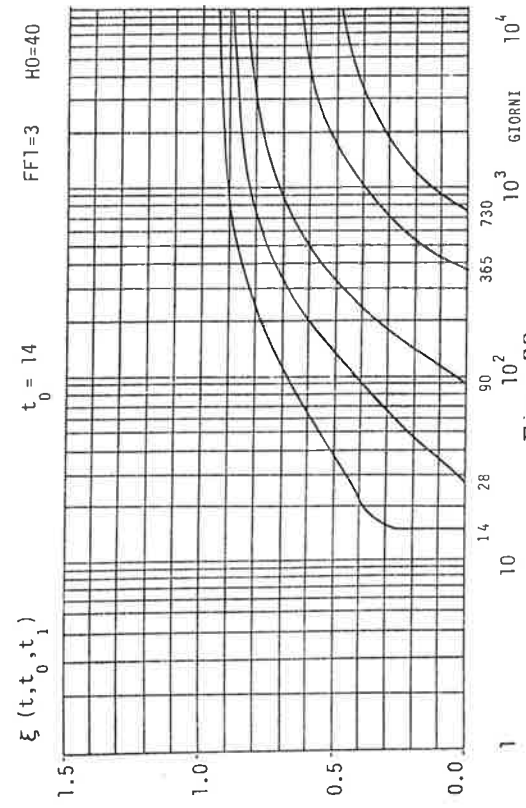


Fig. 22

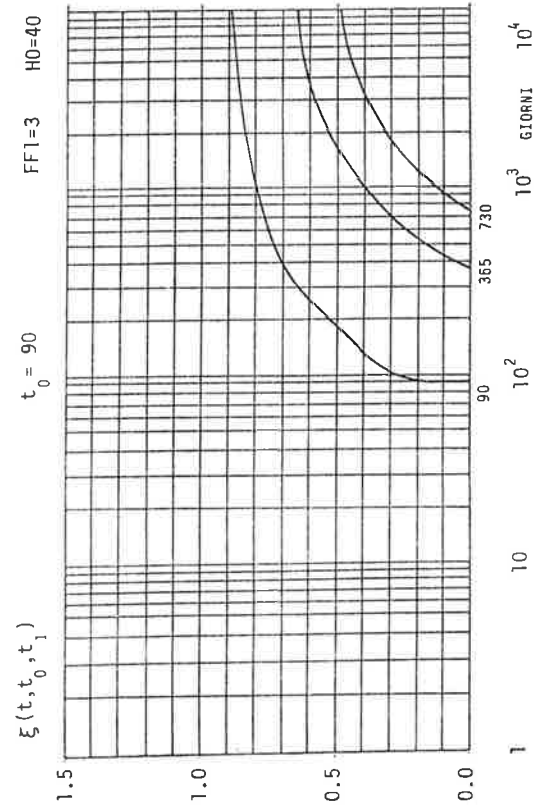


Fig. 24

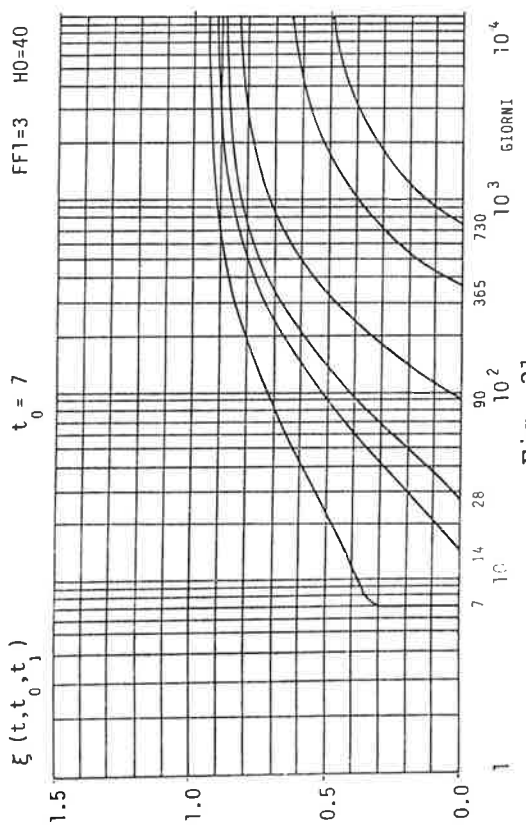


Fig. 21

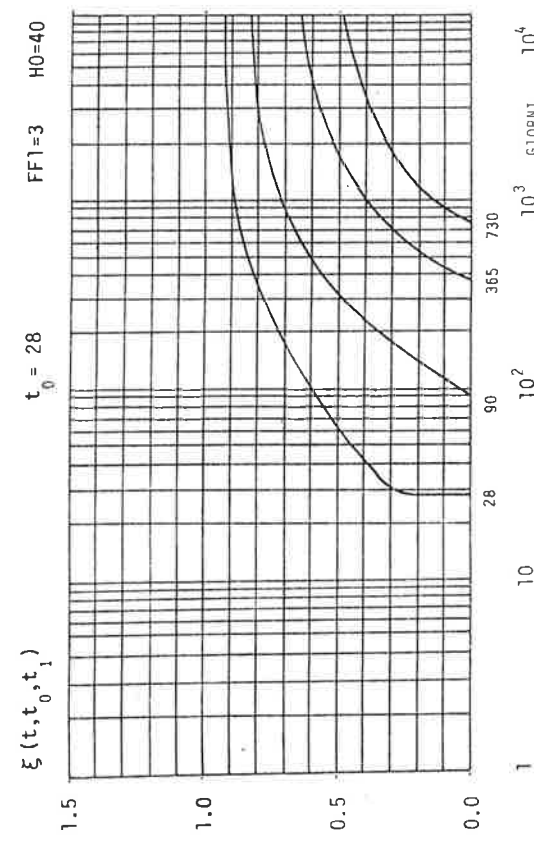


Fig. 23

Ambiente	Umidità relativa	$\varphi_{fl}$	$\lambda$
Acqua	---	0.8	30
Atmosfera molto umida	90%	1	5
Ambiente esterno in genere	70%	2	1.5
Atmosfera molto secca	40%	3	1

Tabella 1

Questi diagrammi forniscono indicazioni sulla scelta dell'istante  $t_1$  per ottenere, a fenomeno viscoso esaurito, un particolare stato di sollecitazione interno desiderato.

Nel diagramma, la linea inviluppo rappresenta i valori di  $\xi$  per  $t_1 = t_0^+$ .

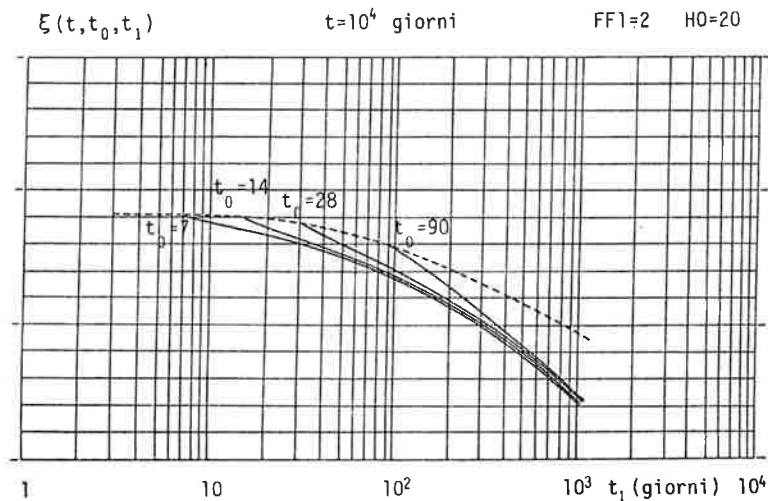


Fig. 25

## 5. CONFRONTI ED APPLICAZIONI NUMERICHE

Si faccia riferimento allo schema di fig. 26, composto da due travi semplicemente appoggiate, di rigidezza costante, soggette a partire dall'istante  $t_0$  ad un carico uniformemente ripartito costante nel tempo.

Si valuta, nel caso in cui la sezione 1 viene resa solidale all'istante  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ), l'andamento del momento di continuità, prodotto dalle deformazioni viscoso residue del conglomerato cementizio.

Impiegando le (2) si ottiene:

$$M_1(t) = M_1^{e\ell,2} \quad \xi(t, t_0, t_1) = \frac{1}{8} q \ell^2 \xi(t, t_0, t_1)$$



assumendo:

$$\varphi_{f1} = 2 \quad (\text{ambiente esterno normale})$$

$$h_0 = 20 \text{ cm}$$

$$t_0 = 28 \text{ giorni}$$

$$t_1 = 28,90,365,730 \text{ giorni}$$

si riportano nella tabella 2 e nella fig. 27, i valori della funzione integrale, determinati con i tre differenti approcci.

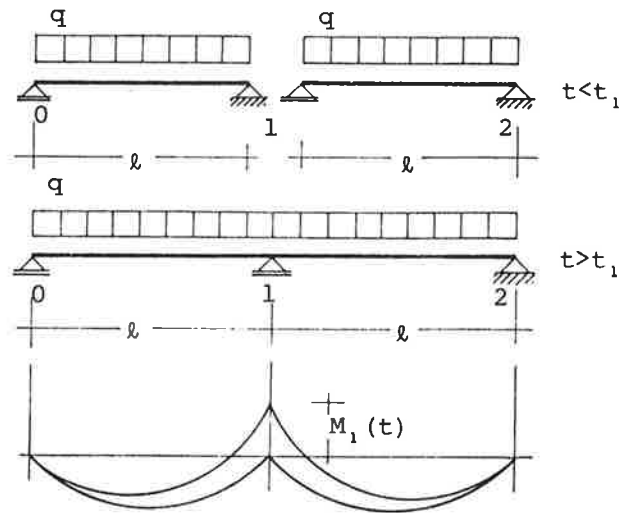


Fig. 26

Dall'analisi dei risultati si può notare la tendenza della reazione di continuità ad assumere il valore elastico della corrispondente reazione valutata nello schema statico finale ("principio del riacquisto del regime principale").

Tale tendenza è più marcata se la solidarizzazione avviene in calcestruzzi giovani, mentre per tempi avanzati, essa risulta sempre più ridotta.

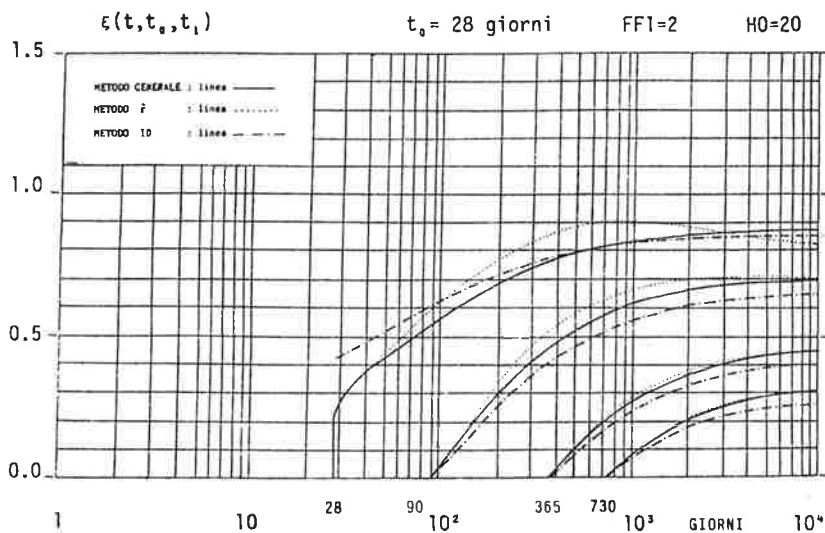


Fig. 27

Dall'applicazione dei metodi approssimati si conclude che il metodo  $\tilde{r}$  conduce in generale a risultati sufficientemente accurati, mostrando scostamenti evidenti per modesti valori di  $t_1$ .

I risultati del metodo ID presentano un certo grado di approssimazione pur mostrando un andamento congruente nel tempo.

Comunque nei problemi dove non è richiesta molta accuratezza, tale metodo ha il vantaggio di un facile impiego.

	$t_1$	Metodo generale	Metodo $\tilde{r}$	Metodo ID
$\xi(10^2, 28, t_1)$	28	0.593	0.623	0.425
	90	0.061	0.062	0.038
$\xi(10^3, 28, t_1)$	28	0.833	0.905	0.825
	90	0.619	0.660	0.552
	365	0.293	0.305	0.246
	730	0.091	0.092	0.071
$\xi(10^4, 28, t_1)$	28	0.871	0.828	0.861
	90	0.706	0.709	0.645
	365	0.456	0.457	0.404
	730	0.305	0.305	0.265

Tabella 2

#### BIBLIOGRAFIA

- (I) CEB - Code Modèle pour les structures en Beton. Bulletin n° 124, 1978.
- (II) CEB - Effects structuraux de deformations differées du beton. Bulletin n°136, 1980.
- (III) CEB - Structural effects of time dependent behaviour of concrete. Bulletin d'information n°142/142 bis, 1984.
- (IV) BAZANT, Z.P.: Numerical Determination of Long-Range Stress History from Strain History in Concrete, Material and Structures (RILEM), Vol. 5, 1972, pp. 135-141.
- (V) MIGLIACCI, A.: Applicazioni dei principi di viscosità; strutture formate da aste di calcestruzzo in fase di viscosità lineare, Quaderni del Corso di perfezionamento per le costruzioni in c.a., n°2, Tamburini Ed., Milano 1971.
- (VI) LEVI, F.: Effets de Liaisons Supplémentaires, Introduits après les Charges dans les Solides Viscoélastiques, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, 232, Paris 1951, pp. 1809-1810.
- (VII) MENDITTO, G., DEZI, L., TARANTINO, A.M.: Creep in Structures with Variable Structural System, Fourth RILEM International Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete: Mathematical Modeling, Evaston, USA, 1986.
- (VIII) BAZANT, Z.P., KIM, S.S.: Approximate Relaxation Function for Concrete Creep, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, 1979, pp. 2695-2705.
- (IX) BAZANT, Z.P.: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method", ACI Journal, Vol. 69, 1972, pp. 212-217.
- (X) MOLA, F.: Metodi di analisi di strutture in c.a. e c.a.p. a comportamento elastoviscoso lineare, Studi e Ricerche, Corso F.lli Pesenti, Vol. 3, Milano 1981.

SUL COMPORTAMENTO DEI PANNELLI SANDWICH

Giovanni MENDITTO<sup>(1)</sup> - Roberto GIACCHETTI<sup>(2)</sup>

- (1) Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Ancona.  
(2) Tecnico Laureato, Facoltà di Ingegneria, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Ancona.

SOMMARIO

Si riferisce su una serie di prove su pannelli sandwich

I risultati evidenziano un comportamento monolitico del pannello sandwich fino ad un carico prossimo a quello di collasso con trascurabili spostamenti relativi tra le due paretine esterne.

La tecnologia costruttiva per strati, qualora non sia particolarmente curata la ripresa dei getti, conferisce poca duttilità al pannello e ne condiziona fortemente il meccanismo di collasso.

SUMMARY

The results of a series of experimental tests carried out on shotcrete sandwich panels are reported in this paper.

This type of panels shows to behave as a monolithic wall nearly up to the failure with negligible relative displacements between the outer layers.

Nevertheless the particular technology used for casting (by shooting concrete on an inner insulating core), when not enough care is taken in order to assure sufficient bond between the subsequent layers, gives panel little ductility and influences the failure mechanism strongly.

1. INTRODUZIONE

Si riferisce su ulteriori risultati ottenuti nell'ambito di una campagna di prove sperimentali programmata per pannelli tipo sandwich costituiti da un nucleo centrale di materiale di sintesi organica termoisolante e da due strati

esterni portanti in betoncino addittivato a base di gunita (I).

L'armatura degli strati ed il loro mutuo collegamento vengono realizzati con un traliccio spaziale di fili di acciaio ad alto limite elastico: due reti piane a maglie quadrate di lato eguale a 63 mm costituite da fili verticali ed orizzontali, rispettivamente di 3 e 2 mm di diametro, collegate da una serie di fili diagonali, inclinati a  $+ 45^\circ$  rispetto alla giacitura delle reti, saldati ai vertici delle maglie (II).

All'origine il graticcio è in parte annegato nel poliuretano costituente il nucleo centrale, fuoriuscendo da questo soltanto le reti piane.

Le paretine esterne sono realizzate in due strati successivi con la tecnica della malta spruzzata (shotcrete, spritzbeton): un primo strato fino a rasare la rete metallica, un secondo fino a raggiungere il voluto spessore di parete.

L'obiettivo delle prove è stato quello di valutare fino al collasso, al crescere del livello di carico, il comportamento delle due paretine esterne anche per una verifica delle ipotesi che di norma si pongono alla base delle trattazioni teoriche dei pannelli sandwich (III), (IV).

Sono stati provati sei pannelli tre di spessore nominale 15 cm e tre di spessore nominale 9 cm; di essi due con carico centrato e quattro con carico eccentrico (con eccentricità pari ad  $1/5$  ed  $1/3$  dello spessore effettivo del pannello, quest'ultima eccentricità cadendo di fatto nel piano medio nominale di una delle due paretine esterne).

Le caratteristiche geometriche dei pannelli sono rilevabili dalla Fig. 1: va notato il rinforzo delle testate delle estremità dei singoli pannelli ottenuto ringrossando ed armando gradualmente la sezione in modo da evitare in queste zone rotture di tipo fragile che impedirebbero di mobilitare in modo completo la resistenza ultima del materiale.

Il carico sui pannelli è stato applicato attraverso cerniere cilindriche metalliche anche per le condizioni di carico nominale centrate<sup>(1)</sup>. Si è utilizzata una attrezzatura costituita da una pressa a quattro colonne e due traverse di cui una fissa ed una mobile azionata da quattro (o otto) martinetti idraulici da 498 kN di potenza massima, collegati ad una pompa elettrica con regolazione fine del carico, attraverso un unico distributore di pressione a quattro (o otto) vie.

## 2. STRUMENTAZIONE DI MISURA

I pannelli sono stati strumentati nel caso:

a)- di carico centrato ( $e=0$ ) con:

a1)- quattro trasduttori di spostamento (indicati con i n.ri 1,2,3,4 nella fig. 2) montati con configurazione ad estensimetro. Sono stati registrati i valori medi delle coppie 1+2 e 3+4 in modo da osservare l'effetto dell'eccentricità naturale. Queste misure consentono il tracciamento del diagramma tensioni-deformazioni longitudinali;

a2)- due trasduttori di spostamento (indicati con i n.ri 5 e 6 nella fig. 2) montati con configurazione ad estensimetro in modo da poter avere indicazioni sulla possibilità di spostamenti relativi tra le due paretine esterne;

a3)- un trasduttore di spostamento (indicato con il n°7 nella fig. 2) per

---

(1) cioè con gli assi delle cerniere allineati con l'asse geometrico del pannello.

la misura della componente orizzontale dello spostamento del punto centrale del pannello rispetto alle cerniere cilindriche fisse;

b)- di carico eccentrico ( $e = 1/3 s, 1/5 s$ ) con:

b1)- quattro trasduttori (indicati con i n.ri 1,2,3,4 nella fig. 2 montati come in a1). I risultati ottenuti dalle coppie di strumenti 1+3 e 2+4 sono stati mediati in modo da ricavare misure proporzionali alla rotazione relativa di due sezioni trasversali a cavallo della mezzaria e distanti da questa circa 15 cm;

b2)- tre trasduttori di spostamento (indicati con 5A,5B e 6 nella fig. 3) in modo da poter osservare spostamenti relativi delle paretine del manufatto;

b3)- un trasduttore di spostamento (indicato con il n° 7 nella fig. 3) per la misura della componente orizzontale dello spostamento del punto centrale del pannello rispetto alle cerniere cilindriche fisse.

In ogni caso il carico è stato applicato in modo ciclico con ritorno ad una aliquota di carico stesso pari a 57 kN per i pannelli da 9 cm e 100 kN per quelli da 15 cm.

### 3. PRESENTAZIONE DEI RISULTATI

Nelle tabb. 1,2,3 sono consegnati i valori degli spostamenti relativi delle pareti in mm/100 rispettivamente per il pannello n° 1 ( $s = 15$  cm,  $e = 0$ ), per i pannelli 2 e 3 ( $s = 15$  cm,  $e = 1/5 s; 1/3 s$ ) e per i pannelli 4,5,6 ( $s = 9$  cm,  $e = 0; 1/5 s; 1/3 s$ ).

Nelle figg. 4,5,7,8,9 per i pannelli n° 2,3,4,5,6 rispettivamente viene riportato il diagramma degli spostamenti relativi delle paretine esterne in direzione obliqua, rilevati in corrispondenza dei trasduttori 5A e 5B.

Nelle figg. 6a e 6b per i pannelli 1,2,3 e 4,5,6 rispettivamente vengono confrontati gli spostamenti relativi delle paretine misurati in direzione orizzontale.

Nelle figg. 10a,11a,12b è riportato al crescere del livello del carico (ordinate) l'andamento della componente orizzontale dello spostamento del punto centrale dei pannelli n° 1,2,3 rispettivamente rilevata al trasduttore n° 7.

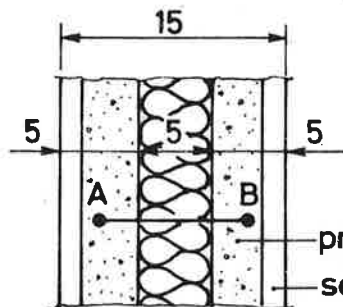
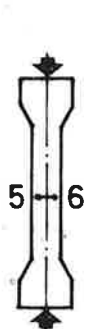
Nelle figg. 10b,13a è riportato il diagramma carico-deformazione per i pannelli n°1,n°4 rispettivamente (Tabb. 4 e 5). Nel caso di  $e = 0$  è ricavato il modulo secante del pannello.

Nelle Figg. 11b,12a,14a,15a è riportato al crescere del livello del carico (ordinate) il diagramma della rotazione relativa di due sezioni trasversali a cavallo della mezzaria, distanti 15 cm da questa, per i pannelli n° 2,3,5,6 rispettivamente, ottenuto mediando le misure rilevate alla coppia di trasduttori 1+3 e 2+4.

Nelle figg. 13b,14b,15b, infine, è riportato al crescere del livello del carico (ordinate) il diagramma carico-componente orizzontale dello spostamento rispettivamente per i pannelli n° 4,5,6.

Tabella 1

CARICO (kN)	SPOSTAMENTI (mm/100)	
	5	6
0	0	0
199,2	+0,2	14,0
298,8	+0,3	16,8
398,4	+0,3	17,8
498,0	+0,2	18,4
597,6	+0,4	19,4
697,2	+0,6	20,8
796,8	+0,7	22,2
896,4	+0,9	24,3
996	+0,9	31,6
1095,6	+0,8	33,9
1195,2	+0,4	37
1294,8	-0,5	40,8
1394,4	-48	45,8

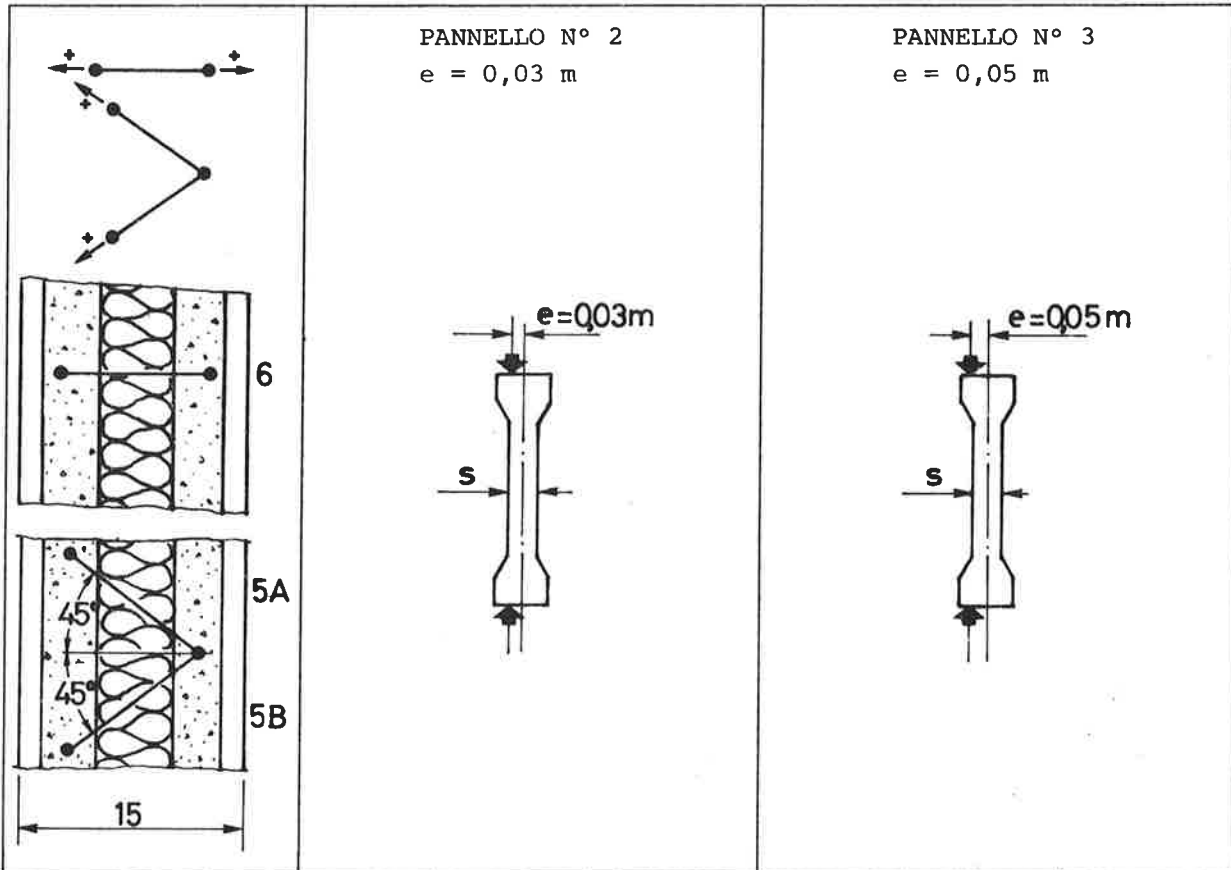


IL SEGNO + CORRISPONDE  
AD UN ALLONTANAMENTO DEI  
PUNTI A e B

PANNELLO N° 1  
(e = 0)

primo strato  
secondo strato

Tabella 2

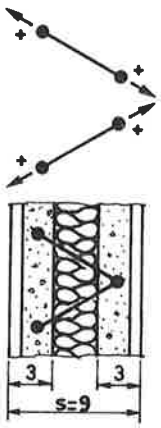


CARICO (kN)	5A	5B	6	5A	5B	6
0	0	0	0	0	0	0
199,2	-6,0	+9	-1,3	+0,8	-23,1	+0,3
298,8	-4,1	+6,1	-1,4	+1,7	-44,1	+0,8
398,4	0	+0,9	-1,4	+1,0	-61,8	+2,0
498,0	+1,3	-7,6	-1,0	+0,8	-74,9	+3,6
597,6	+1,3	-19,1	-0,7	+0,8	-84,0	+5,6
697,2	+1,1	-32,7	-0,5	+0,7	-93,0	+7,4
796,8	+2,1	-42,0	-0,4	+15,0	-102,1	+8,7
896,4	+2,1	-51,9	0	+87,0	-116,1	+10,6
996,0	+2	-62,9	0	+111,1	-129,1	+12,0
1095,6	+14,7	-74,0	-0,1	+144,1	-145,7	+12,8
1195,2	+27	-86,1	0	+155,7	-172,0	+12,8
1294,8	+38,1	-97,8	0	---	---	---
1394,4	+50,7	-111,0	+0,1	---	---	---
1494,0	+67,1	-125,1	+0,2	---	---	---
1593,6	+111,6	-164,8	+1,4	---	---	---

Il segno + indica allontanamento delle basi di misura.

Tutti gli strumenti allo scarico hanno registrato deformazioni residue dello stesso ordine di grandezza dei valori massimi istantanei.

Tabella 3

	PANNELLO N° 4 $e = 0$			PANNELLO N° 5 $e = s/5 \text{ m}$	PANNELLO N° 6 $e = s/3 \text{ m}$
	5A (*)	5B (*)	6 (*)	6 (*)	6
CARICO (kN)					
0	0	0	0	0	0
113,8	-1,0	-2,0	4,7	1,4	+0,6
170,7	-1,0	-4,8	6,4	2,2	+0,9
227,7	-4,6	-8,1	7,9	7,7	+1,3
284,5	-9,0	-11,7	9,3	15,9	+1,6
341,5	-14,9	-14,1	10,3	23,2	+47,6
398,4	-20,0	-17,6	11,5	25,7	+66,1
455,3	-25,6	-21,0	12,8	27,3	---
512,2	-29,1	-25,7	14,0	37,8 (**)	---
569,1	-33,0	-30,1	15,6	61,4	---
621,1	-38,0	-32,9	17,1	94,8	---
683,0	-43,1	-37,0	18,6	---	---
739,9	-49,7	-40,9	20,5	---	---
796,8	-55,0	-44,0	24,5	---	---
853,7	-61,0	-49,0	28,2	---	---
910,6	-67,1	-53,1	31,8	---	---
967,5	-69,8	-55,7	47,8	---	---
1024,4	-76,0	-57,0	60,5	---	---

Il segno + indica allontanamento delle basi di misura.

(\*) Tutti gli strumenti allo scarico hanno registrato deformazioni residue dello stesso ordine di grandezza dei valori massimi istantanei.

(\*\*) Inizio fase di lettura molto instabile.



Tabella 4

PANNELLO N°1					
ΔP (kN)	μ ε (10 <sup>-6</sup> mm/mm)			σ <sub>app</sub> (*) = = ΔP/A <sub>c</sub> MPa	E <sub>sec</sub> MPa
	COPPIA TRASDUTTORI		VALORI MEDI		
	3-4	1-2			
199,2	45	137	91	1,66	18242
298,8	90	187	139	2,49	17914
398,4	135	232	184	3,32	18043
498,0	185	287	236	4,15	17585
597,6	235	343	289	4,98	17232
697,2	292	407	350	5,81	16600
796,8	347	467	407	6,64	16315
896,4	407	532	470	7,47	15894
996,0	463	593	528	8,30	15720
1095,6	522	660	591	9,13	15448
1195,6	590	742	666	9,96	14955
1266,3	645	837	741	10,55	14238



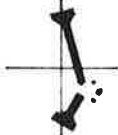



(\*) A<sub>c</sub> = 2x50x1200 = 120.000 mm<sup>2</sup>

Tabella 5

PANNELLO N°4					
ΔP (kN)	μ ε (10 <sup>-6</sup> mm/mm)			σ <sub>app</sub> MPa	E <sub>sec</sub> MPa
	VALORI MEDI	COPPIA TRASDUTTORI	MEDIA		
	1-2	3-4			
113,8	280	10	145	1,58	10897
170,7	393	37	215	2,37	11023
227,7	497	62	280	3,16	11286
284,6	588	83	336	3,95	11756
341,5	672	107	390	4,74	12154
398,4	760	133	447	5,53	12371
455,3	843	163	503	6,32	12565
512,2	918	193	556	7,11	12788
569,1	993	223	608	7,90	12993
626,1	1070	252	661	8,70	13162
683,0	1150	273	712	9,49	13329
739,9	1237	297	767	10,28	13403
796,8	1327	310	819	11,07	13517
853,7	1425	323	874	11,86	13570
910,6	1550	322	936	12,65	13515
967,6	1687	302	995	13,44	13508
1024,4	1858	255	1057	14,23	13463

Nella tab. 6 per i vari tipi di pannelli saggianti è riportato il carico, il tipo e lo schema di rottura.

Tabella 6

N°	PANNELLO		ECCENTRICITA' DEL CARICO (cm)	CARICO DI ROTTURA kN	TIPO DI ROTTURA	SCHEMA DI ROTTURA
	Spessore (cm)					
	Nominale	Effettivo (medio)				
1	15	15	0	1395	Rottura a circa 10+15 cm dalla estremi- tà superiore	
2	15	15	3	2177	Rottura sezione centrale	
3	15	15	5	1209	Rottura loca- lizzata a cir- ca 10+15 cm dall'estremità inferiore	
4	9	8,6	0	1185	Rottura loca- lizzata in due sezioni	
5	9	8,7	3	676	Rottura accom- pagnata da fes- surazione emer- sa nello stadio ultimo a circa 10+15 cm alla estremità supe- riore	
6	9	9	5	582	Rottura nella sezione di mezzeria	

Tutti i pannelli hanno raggiunto la crisi senza evidenti segnali premonitori e senza manifestare una fase fessurativa.

#### 4. INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI

Il meccanismo di crisi che si instaura in tutti i pannelli è fortemente condizionato dalla presenza della superficie di discontinuità creata dalle riprese di getto, di cui appare marcata la presenza, conseguente all'esecuzione in due successive fasi delle paretine esterne.

La crisi, infatti, segue in modo istantaneo al distacco per instabilità dello strato più esterno della paretina (quello, cioè, realizzato nella seconda fase dell'operazione di spruzzatura del calcestruzzo) dal primo strato di supporto.

La posizione della zona di rottura è legata alla presenza di irregolarità emergenti nell'esecuzione delle pareti ed è comunque confermata la tendenza ad una crisi localizzata alle estremità dei pannelli in una zona molto prossima alla sezione di attacco delle testate irrigidenti (quattro pannelli su sei, vedi tab. 6, hanno esibito un siffatto meccanismo di collasso).

Lo spostamento relativo delle paretine esterne si evidenzia ad un certo livello di carico ed il suo ordine di grandezza è molto basso (circa 1/10 mm) sicché sembrano trovare conferma alcune delle ipotesi poste alla base di teorie lineari (III).

Nonostante la cura posta nell'applicazione del carico sui pannelli si riscontrano per carico centrato ( $e = 0$ ) notevoli eccentricità naturali come evidenziano i diagrammi ottenuti per lo spostamento orizzontale del punto centrale e quelli della deformazione misurata tra sezioni poste a cavaliere della mezzeria. In effetti, in particolare per i pannelli da 9 cm, una differenza di spessore tra le due pareti può innescare un differente comportamento meccanico anche per carico centrato. Quest'aspetto è meno influente nei pannelli da 15 cm di spessore (Figg. 10a-13b e Tabelle 4 e 5).

Al crescere dell'eccentricità di carico i diagrammi indicano differenze notevoli di freccia (Figg. 10a-11a-12b e 13b-14b-15b).

E' da rilevare (Tab. 6) che il minor valore del carico di rottura del pannello n°1 ( $e = 0$ ;  $s = 15$  cm) rispetto a quello del pannello n°2 ( $e = 3$  cm;  $s = 15$  cm) è da attribuire alla qualità della malta che per il pannello n°1 presentava proprietà molto scadenti rispetto a quelle di tutti gli altri pannelli.

## 5. CONCLUSIONI

I risultati evidenziano un comportamento monolitico del pannello sandwich fino ad un carico prossimo a quello di collasso con trascurabili spostamenti relativi tra le due paretine esterne.

Nonostante che i carichi di collasso dei pannelli saggiati siano di entità non indifferente, la tecnologia esecutiva per strati, qualora non sia particolarmente curata la ripresa dei getti, conferisce poca duttilità al pannello e ne condiziona fortemente il meccanismo di collasso (Tab. 6).

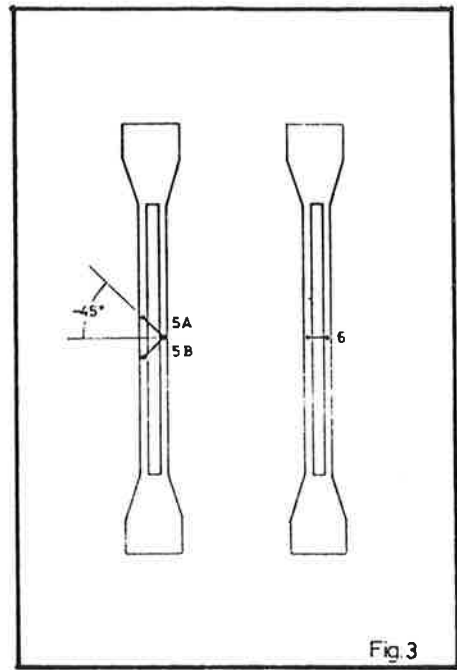
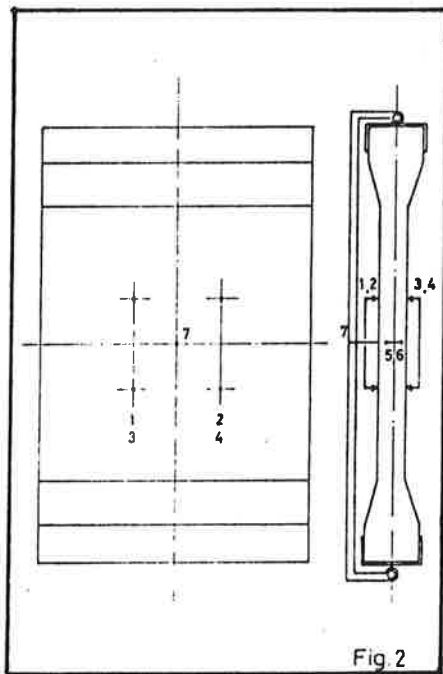
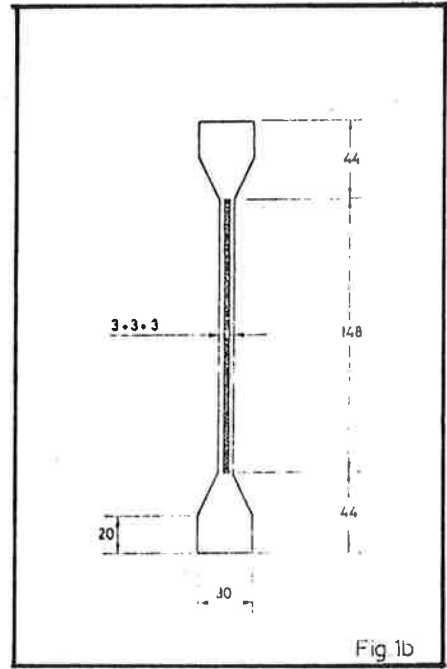
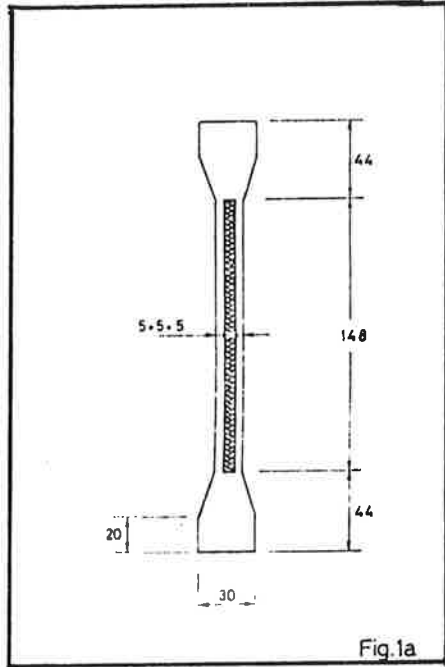
Parimenti problematico si presenta il controllo in opera della qualità del materiale per la difficoltà di estrazione di provini significativi da sottoporre alle tipiche prove di compressione. In tal senso sembrerebbe più opportuno procedere con controlli semidistruttivi da condurre attraverso metodi di pull-out.

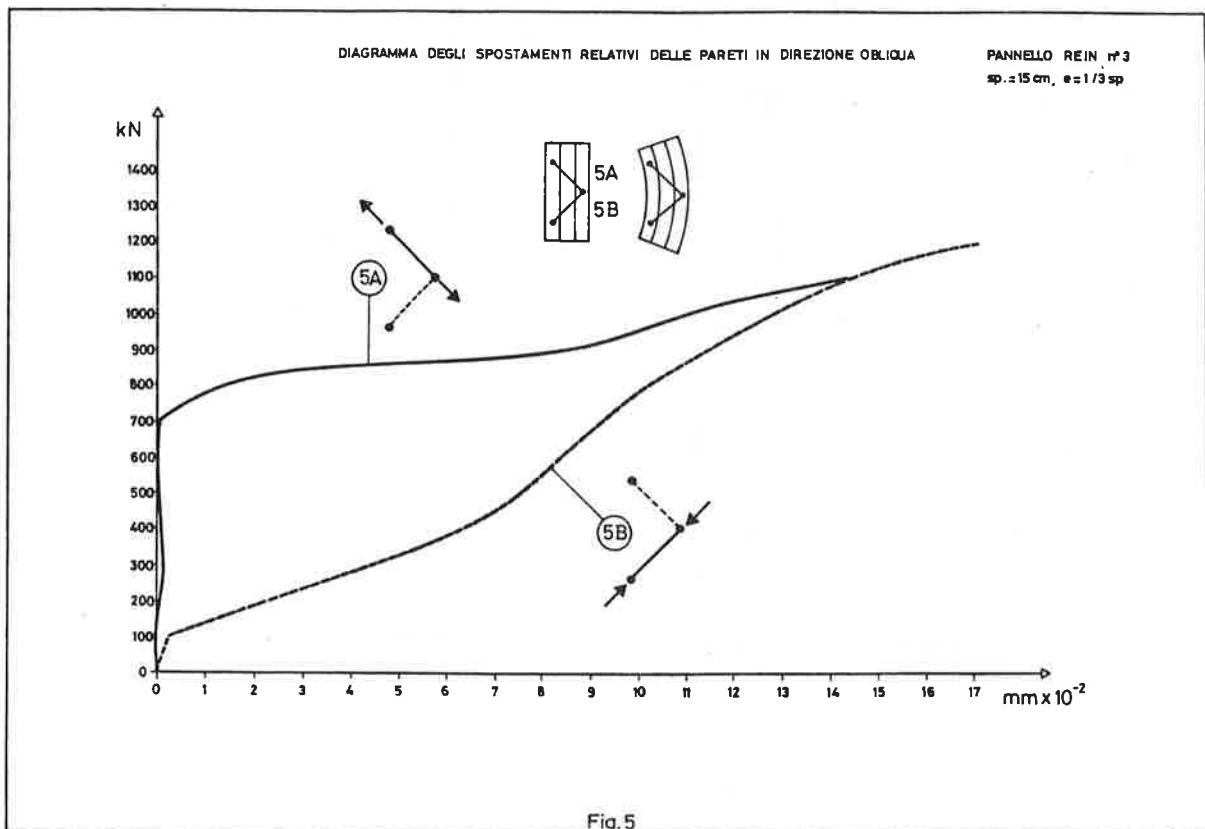
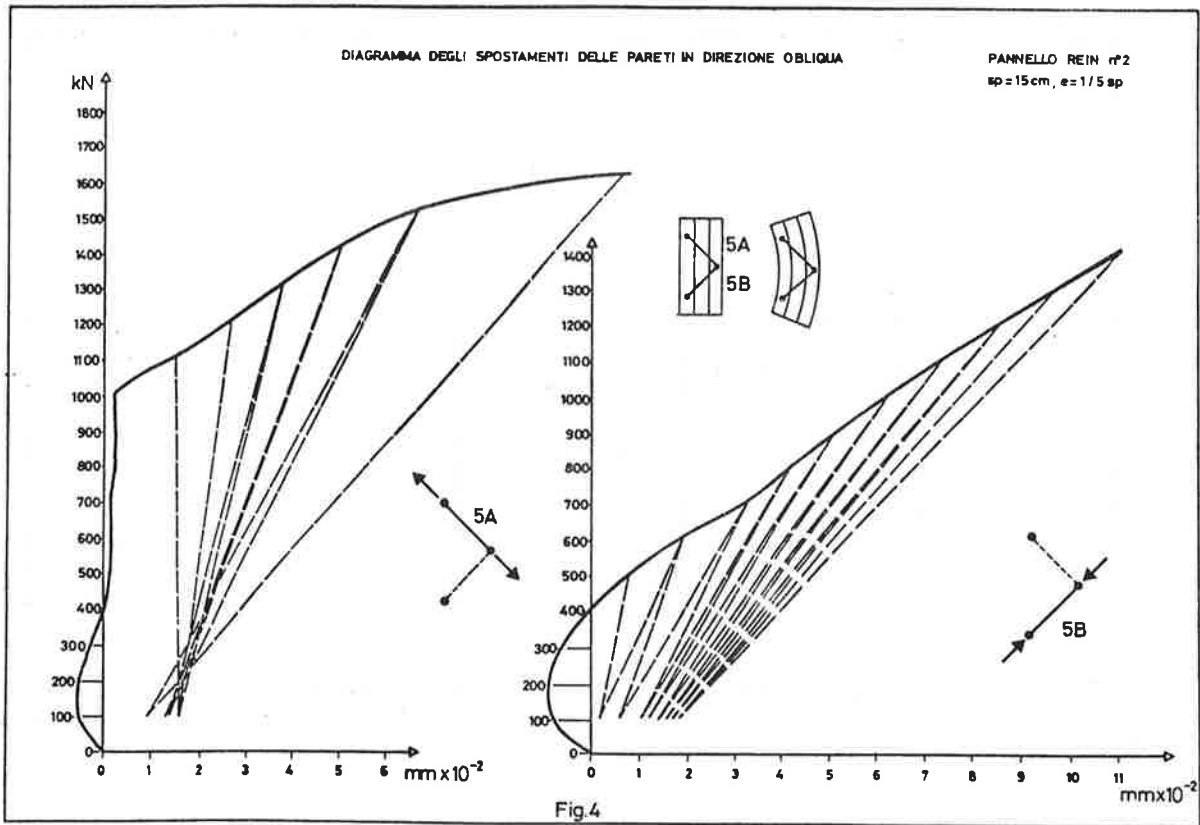
## 6. BIBLIOGRAFIA

- (I) GIACCHETTI, R. - MENDITTO, G.: Indagini sperimentali su pannelli sandwich realizzati con la tecnica dello spritzbeton, Atti del Congresso CTE 1984 sulla Industrializzazione Edilizia, Firenze 9-10-11 novembre 1984, pagg. b.13 - b.21.
- (II) MENDITTO, G. - DEZI, L.: Un esempio di edilizia industrializzata: il sistema costruttivo con il pannello REIN, La Prefabbricazione, Milano apr. 1984, pagg. 265-274.
- (III) HOLMBERG - PLEM: Behaviour of load-bearing sandwich-type structures.
- (IV) DONIDA, G. - MENDITTO, G. - SPADA, A.: Analisi dei pannelli sandwich ed abachi d'uso, Atti del Congresso CTE 1982 sulla Industrializzazione Edilizia, Verona 11-12-13-14 novembre 1982, pagg. c.51-c.80.
- (V) RAMACHANDRA, R. - VALSARAJAN, K.V.: An integral-equation solution for the finite deflection of clamped skew sandwich plate, Computers and Structures, vol. 22 n°4, 1986, pagg. 665-668.
- (VI) SMITH, C.S.: Application of folded plate analysis to bending, buckling and vibration of multilayer orthotropic sandwich beam and panels, Computers and Structures, vol. 22 n°3, 1986, pagg. 491-497.

### RINGRAZIAMENTO

Gli Autori ringraziano la R.E.I.N. di Ascoli Piceno per avere incoraggiato e sostenuto la presente ricerca.





CONFRONTO TRA GLI SPOSTAMENTI RELATIVI DELLE PARETI IN DIREZIONE ORIZZONTALE  
STRUMENTO n° 6

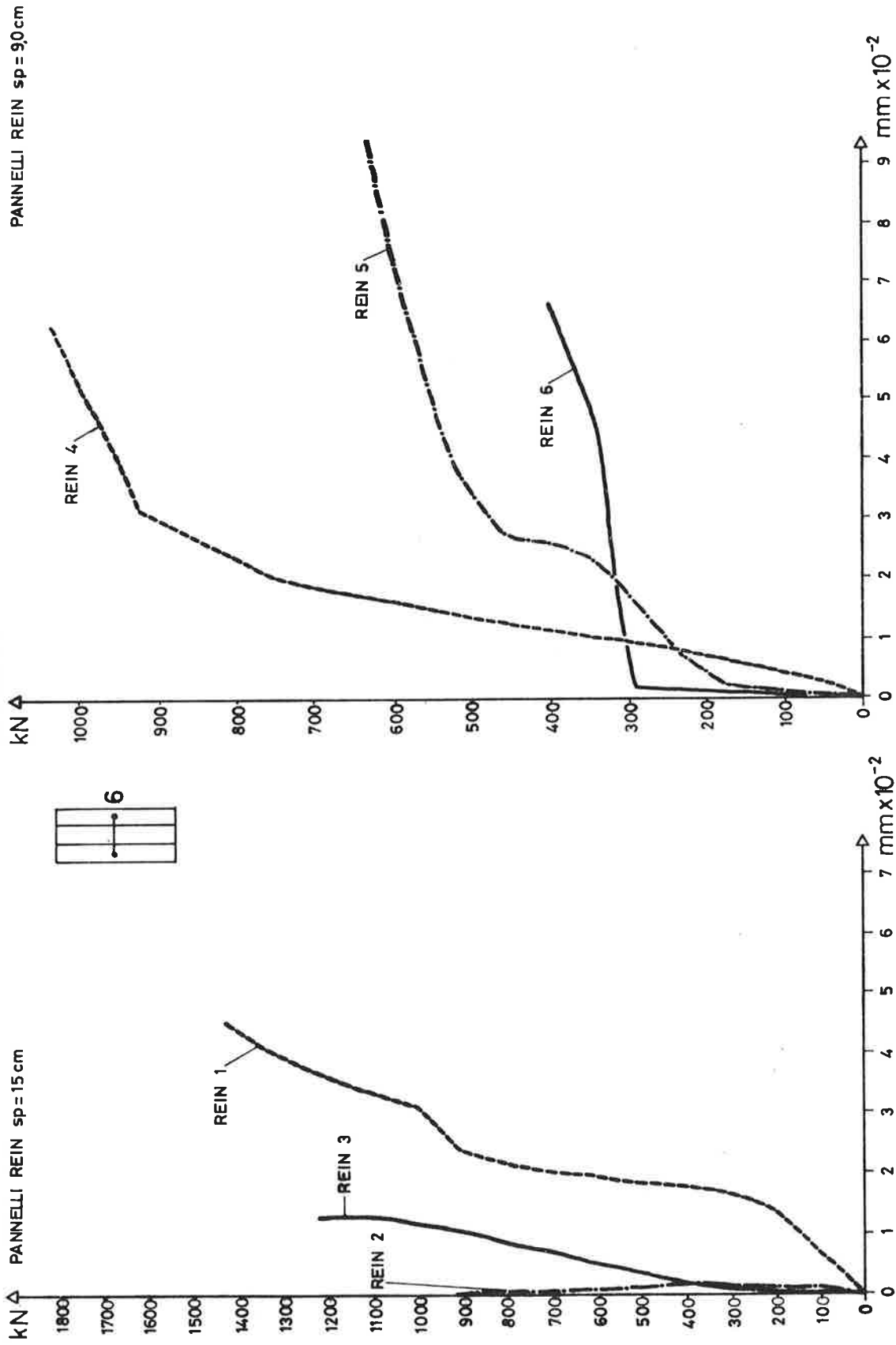
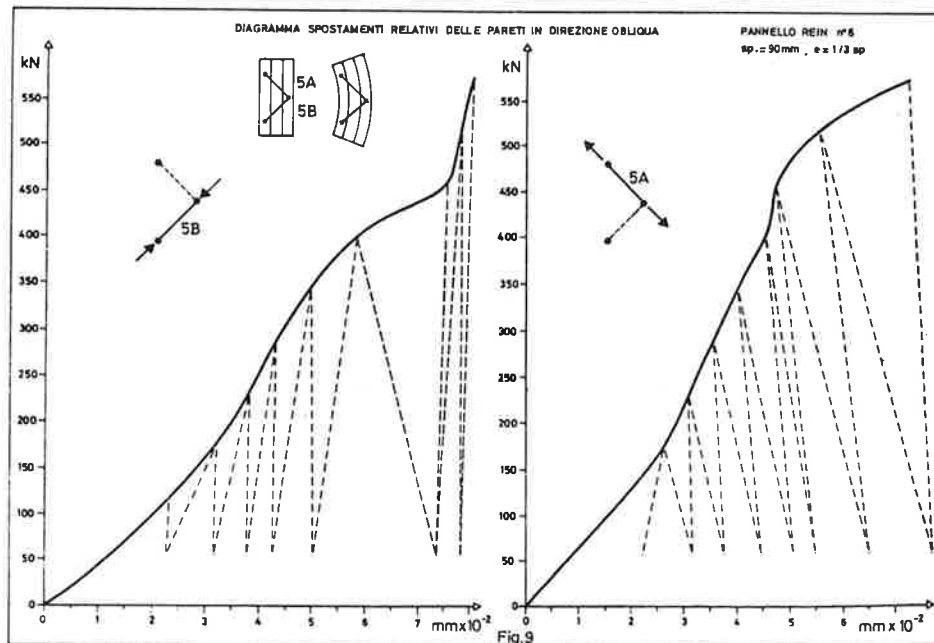
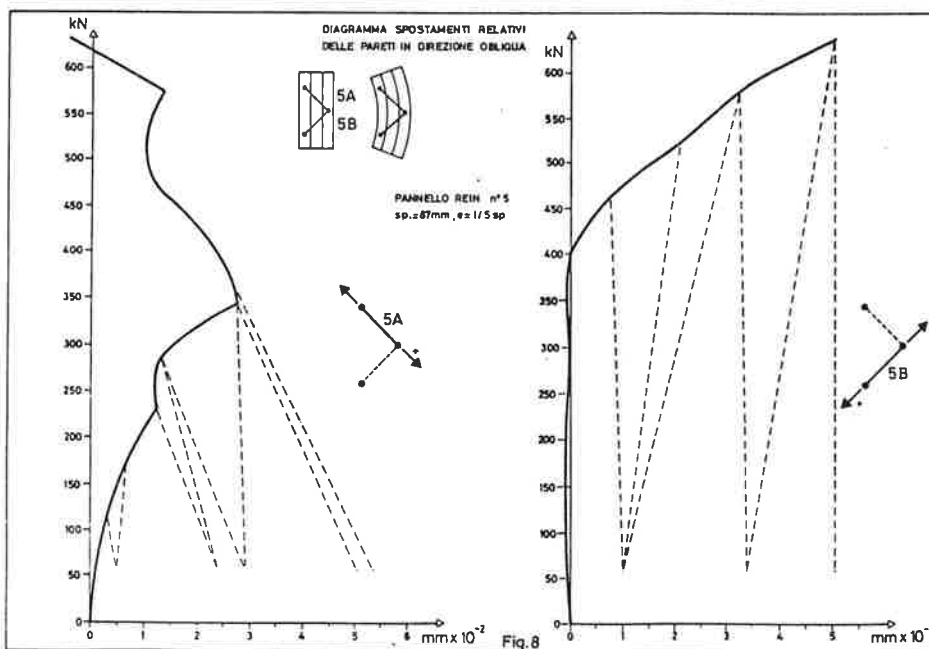
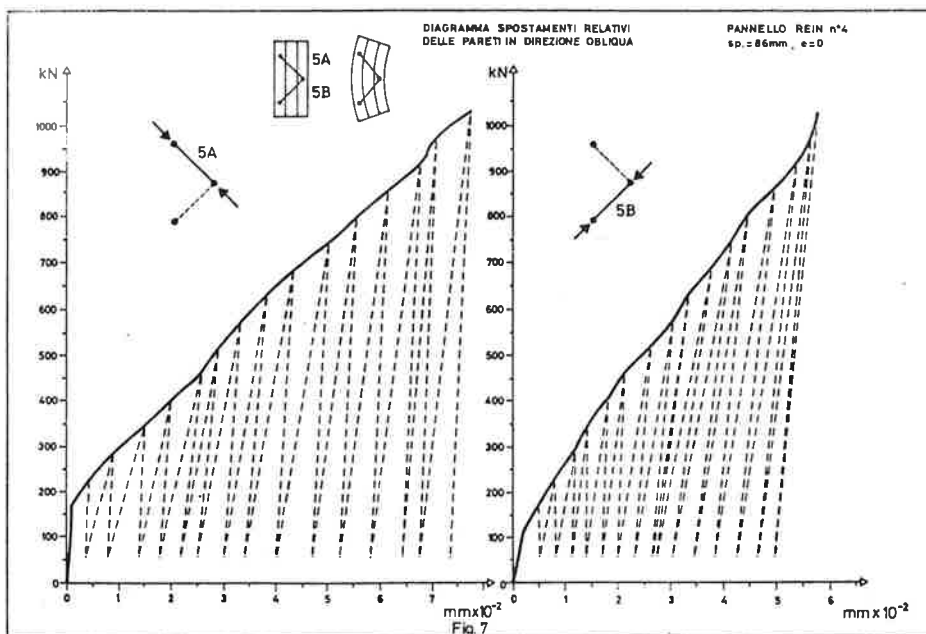
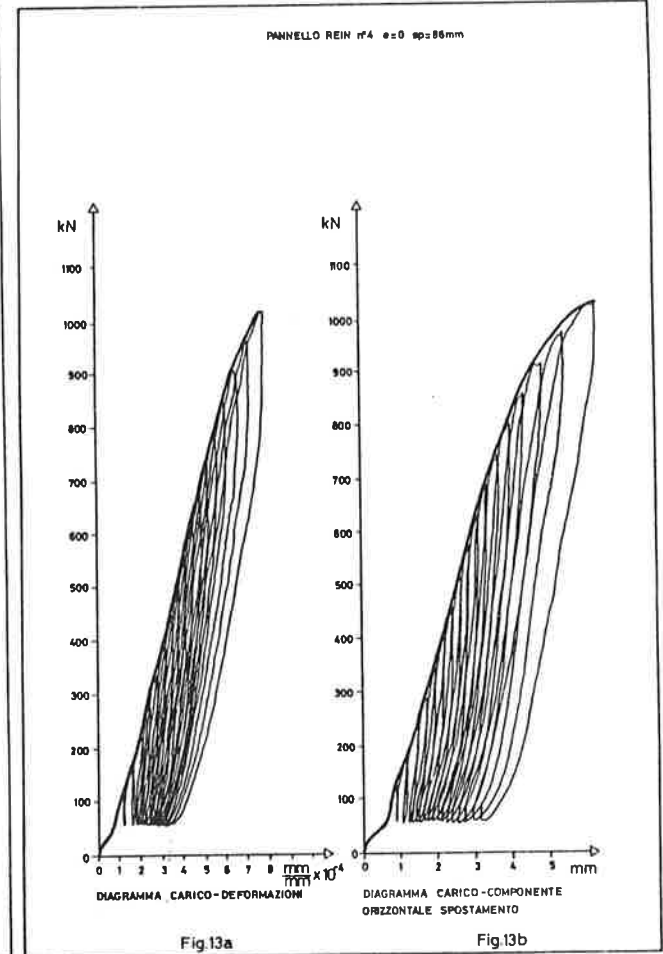
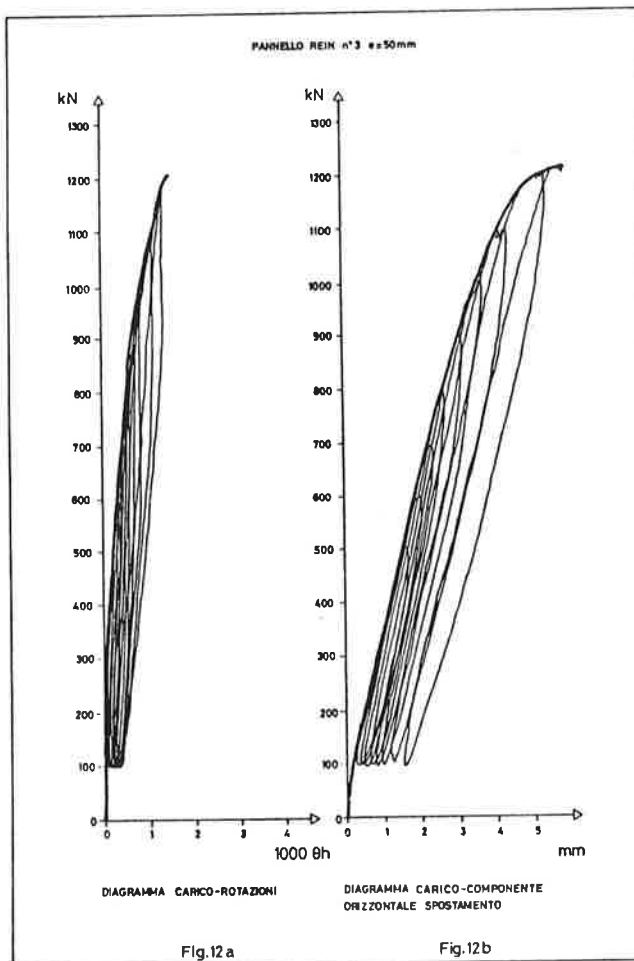
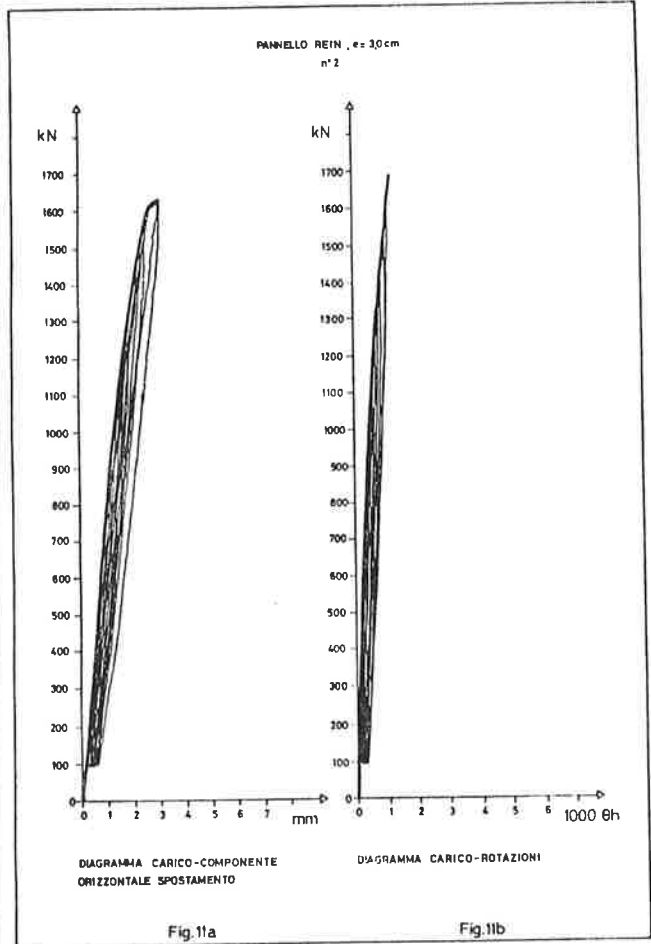
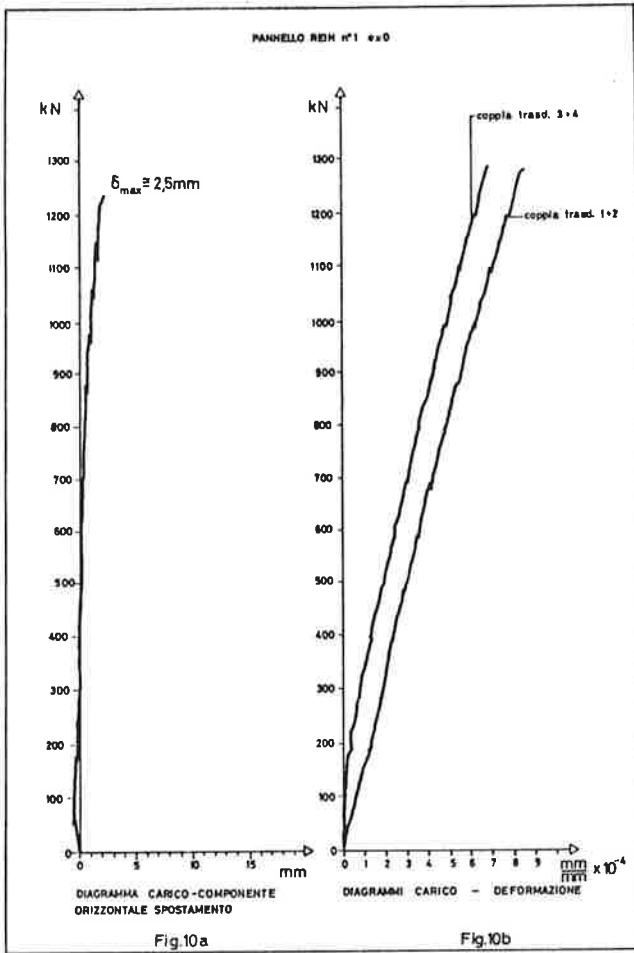


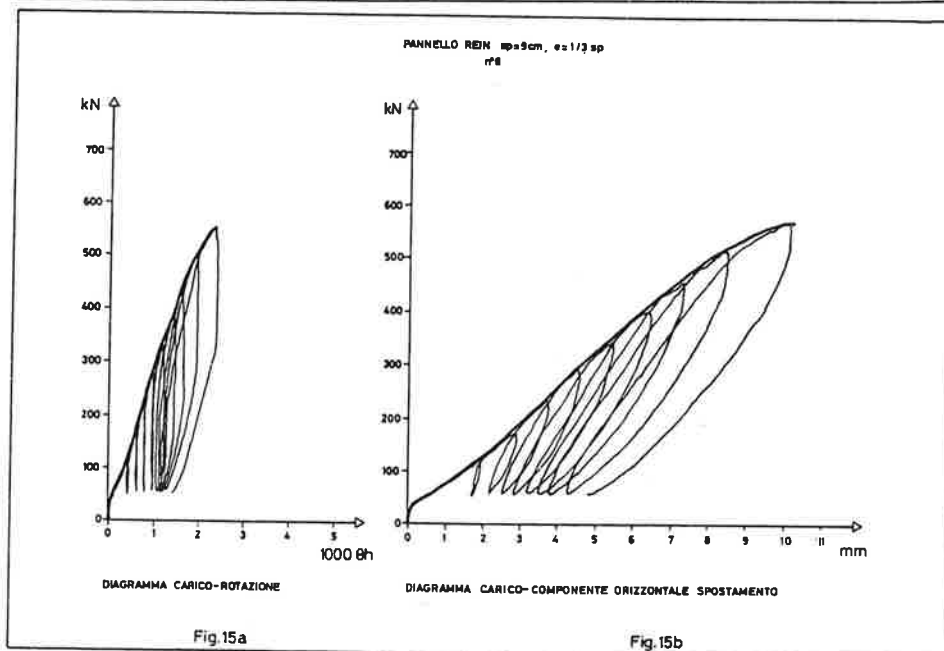
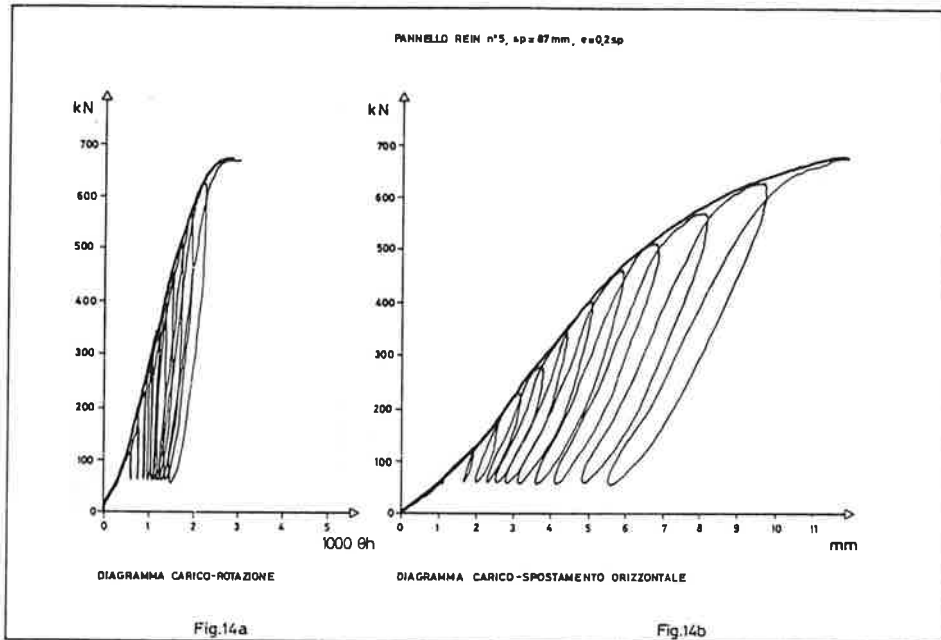
Fig. 6a

Fig. 6b









EFFETTI DELLE ETEROGENEITA' STRUTTURALI E DELLE VARIAZIONI DI SCHEMA STATICO SULL'EVOLUZIONE TEMPORALE DEL COMPORTAMENTO DI STRUTTURE DA PONTE PREFABBRICATE.

Franco MOLA

Professore Straordinario di Tecnica delle Costruzioni  
Istituto Universitario di Architettura di Venezia

Pier Giorgio MALERBA

Professore Associato di Analisi Strutturale con l'Elaboratore Elettronico  
Politecnico di Milano

Marco Andrea PISANI

Dottorando di Ricerca  
Politecnico di Milano

#### SOMMARIO

L'analisi di strutture non omogenee contenenti parti prefabbricate rese solidali mediante presollecitazione in opera o completate con getti integrativi è alquanto complessa se condotta in forma generale. Alla difficoltà di dover tener conto in maniera raffinata del comportamento dei materiali si aggiunge in molti casi l'ulteriore laboriosità di dovere descrivere dettagliatamente tutte le fasi costruttive poichè spesso le situazioni di vincolo e di schema statico subiscono variazioni in tali fasi. Nel presente lavoro viene sviluppato, con riguardo alle strutture monodimensionali, un procedimento per il calcolo di tali strutture che trattando da un lato la legge costitutiva integrale del calcestruzzo mediante una particolare formulazione matriciale e schematizzando dall'altro la struttura per elementi finiti, permette di ottenere soluzioni rigorose ed affidabili con un impegno computazionale accettabile nel contesto ingegneristico.

#### SUMMARY

The general analysis of inhomogeneous structures containing precast elements assembled by means of prestressing cables is often complex and tedious. In order to obtain reliable results it is necessary to take into account in a refined way the material behaviour and the variations of the structural static scheme during the construction phases. In the present paper, with reference to viscoelastic inhomogeneous structures containing beam elements, a new matrix method of analysis is presented. The method is based on a matrix partitioned description of the integral stress-strain law of the concrete and on the structural idealization by means of Finite Element Method. The results, are in good agreement with those deriving from exact methods of analysis and can be proposed for the current design applications.

#### 1. INTRODUZIONE

Le attuali tecniche esecutive per la costruzione di strutture da ponte

prevedono in maniera estesa l'utilizzo di parti prefabbricate da assemblare o completare in opera, nonchè la possibilità di variare lo schema statico della struttura durante le sue fasi realizzative sino a raggiungere quello definitivo che ne caratterizzerà la situazione di esercizio.

Questo modo di procedere comporta la presenza di marcate eterogeneità di comportamento reologico sia lungo l'asse della struttura sia nelle sue sezioni trasversali ed a ciò consegue, quale effetto della non affinità fra le deformazioni differite dei materiali, la comparsa di ridistribuzioni di stati di sollecitazione nella struttura e di stati di tensione nelle sezioni, fra loro interagenti e di complessa valutazione. Gli effetti prodotti dalle deformazioni differite dei materiali sono tanto più sensibili quanto più l'eterogeneità dei materiali è grande, come ad esempio avviene per le strutture costituite da una parte visco-elastica omogenea e da parti elastiche. Tipico esempio di queste situazioni sono le sezioni in cemento armato precompresso, ove l'interazione fra le armature di precompressione e la sezione in calcestruzzo danno luogo ai ben noti fenomeni di variazione della tensione dei cavi prodotta sia dalla presollecitazione ad essi imposta sia dalle azioni esterne applicate alla sezione. Nelle strutture esternamente isostatiche questo fenomeno si riduce ad una variazione dello stato tensionale nelle sezioni mentre in quelle iperstatiche si assiste ad un cambiamento nel tempo delle reazioni dei vincoli, quindi delle azioni interne, cui conseguono variazioni di tensione che si manifestano con modalità differenti rispetto alle strutture isostatiche.

Variazioni di sollecitazione di grossa entità si hanno in genere nelle strutture omogenee vincolate esternamente con vincoli elastici come ad esempio avviene nei ponti strallati ove lo stato tensionale negli elementi metallici vincolanti l'impalcato in calcestruzzo può subire modificazioni sensibili e ciò in rapporto al loro livello di deformabilità elastica paragonato a quello della struttura omogenea vincolata. Variazioni sensibili hanno luogo anche quando la tecnica esecutiva prevede l'assemblaggio in opera di tronchi di struttura resi fra loro solidali mediante la presollecitazione di idonee armature e, nella successiva formazione di vincoli esterni che modificano lo schema statico strutturale iniziale, come ad esempio avviene per i ponti in avanzamento realizzati mediante connessione con cavi di conci prefabbricati e successivo collegamento monolitico fra le parti così costruite. In questi casi la eterogeneità strutturale è connessa essenzialmente alle differenti caratteristiche reologiche dei calcestruzzi costituenti i vari conci, a causa delle loro differenti età di costruzione e può portare nel tempo a sensibili modificazioni dello stato di sollecitazione nella struttura.

Data la grande importanza tecnica connessa ai fenomeni ora discussi, sin dalle prime apparizioni delle moderne tecnologie esecutive di strutture da ponte, ed in particolare delle strutture in cemento armato precompresso, si è sempre cercato di mettere a punto tecniche di indagine e di previsione che fossero in grado di interpretare correttamente il comportamento strutturale e di quantificarlo con livelli di approssimazione accettabili, almeno nell'ambito di una trattazione ingegneristica del problema. Per quanto riguarda le strutture omogenee aventi vincoli elastici, estesamente studiate poichè di fondamentale importanza, si è recentemente giunti a definirne in maniera unitaria e rigorosa il comportamento e la loro trattazione può attualmente effettuarsi secondo una procedura completa ed esaustiva ricorrendo al Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte (R.R.F.M.), messo a punto nei lavori da /1/ a /3/. Il metodo, che si rivolge allo studio di strutture viscoelastiche omogenee in presenza di vincoli elastici, può essere con successo applicato anche alle strutture caratterizzate da eterogeneità nel comportamento del calcestruzzo dovuto all'età, purchè si adottino per descrivere la viscosità del materiale un

comportamento di invecchiamento puro, /4/, oppure un modello di invecchiamento modificato, /5/. Tali ipotesi di comportamento anche se ad un primo sguardo possono apparire non sufficientemente raffinate, danno comunque luogo a risultati non eccessivamente discosti dalla realtà e sono pertanto utilizzabili ai fini pratici, come consigliato in /6/, ove il modello di invecchiamento modificato è espressamente indicato fra le possibilità operative per la descrizione del comportamento del calcestruzzo.

Qualora si desideri un livello di precisione superiore nell'analisi di strutture reologicamente complesse e si voglia procedere adottando leggi costitutive dei materiali di caratteristiche affatto generali, non v'è che da ricorrere a formulazioni di tipo numerico per la risoluzione del problema, adottando tecniche affidabili per la risoluzione delle equazioni integrali che lo governano. A tale riguardo, la procedura che permette di ricondurre il legame tensioni-deformazioni del calcestruzzo ad un legame pseudo-elastico incrementale, /7/, si è rivelata particolarmente efficiente ed è stata ampiamente adottata per la risoluzione di svariati problemi. Si può affermare che il legame espresso in /7/ ha permesso di analizzare numericamente qualunque problema strutturale, una volta che esso sia inserito in una procedura di calcolo ed in un algoritmo risolutivo adeguati alla categoria del problema da risolvere.

Operando in questa direzione, nel lavoro /8/ si è messa a punto una formulazione matriciale della legge costitutiva /7/, estendendola dal caso monoassiale a quello triassiale ed impostandola secondo un algoritmo particolarmente compatto ed agile, che ordinando in forma opportuna i termini della matrice di rilassamento, permette di descrivere il comportamento reologico del materiale in una forma orientata all'analisi strutturale. Tale algoritmo, indicato quale Metodo della Partizione della Matrice di Rilassamento (R.M.P.M.), è già stato utilizzato per lo studio di strutture complesse mediante il metodo degli elementi finiti (F.E.M.). In particolare in /8/ si sono svolte applicazioni a strutture scatolari analizzate con il Metodo della Striscia Finita (F.S.M.).

Nel presente lavoro, con riferimento particolare alle strutture da ponte contenenti marcate eterogeneità o variazioni di schema statico, il Metodo R.M.P.M. viene utilizzato per valutarne l'evoluzione nel tempo degli stati di sollecitazione. Dapprima verrà esposta la formulazione del metodo specializzata al caso delle strutture monodimensionali; successivamente saranno mostrate alcune applicazioni ad una struttura che, relativamente ad un comportamento omogeneo della parte elasto-viscosa ed in assenza di variazioni di schema statico è già stata studiata in /9/. Ciò permette di evidenziare con chiarezza gli effetti della variabilità di comportamento reologico del calcestruzzo e di individuare le situazioni nelle quali il trascurare tali effetti può dare luogo a risultati non affidabili per la misura della sicurezza in esercizio di queste strutture.

## 2. FORMA MATRICIALE DELLE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA VISCOELASTICITA' LINEARE.

Si considerano materiali a comportamento viscoelastico lineare e con modulo di Poisson costante nel tempo soggetti ad uno stato pluriassiale di sforzi, deformazioni e distorsioni, impresse, rappresentati rispettivamente dai vettori  $\underline{\sigma}(t)$ ,  $\underline{\epsilon}(t)$ ,  $\underline{\bar{\epsilon}}(t)$ . Indicati con  $\underline{D}(t_0)$  la matrice di rigidità del materiale valutata al tempo  $t_0$  di applicazione del carico e con  $J(t, t')$  ed  $R(t, t')$  le funzioni di viscosità e di rilassamento, le equazioni fondamentali della viscoelasticità lineare possono scriversi nella seguente forma generale:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_0^t E(t_0) \underline{D}^{-1}(t_0) d\underline{\sigma}(t') J(t, t') + \underline{\bar{\varepsilon}}(t) \quad (1)$$

$$\underline{\sigma}(t) = \int_0^t \frac{1}{E(t_0)} \underline{D}(t_0) d(\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\bar{\varepsilon}}(t)) R(t, t')$$

Sviluppando tali integrali per via numerica con la regola dei trapezi, come già indicato in /7/, le equazioni fondamentali assumono una forma algebrica lineare che ben si adatta all'analisi strutturale in termini generali di continui viscoelastici non omogenei. Suddividendo l'intervallo di tempo  $(t-t_0)$  nei tempi intermedi  $t_1=t_0, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{k-1}, t_k=t$ , e indicando con gli indici  $k$  e  $i$  le quantità riferite rispettivamente ai tempi  $t_k$  e  $t_i$  e con  $\Delta_i$  i loro incrementi ad ogni passo di calcolo, si definiscono le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_k &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_k \end{vmatrix} & \Delta \underline{\sigma}_k &= \begin{vmatrix} \Delta \sigma_1 & \Delta \sigma_2 & \dots & \Delta \sigma_k \end{vmatrix} \\ \underline{\varepsilon}_k &= \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_k \end{vmatrix} & \Delta \underline{\varepsilon}_k &= \begin{vmatrix} \Delta \varepsilon_1 & \Delta \varepsilon_2 & \dots & \Delta \varepsilon_k \end{vmatrix} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}_k &= \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 & \dots & \bar{\varepsilon}_k \end{vmatrix} & \Delta \underline{\bar{\varepsilon}}_k &= \begin{vmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_1 & \Delta \bar{\varepsilon}_2 & \dots & \Delta \bar{\varepsilon}_k \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2) \quad (3)$$

Introdotte le matrici triangolari superiori  $\underline{J}$ ,  $\underline{R}$ ,  $\underline{L}$ , così definite:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \frac{1}{2} [ J(t_j, t_i) + J(t_j, t_{i-1}) ] \\ R_{ij} &= \frac{1}{2} [ R(t_j, t_i) + R(t_j, t_{i-1}) ] \\ L_{ij} &= 1 \quad (i \leq j ; i, j = 1, k) \\ R_{ij} = J_{ij} = L_{ij} &= 0 \quad (i > j ; i, j = 1, k) \end{aligned} \quad (4)$$

l'eq.(1) assume la seguente forma algebrica:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_k - \underline{\bar{\varepsilon}}_k &= E(t_0) \underline{D}^{-1}(t_0) \Delta \underline{\sigma}_k \underline{J} \\ \underline{\sigma}_k &= \frac{1}{E(t_0)} \underline{D}(t_0) (\Delta \underline{\varepsilon}_k - \Delta \underline{\bar{\varepsilon}}_k) \underline{R} \end{aligned} \quad (5)$$

Osservando che:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_k &= \Delta \underline{\sigma}_k \underline{L} \\ (\underline{\varepsilon}_k - \underline{\bar{\varepsilon}}_k) &= (\Delta \underline{\varepsilon}_k - \Delta \underline{\bar{\varepsilon}}_k) \underline{L} \end{aligned} \quad (6)$$

l'eq.(5) può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_k - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k &= E(t_0) \underline{\underline{D}}^{-1}(t_0) \underline{\underline{\sigma}}_k \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{\sigma}}_k &= \frac{1}{E(t_0)} \underline{\underline{D}}(t_0) (\underline{\underline{\epsilon}}_k - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k) \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{R}} \end{aligned} \quad (7)$$

che evidenzia legami di tipo algebrico lineare tra sforzi e deformazioni tramite le matrici  $\underline{\underline{J}}$  e  $\underline{\underline{R}}$  che descrivono il comportamento reologico del calcestruzzo rispettivamente in termini di viscosità e di rilassamento. Come noto dalla teoria della viscoelasticità lineare le funzioni  $J, R$  e così le matrici  $\underline{\underline{J}}$  e  $\underline{\underline{R}}$  non sono tra loro indipendenti. Risolvendo infatti la prima delle (7) rispetto a  $\underline{\underline{\sigma}}_k$  e confrontandola con la seconda si ottiene:

$$(\underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{J}})^{-1} = \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{R}} \quad \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{R}} \quad (8)$$

Tali equazioni esprimono in forma matriciale la nota relazione integrale tra le funzioni di viscosità e di rilassamento:

$$\int_0^t dR(t', t_0) J(t, t') = 1 \quad (9)$$

### 3. SOLUZIONE NEL TEMPO COL METODO DELLA PARTIZIONE DELLA MATRICE DI RILASSAMENTO.

Per ottenere la soluzione al tempo  $t=t_k$ , gli sforzi e le deformazioni a tale istante possono essere posti in evidenza riscrivendo le (7) nella seguente forma ripartita:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} (\underline{\underline{\epsilon}}_a - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_a) \\ (\underline{\underline{\epsilon}}_k - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k) \end{array} \right| &= E(t_0) \underline{\underline{D}}^{-1}(t_0) \left| \begin{array}{c} \Delta \underline{\underline{\sigma}}_a \\ \Delta \underline{\underline{\sigma}}_k \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \underline{\underline{J}}_{aa} & \underline{\underline{J}}_{ak} \\ \hline 0 & \underline{\underline{J}}_{kk} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{c} \underline{\underline{\sigma}}_a \\ \underline{\underline{\sigma}}_k \end{array} \right| &= \frac{1}{E(t_0)} \underline{\underline{D}}(t_0) \left| \begin{array}{c} (\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_a - \Delta \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_a) \\ (\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_k - \Delta \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \underline{\underline{R}}_{aa} & \underline{\underline{R}}_{ak} \\ \hline 0 & \underline{\underline{R}}_{kk} \end{array} \right| \end{aligned} \quad (10)$$

dove si sono indicate con  $\Delta \underline{\underline{\sigma}}_a$ ,  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_a$  e  $\Delta \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_a$  le matrici degli incrementi di sforzo e di deformazione fino al tempo  $t_{k-1}$  e con  $\underline{\underline{J}}_{ak}$ ,  $\underline{\underline{R}}_{ak}$  i vettori estratti dalle matrici di viscosità e di rilassamento così definiti:

$$\underline{\underline{J}}_{ak} = |J_{ik}| \quad ; \quad \underline{\underline{R}}_{ak} = |R_{ik}| \quad i=1, 2, \dots, k-1 \quad (11)$$

Dalle (10) si traggono i seguenti legami costitutivi:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_k - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k &= E(t_0) \underline{\underline{D}}^{-1}(t_0) (\Delta \underline{\underline{\sigma}}_a \underline{\underline{J}}_{ak} + \Delta \underline{\underline{\sigma}}_k \underline{\underline{J}}_{kk}) \\ \underline{\underline{\sigma}}_k &= \frac{1}{E(t_0)} \underline{\underline{D}}(t_0) [(\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_a - \Delta \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_a) \underline{\underline{R}}_{ak} + (\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_k - \Delta \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_k) \underline{\underline{R}}_{kk}] \end{aligned} \quad (12)$$

che, adottati nelle tecniche risolutive dell'analisi strutturale, consentono di impostare in una forma normalizzata lo studio dei continui viscoelastici non omogenei.

#### 4. ANALISI DELLE STRUTTURE COMPOSTE DA ELEMENTI MONODIMENSIONALI

Si fa riferimento all'elemento di trave mostrato in Fig. 1.a e si indicano con  $N_1, \dots, N_6$  le relative funzioni di forma (Fig.1.b):

$$N_1 = 1 - x/l \quad ; \quad N_2 = x/l \quad ; \quad N_3 = 1 - 3(x/l) + 2(x/l)^3$$

$$N_4 = x - 2x^2/l + x^3/l^2 \quad ; \quad N_5 = 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \quad ; \quad N_6 = -x^2/l + x^3/l^2$$

Adottando la simbologia usuale nel Metodo degli Elementi Finiti, si pongono in evidenza per tale  $i$ -esimo elemento:

- gli spostamenti nodali:

$$\underline{u}'_i = \begin{vmatrix} u'_{i1} & v'_{i1} & \phi'_{i1} \\ u'_{i2} & v'_{i2} & \phi'_{i2} \end{vmatrix} \quad ; \quad \underline{u}^T_i = \begin{vmatrix} u_{i1} & v_{i1} & \phi_{i1} \\ u_{i2} & v_{i2} & \phi_{i2} \end{vmatrix}$$

ed i loro incrementi al tempo  $k$   $\Delta u'_{i,k}$ ,  $\Delta u_{i,k}$

- le forze nodali:

$$\underline{f}'_i = \begin{vmatrix} f_{x'i1} & f_{y'i1} & m_{z'i1} \\ f_{x'i2} & f_{y'i2} & m_{z'i2} \end{vmatrix}$$

$$\underline{f}^T_i = \begin{vmatrix} f_{x i1} & f_{y i1} & m_{z i1} \\ f_{x i2} & f_{y i2} & m_{z i2} \end{vmatrix}$$

- le forze nodali equivalenti ai carichi  $\underline{\bar{f}}'^T_i = \begin{vmatrix} \bar{f}_x & \bar{f}_y \end{vmatrix}$  agenti lungo l'asta:

$$\underline{f}'_i{}^e = \begin{vmatrix} f_{x'i1}^e & f_{y'i1}^e & m_{z'i1}^e \\ f_{x'i2}^e & f_{y'i2}^e & m_{z'i2}^e \end{vmatrix}$$

$$\underline{f}^e_i = \begin{vmatrix} f_{x i1} & f_{y i1} & m_{z i1} \\ f_{x i2} & f_{y i2} & m_{z i2} \end{vmatrix}$$

- la matrice di trasferimento delle coordinate:

$$\underline{T}_i = \begin{vmatrix} \underline{T}_{i0} & 0 \\ 0 & \underline{T}_{i0} \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \underline{T}_{i0} = \begin{vmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- le funzioni di spostamento:

$$\underline{S}'_i = \begin{vmatrix} u' \\ v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{vmatrix} \quad \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{T}_i^T \underline{u}_i$$

- le deformazioni elastiche:

$$\underline{\epsilon}'_i = \begin{vmatrix} \epsilon \\ \chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} du'/dx \\ d^2v'/dx^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dN_1/dx & 0 & 0 & dN_2/dx & 0 & 0 \\ 0 & d^2N_3/dx^2 & d^2N_4/dx^2 & 0 & d^2N_5/dx^2 & d^2N_6/dx^2 \end{vmatrix} \underline{u}'_i =$$



$$= \underline{B}'_i \underline{u}'_i = \underline{B}'_i \underline{T}_i^T \underline{u}_i = \underline{B}_i \underline{u}_i$$

- le deformazioni anelastiche ed i loro incrementi al tempo  $t=t_k$  :

$$\underline{\bar{\epsilon}}_i = \begin{vmatrix} \bar{\epsilon}_i \\ \bar{\chi}_i \end{vmatrix} ; \quad \Delta \underline{\bar{\epsilon}}_i = \begin{vmatrix} \Delta \bar{\epsilon}_i \\ \Delta \bar{\chi}_i \end{vmatrix}$$

- gli sforzi:

$$\underline{\sigma}_i = \begin{vmatrix} n_i \\ m_i \end{vmatrix} = E_i(t_0) \begin{vmatrix} A_i & 0 \\ 0 & J_i \end{vmatrix} (\underline{\epsilon}_i - \underline{\bar{\epsilon}}_i) = D_i(t_0) \underline{B}_i \underline{u}_i - D_i(t_0) \underline{\bar{\epsilon}}_i$$

Considerando una struttura composta da (ne) elementi e da (nn) punti nodali quale, ad esempio, quella rappresentata in Fig.2 e facendo riferimento al tempo  $t=t_k$ , tramite il Principio degli Spostamenti Virtuali, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{ne} \int_{l_i} \underline{B}_i^T \underline{\sigma}_{i,k} dx = \sum_{i=1}^{ne} \int_{l_i} \underline{N}_i^T \underline{\bar{f}}_{i,k} dx + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k} \quad (13)$$

dove  $\underline{F}_{j,k}^T = \{ F_{jx,k} \ F_{jy,k} \ M_{jz,k} \}$  è il vettore delle forze applicate al generico nodo  $j$  a  $t=t_k$ .

Ricordando il legame costitutivo (12) ed adattandolo al caso dell'asta, si ha :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) \underline{B}_i dx \Delta u_{-i,k} - \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) \Delta \bar{\epsilon}_{-i,k} dx + \\ & + \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) \underline{B}_i dx \Delta u_{=i,a} R_{i,ak} - \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) \Delta \bar{\epsilon}_{=i,a} R_{i,ak} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Delta \bar{\epsilon}_{=i,a} R_{i,ak} = \sum_{i=1}^{ne} \int_{l_i} \underline{N}_i^T \underline{\bar{f}}_{i,k} dx + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k}$$

Ipotizzando per semplicità che le deformazioni anelastiche  $\Delta \bar{\epsilon}_i$  siano costanti in  $l_i$  ed introducendo le eguaglianze:

$$\underline{K}_i = \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) \underline{B}_i dx ; \quad \underline{F}_{\bar{\epsilon},i} = \int_{l_i} \underline{B}_i^T D_i(t_0) dx \quad (15)$$

$$\underline{f}_{-i,k}^e = \int_{l_i} \underline{N}_i^T \underline{\bar{f}}_{i,k} dx$$

l'eq.(14) diviene:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \underline{K}_i \Delta u_{-i,k} = \sum_{i=1}^{ne} \underline{f}_{-i,k}^e + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k} + \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \underline{F}_{\bar{\epsilon},i} \Delta \bar{\epsilon}_{-i,k} - \\ & + \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \underline{K}_i \Delta u_{=i,a} R_{i,ak} + \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \underline{F}_{\bar{\epsilon},i} \Delta \bar{\epsilon}_{=i,a} R_{i,ak} \end{aligned} \quad (16)$$

che, in forma assemblata, può riscriversi:

$$\tilde{K}_{-k} \Delta \tilde{U}_{-k} = \tilde{f}_{-k}^e + \tilde{F}_{-k} + \frac{\tilde{F}_{-}}{\tilde{\varepsilon}_{,k}} - \frac{\tilde{F}_{=c}}{\tilde{\varepsilon}_{=c}} \Delta \tilde{U}_{=a} + \frac{\tilde{F}_{-}}{\tilde{\varepsilon}_{,a}} \quad (17)$$

Tale equazione fornisce al tempo  $t=t_k$  gli incrementi di spostamento  $\Delta \tilde{U}_k$ . Nel caso particolare di continui omogenei, la matrice di rilassamento è la stessa per tutti gli elementi e la equazione (17) diviene:

$$\begin{aligned} \frac{R_{kk}}{E(t_0)} \tilde{K}_{=e,0} \Delta \tilde{U}_{-k} &= \tilde{f}_{-k}^e + \tilde{F}_{-k} + \frac{1}{E(t_0)} \frac{\tilde{F}_{-}}{\tilde{\varepsilon}_{,0}} R_{kk} - \frac{1}{E(t_0)} \tilde{K}_{=e,0} \Delta \tilde{U}_{=a} R_{ak} + \\ &+ \frac{1}{E(t_0)} \frac{\tilde{F}_{-}}{\tilde{\varepsilon}_{,0}} R_{ak} \end{aligned} \quad (18)$$

ciò che consente di riottenere gli enunciati dei teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare.

La soluzione proposta per il problema strutturale fa ricorso alle funzioni di rilassamento  $R$ , che però non sono in genere assegnate in forma esplicita dai legami costitutivi previsti dalle Normative /6/, poichè, come noto, la maggior parte dei dati sperimentali porta a definire le funzioni di viscosità  $J$ . Per sviluppare il problema nella forma esposta è quindi necessario valutare dapprima le funzioni di rilassamento, facendo così prevedere una maggiore complessità risolutiva. In realtà sviluppati i legami costitutivi in forma matriciale ed impostata la generica matrice di viscosità  $\underline{J}$ , la matrice di rilassamento si ottiene con immediatezza dalla (8) :

$$\underline{R}_i = \underline{L} \underline{J}_i^{-1} \underline{L} \quad (19)$$

ciò che consente, in ultima analisi, di impostare la soluzione del problema strutturale mediante equazioni di equilibrio con incogniti gli spostamenti e di utilizzare per la definizione delle caratteristiche reologiche ancora le funzioni di viscosità in luogo di quelle di rilassamento.

## 5. APPLICAZIONE AD UNA STRUTTURA DA PONTE

Si consideri la struttura di Fig.2, che schematizza un ponte strallato realizzato mediante la costruzione e la successiva solidarizzazione di due strutture autoportanti costituite dalla pila, da sei stralli e da metà impalcato. La sola struttura costituente metà impalcato, nell'ipotesi di omogeneità del calcestruzzo è stata studiata in /9/ con il metodo R.R.F.M, adottando per la descrizione del comportamento viscoso del calcestruzzo la formulazione generale proposta dal CEB,(6). Nel presente lavoro, oltre al caso già studiato, che costituisce un indispensabile elemento di confronto, vengono analizzati altri tre casi, connessi a differente disomogeneità del materiale e variazione dello schema statico strutturale. Precisamente, i casi studiati sono:

- 1-struttura omogenea singola, azioni applicate in  $t_0=28$  giorni, da confrontare con quanto ottenuto in /9/;
- 2-struttura disomogenea singola, caratterizzata da un'età di 112 giorni per il ritto e di 56, 28, 14 giorni per gli elementi di impalcato compresi tra due stralli successivi ed estendentesi dal ritto verso l'esterno. Azioni applicate al tempo  $t_0=112$  giorni;
- 3-struttura omogenea completa, azioni applicate in  $t_0=112$  giorni;

4-due strutture omogenee uguali con azioni applicate in  $t_0=112$  giorni e rese solidali alla loro estremità comune al tempo  $t_0^*=126$  giorni.

I risultati più significativi sono riportati nelle Fig.3a,b,c e Fig.4a,b,c che mostrano rispettivamente l'andamento nel tempo delle caratteristiche flettenti e del tiro negli stralli.

I valori ottenuti, relativamente al primo problema sono praticamente coincidenti con quelli esposti in /9/ e mostrano una sensibile variazione delle azioni negli stralli. In particolare tutti gli stralli subiscono un incremento di sollecitazione, crescente passando dallo strallo più esterno, ove la variazione rispetto al valore iniziale è di circa del 6% a quello più interno ove tale variazione raggiunge il 25%. La struttura tende ad acquisire il diagramma di sollecitazione che essa avrebbe già inizialmente se gli stralli fossero rigidi e conseguentemente il regime di sollecitazioni nel calcestruzzo tende ad essere meglio distribuito lungo la struttura, riducendo drasticamente i picchi iniziali che si hanno in corrispondenza allo strallo più interno ed alla pila. L'incremento di sollecitazione negli stralli avviene in virtù degli accresciuti spostamenti verticali che si hanno per effetti viscosi nel loro punto di attacco alla struttura, e vi è pertanto la necessità di dover tenere conto in modo affidabile di tali spostamenti soprattutto nei casi in cui si vogliano solidarizzare due strutture costruite separatamente.

L'eterogeneità strutturale presente nel caso 2 dà luogo già ad una differenza nella soluzione elastica al tempo  $t_0=112$  giorni, la cui evoluzione peraltro avviene rispecchiando variazioni nel tiro degli stralli dello stesso ordine di grandezza del caso precedente. Gli scostamenti tra le azioni negli stralli sono pertanto modeste rispetto al caso 1 cioè, che comporta variazioni ancora più basse nelle sollecitazioni nell'impalcato di calcestruzzo. Si può pertanto affermare che l'eterogeneità strutturale può essere ignorata senza commettere errori rilevanti. Il problema trattato in 3, al di là della maggiore complessità della struttura, ha le medesime caratteristiche di quello trattato in 1. In particolare si osserva un incremento di sollecitazione in tutti gli stralli, che tendono ad acquistare quello che in essi ci sarebbe se fossero rigidi; congruentemente lo stato di sollecitazione nel calcestruzzo si riduce tendendo ad assomigliare a quello di trave continua su appoggi rigidi. Si osservi anche in questo caso la netta variabilità di tale stato e la conseguente necessità di dover tener conto degli effetti viscosi nel dimensionamento e nella misura della sicurezza strutturale. Infine in 4, si osserva la variabilità dello stato tensionale nella struttura qualora essa fosse costruita in due parti separate e poi solidarizzate alla loro estremità comune. Se si trascura la piccola e del tutto trascurabile differenza esistente fra il tempo di carico (112 giorni) e quello di solidarizzazione (126 giorni), i casi 3 e 4 si riferiscono a situazioni pressochè identiche quanto a comportamento del materiale. In 4 si osserva però una sensibile variazione di sollecitazione negli stralli, si da portare la sollecitazione nel calcestruzzo su livelli prossimi a quelli del caso 3. Questo fatto si spiega pensando che la differenza fra i due casi consiste, in termini di spostamenti iniziali, nella esistenza nel caso 4, di una rotazione relativa fra le due sezioni di solidarizzazione pari alla somma di quelle prodotte dalle azioni per i 14 giorni intercorrenti fra la loro applicazione e la solidarizzazione. Si può pertanto pensare di rendere i due problemi identici, sovrapponendo al caso 4 la situazione di carico consistente in un forzamento applicato a  $t_0=126$  giorni tale da eliminare la rotazione relativa delle due sezioni che si è manifestata nei 14 giorni precedenti. E poichè questa seconda condizione si riduce nel tempo per effetto del rilassamento del calcestruzzo in misura dipendente dalla deformabilità elastica della parte in calcestruzzo e di quella degli stralli, si comprende come il

caso 4 nel tempo tenda verso il caso 3, in misura più o meno accentuata in relazione al rilassamento della struttura.

## 6. CONCLUSIONI

L'analisi di strutture non omogenee deve tener conto dei fenomeni reologici che si manifestano nel tempo nel calcestruzzo. I metodi di analisi devono da un lato poter descrivere in modo corretto il comportamento dei materiali ed essere governati da algoritmi che pur raffinati possano essere ben compresi e utilizzati nelle operazioni di progettazione e misura della sicurezza delle strutture. Per le strutture omogenee con vincoli elastici il metodo R.R.F.M. è senza dubbio il più indicato poichè a fianco della sua completa generalità e precisione permette un continuo controllo del fenomeno fisico e, mediante la analisi e la possibilità di variare i fattori fondamentali che regolano il processo di calcolo mette il progettista in grado di modificare i risultati orientandoli verso quelli più favorevoli. In presenza di marcate eterogeneità di comportamento del calcestruzzo, il metodo R.M.P.M. è un mezzo estremamente utile e di grande precisione, permettendo, a fronte di non eccessivi oneri di calcolo, di ottenere risultati pienamente affidabili. Tale metodo è pertanto sempre più indicato al crescere della eterogeneità e della complessità strutturale e la sua formulazione, strettamente legata alla tecnica di risoluzione delle strutture per elementi finiti, gli conferisce le caratteristiche di una procedura di calcolo del tutto generale ed esaustiva di qualunque struttura caratterizzata da materiali a comportamento elasto-viscoso lineare.

## RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano gli ingegneri Giuliana Calore e Giuseppe Colombo per l'attiva collaborazione prestata nello svolgimento della parte numerica.

## BIBLIOGRAFIA

- /1/ Mola, F., Metodo generale e Metodo approssimato per la risoluzione di strutture non omogenee a comportamento elasto-viscoso lineare, Studi e Ricerche, Vol.1, Italcementi, Bergamo, 1979.
- /2/ Mola, F., Il Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte nella risoluzione di strutture elasto-viscose non omogenee a modulo elastico variabile nel tempo, Studi e Ricerche, Vol.3, Italcementi, Bergamo, 1981.
- /3/ Mola, F., Applicazioni del Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte all'analisi di strutture viscoelastiche non omogenee, Studi e Ricerche, Vol.4, Italcementi, Bergamo, 1982.
- /4/ Dischinger, F., Untersuchungen über die Kincksicherheit die Elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Der Bauingenieur, Vol.18, 1937, Vol.20, 1939.
- /5/ Rusch, H., Jungwirth, D., Hilsdorf, H., Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons, Beton und Stahlbetonbau, Vol.68, 1973.
- /6/ FIP/CEB, Manual "Structural effects of time-dependent behaviour of concrete", CEB, Bulletin d'Information No.142,142bis, Georgi Publishing Co., Saint-Saphorin, 1984.
- /7/ Bazant, Z.P., Theory of creep and shrinkage in concrete structures, a

precis of recent developments, *Mechanics Today*, Vol.2, Pergamon Press, London, 1975.

- /8/ Malerba, P.G., Mola, F., Viscoelastic analysis of concrete box structures with consideration of material inhomogeneities, differential shrinkage and non linear thermal variations, *Trans. of the Fourth RILEM Int. Symp. on Creep and Shrinkage of Concrete, Mathematical Modeling*, Northwestern Univ., Evanston, Illinois, August 26-29, 1986
- /9/ Chiorino, M.A., Creazza, G., Mola, F., Napoli, P., Analysis of aging viscoelastic structures with n-redundant elastic restraints, *Trans. of the Fourth RILEM Int. Symp. on Creep and Shrinkage of Concrete, Mathematical Modeling*, Northwestern Univ., Evanston, Illinois, August 26-29, 1986.

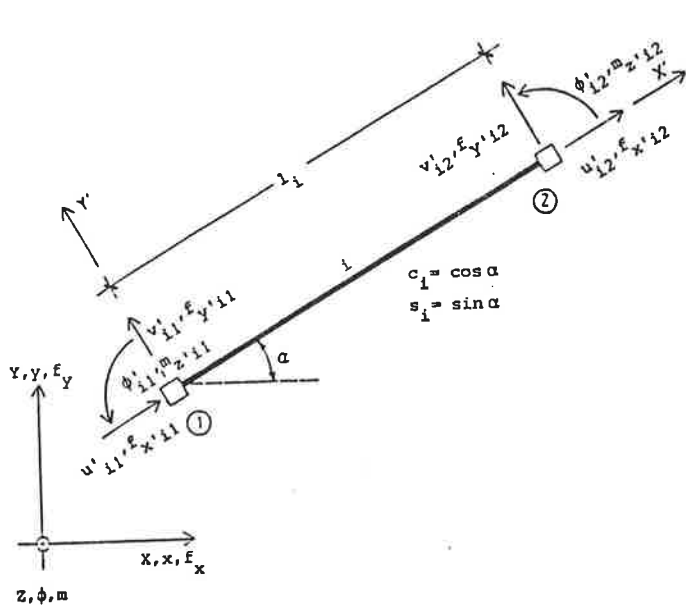


Fig.1a - Elemento trave adottato per la modellazione strutturale.

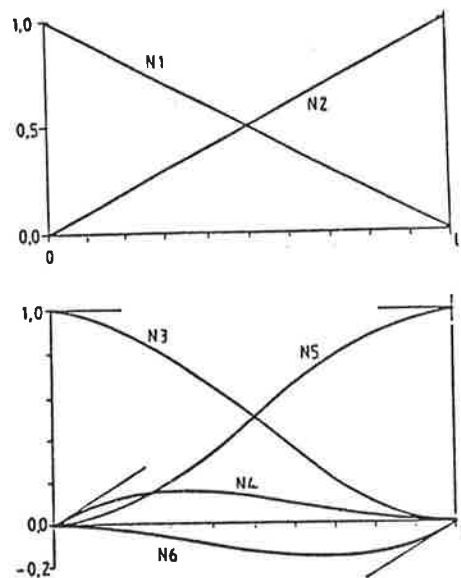


Fig.1b - Funzioni di forma da  $N_1$  a  $N_6$ .

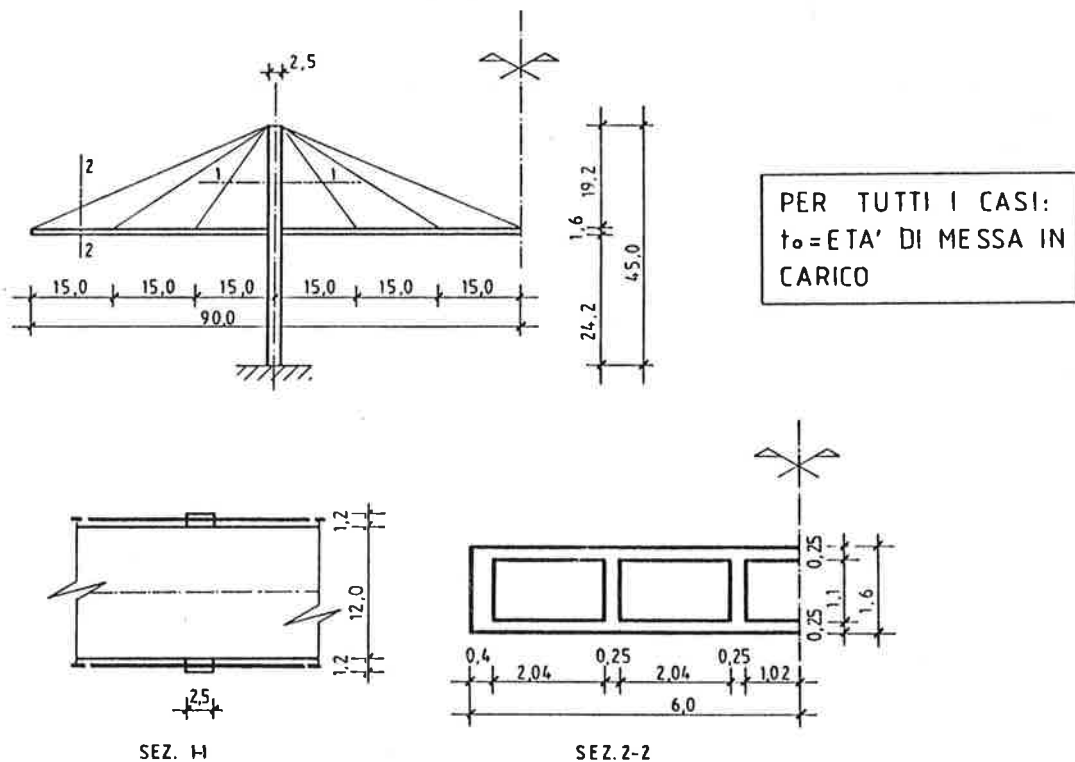


Fig.2a - Schema del ponte strallato studiato nelle applicazioni numeriche.

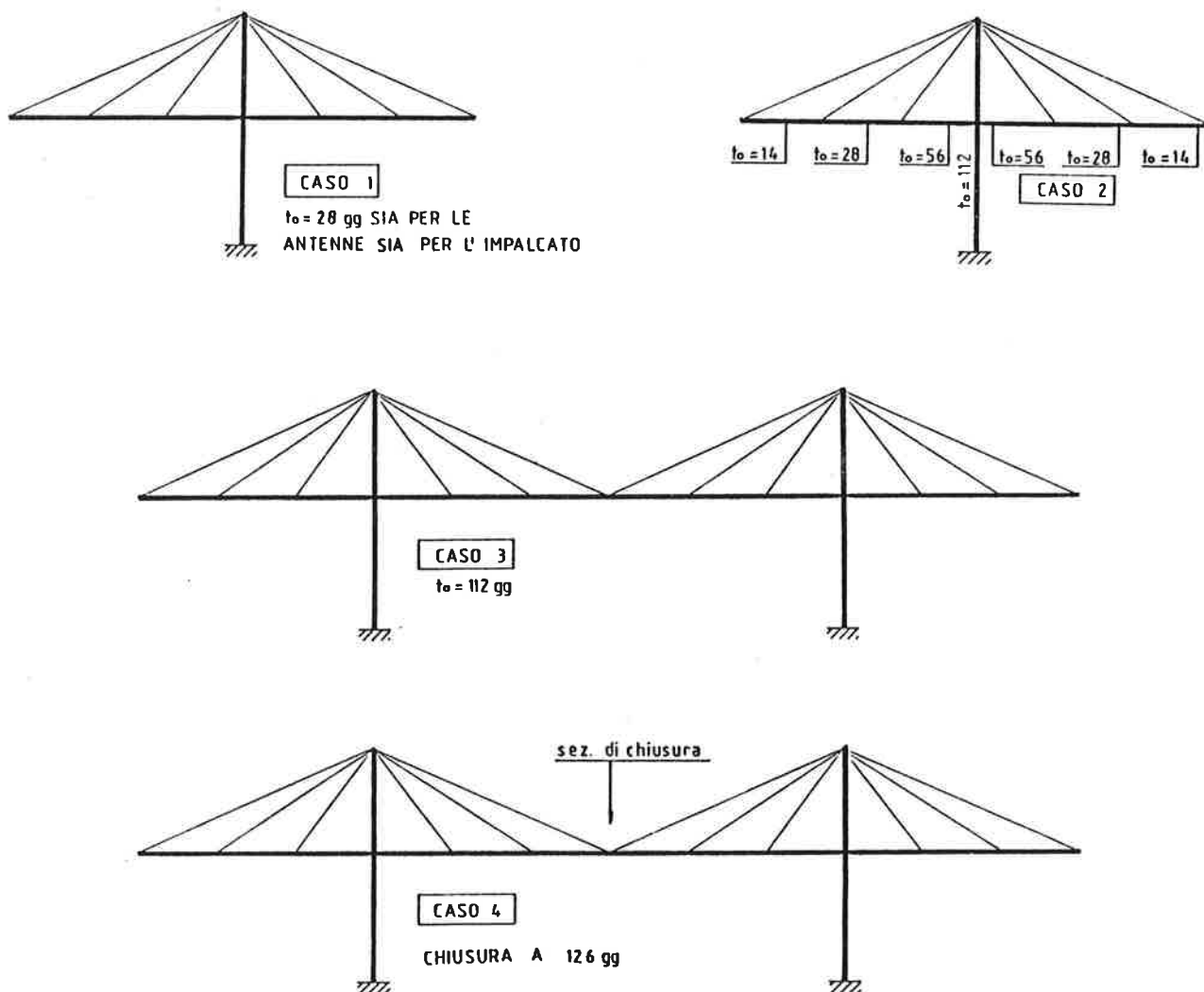


Fig.2b - Situazioni statiche esaminate.

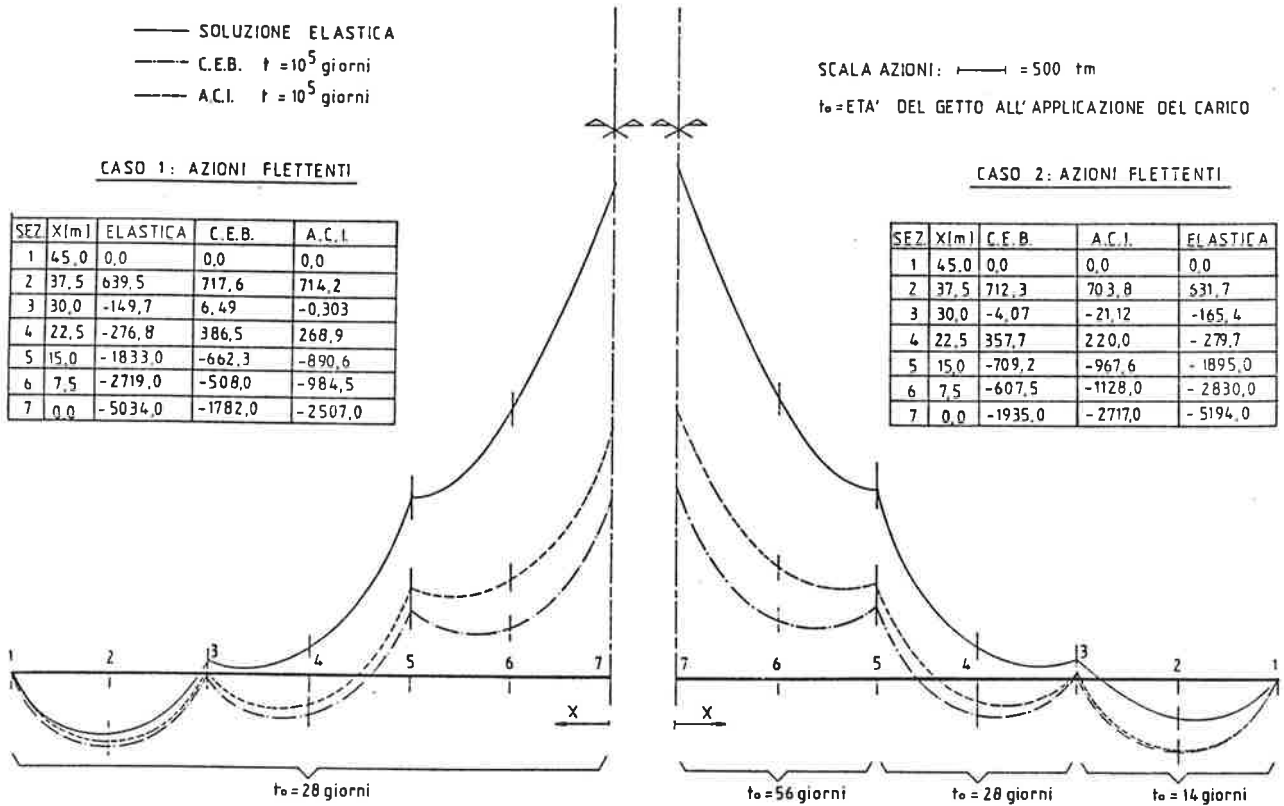


Fig.3a - Variazione nel tempo delle caratteristiche flettenti sull'impalcato in calcestruzzo per i casi 1 e 2.

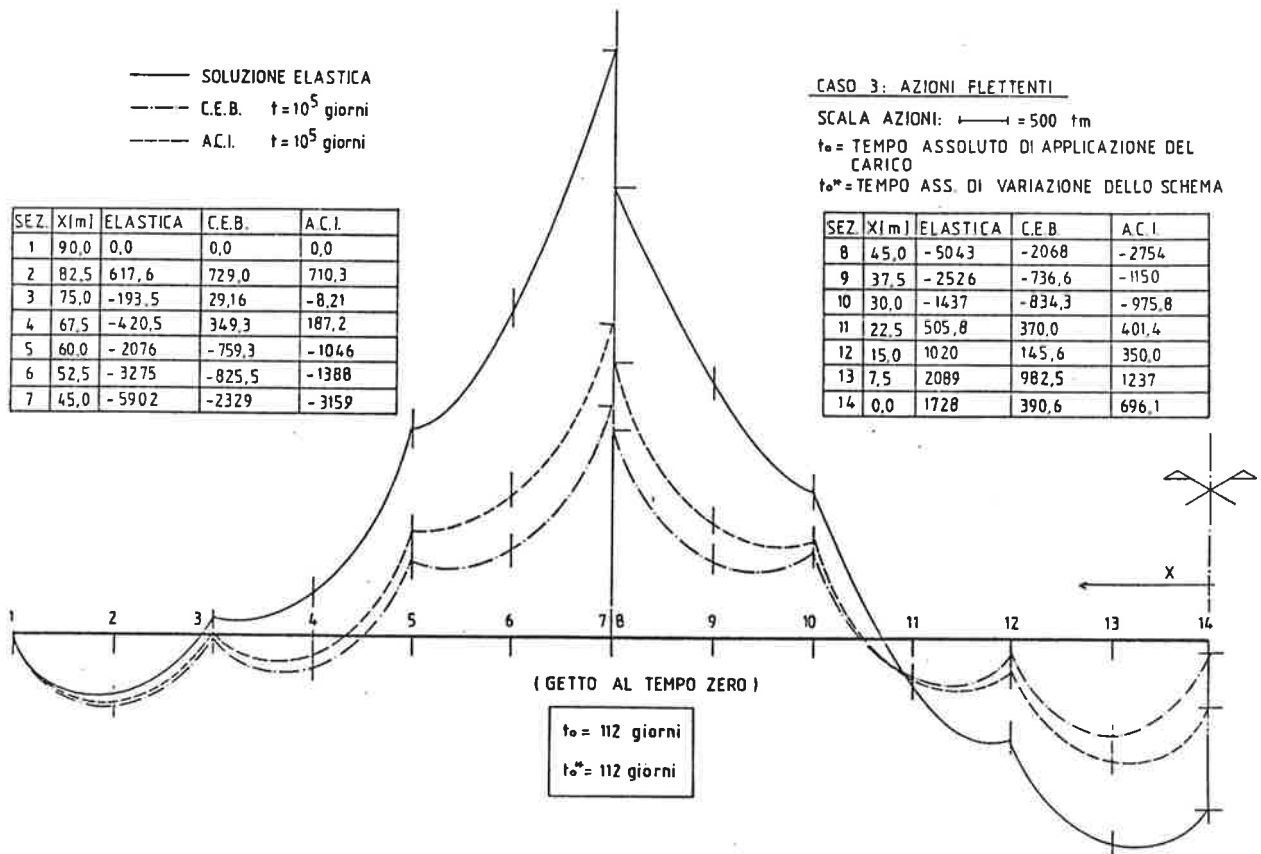


Fig.3b - Variazione nel tempo delle caratteristiche flettenti sull'impalcato in calcestruzzo per il caso 3.

— SOLUZIONE ELASTICA  $t = 112$  giorni  
 - - - C.E.B.  $t = 10^5$  giorni  
 - - - A.C.I.  $t = 10^5$  giorni

CASO 4: AZIONI FLETTENTI

SCALA AZIONI:  $\rightarrow = 500$  tm

SEZ	X(m)	ELASTICA	C.E.B.	A.C.I.
1	90,0	0,0	0,0	0,0
2	82,5	626	723,4	707,2
3	75,0	-176,8	17,97	-14,34
4	67,5	-349,7	340,4	194,9
5	60,0	-1951	-766	-1205
6	52,5	-2922	-731,9	-1231
7	45,0	-5322	-2126	-2866

SEZ	X(m)	ELASTICA	C.E.B.	A.C.I.
8	45,0	-5322	-2219	-2928
9	37,5	-2922	-786,8	-1269
10	30,0	-1951	-783,8	-1040
11	22,5	-349,7	291,5	157,7
12	15,0	-176,8	-62,0	-73,67
13	7,5	626	607,2	622,8
14	0,0	0,0	-152,3	-109,4

$t_0$  = TEMPO ASSOLUTO DI APPLICAZIONE DEL CARICO  
 $t_0^*$  = TEMPO ASS. DI VARIAZIONE DELLO SCHEMA STATICO  
 (GETTO AL TEMPO ZERO)

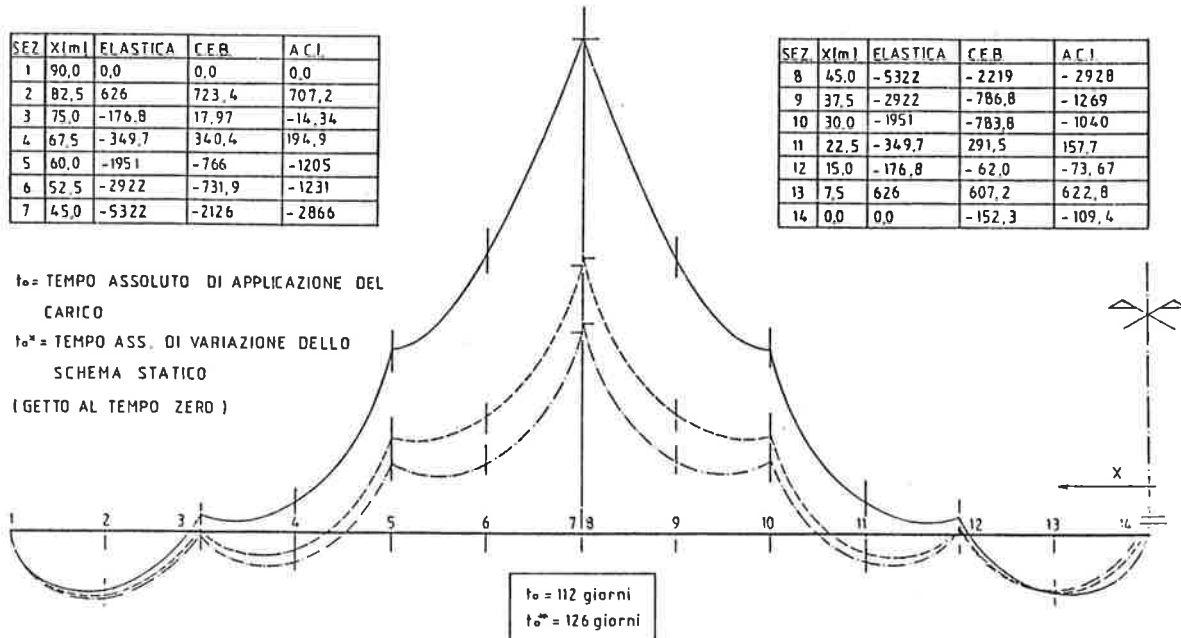


Fig.3c - Variazione nel tempo delle caratteristiche flettenti sull'impalcato in calcestruzzo per il caso 4.

CASO 1: AZIONE NEGLI STRALLI

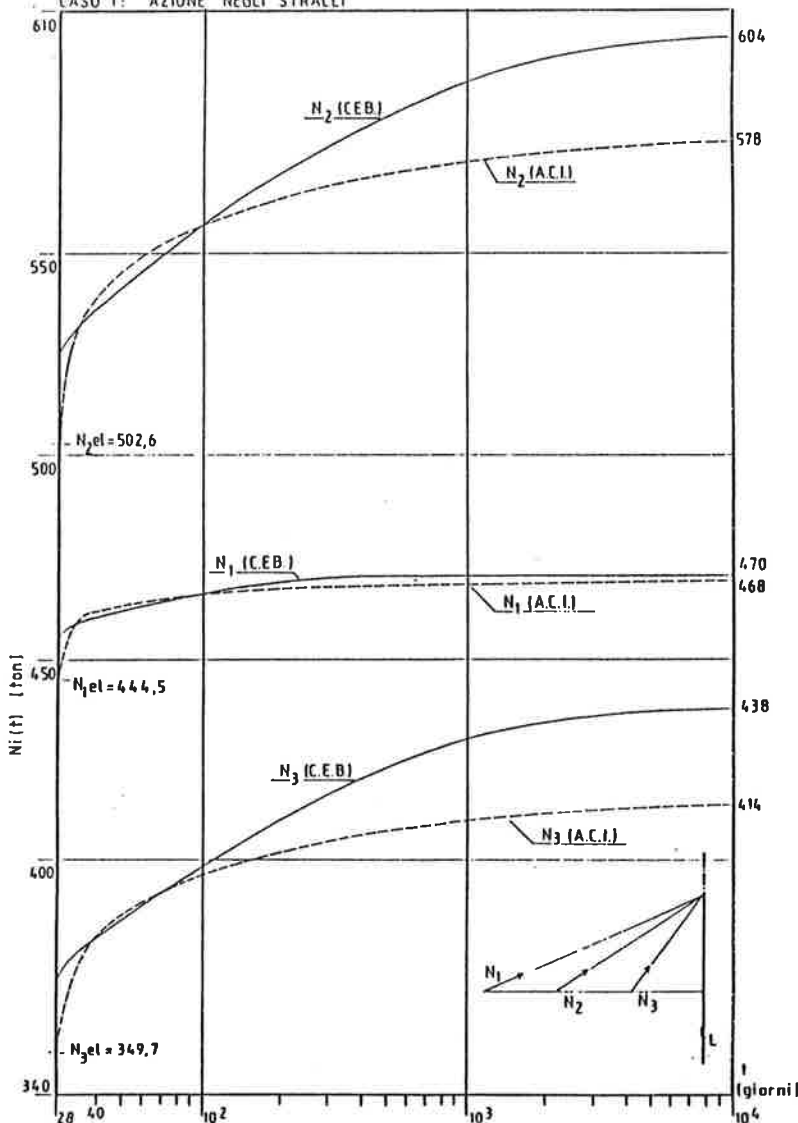


Fig.4a - Variazione nel tempo del tiro negli stralli per il caso 1.



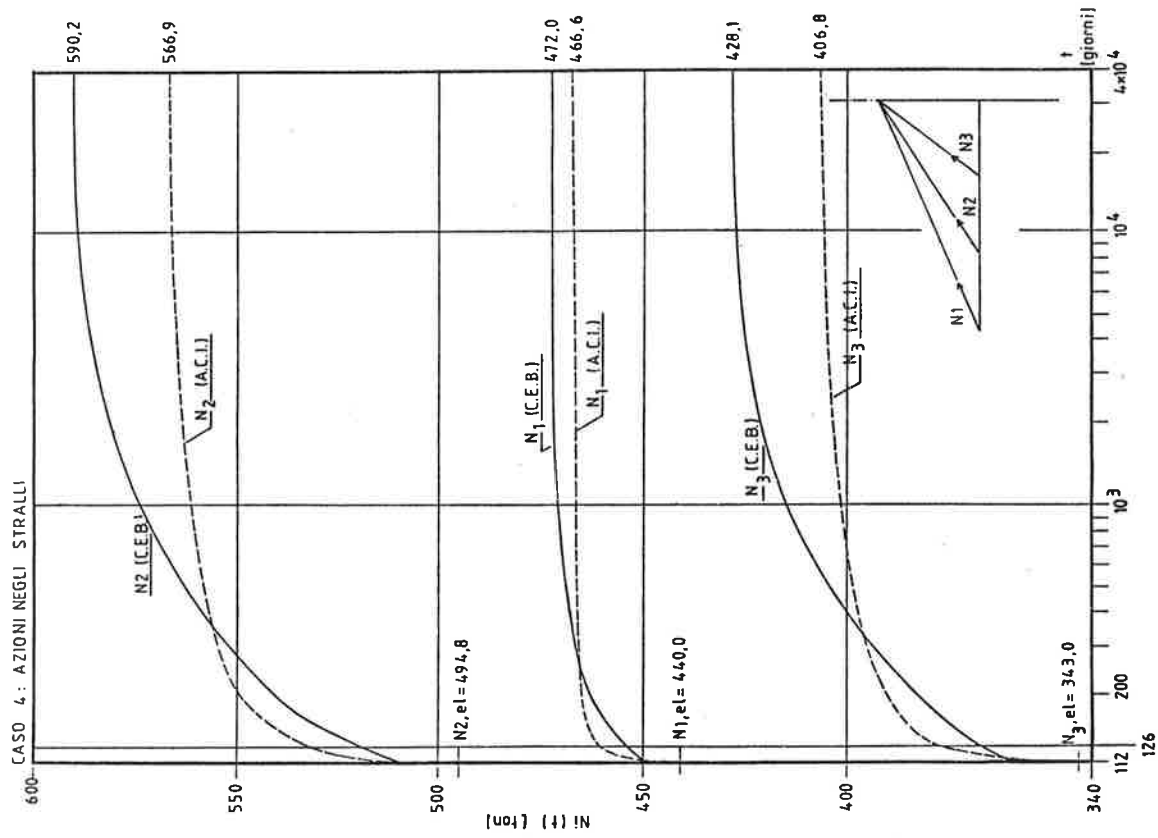


Fig.4C - Variazione nel tempo del tiro negli stralli per il caso 4.

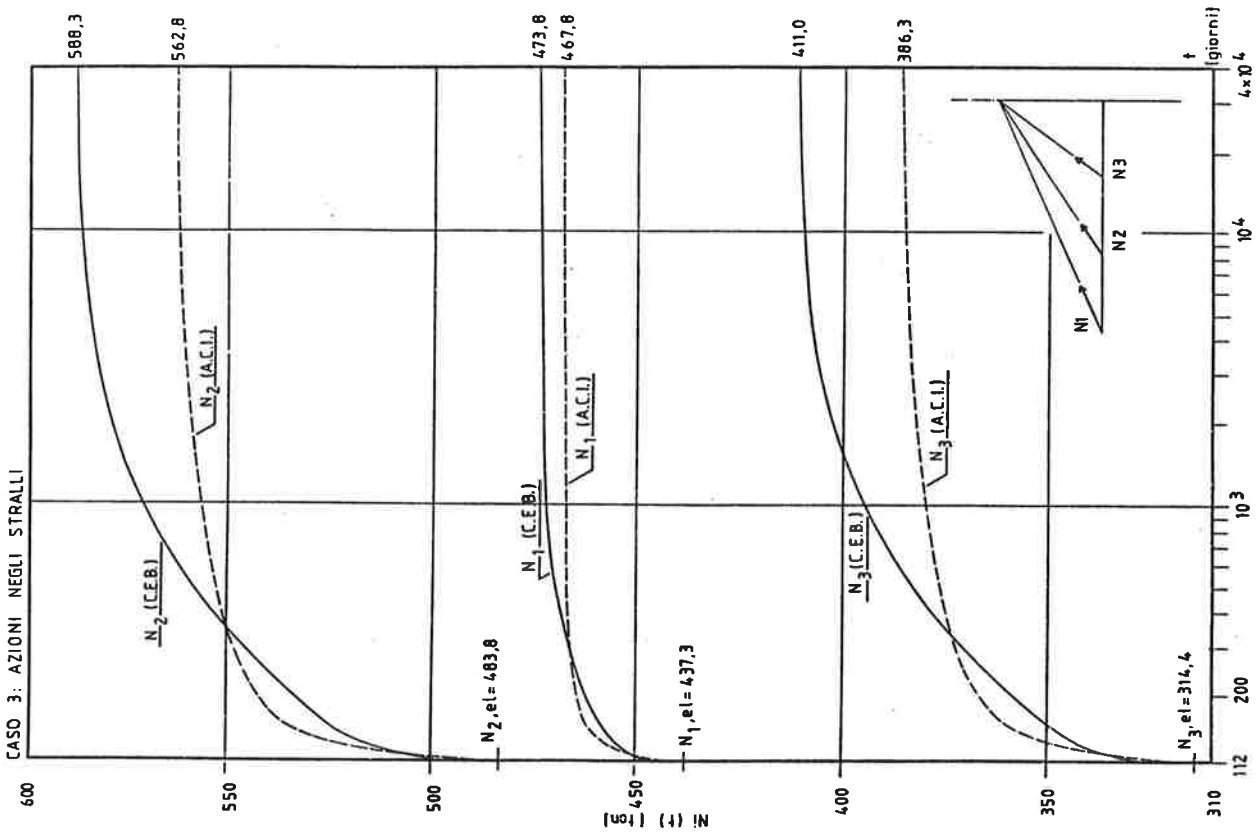


Fig.4b - Variazione nel tempo del tiro negli stralli per il caso 3.



COMPORAMENTO IN ESERCIZIO A LUNGO TERMINE ED ALLO STATO LIMITE ULTIMO DI  
ELEMENTI A PROFILO APERTO IN C.A.P. PREFABBRICATI SOGGETTI A FLESSOTORSIONE

Franco MOLA

Professore Straordinario di Tecnica delle Costruzioni  
Istituto Universitario di Architettura di Venezia

Marco Andrea PISANI  
Dottorando di Ricerca  
Politecnico di Milano

SOMMARIO

Viene presentata l'analisi in esercizio sotto azioni di lunga durata e quella allo stato limite ultimo di elementi in c.a.p. a profilo aperto con parete di piccolo spessore soggetti a sollecitazioni flessotorsionali. Tale analisi, effettuata nell'ipotesi che gli elementi siano privi di rigidità torsionale pura, conduce alla scrittura di equazioni integrali di Volterra nella fase di esercizio, caratterizzata da un comportamento visco-elastico lineare e da equazioni non lineari allo stato limite ultimo, nelle quattro incognite che definiscono lo stato di deformazione longitudinale della sezione. La risoluzione del problema nelle due situazioni di comportamento viene condotta attraverso originali algoritmi di calcolo automatico appositamente predisposti.

SUMMARY

In the present paper the flexural and torsional analysis of P.C. thin-walled members under sustained loads and at the ultimate limit state is performed. The analysis is based on the hypothesis of neglecting the bearing resistance related to pure torsion. It drives to four Volterra integral equations in the service state where the behaviour is governed by a visco-elastic constitutive stress-strain law and to four non linear equations at the ultimate limit state. The solution of the two problems is obtained by means of two particular algorithms implemented in suitable computer programs.

1. INTRODUZIONE

Nelle moderne strutture prefabbricate si è andato sempre più diffondendo e generalizzando l'impiego di elementi in parete sottile e profilo aperto realizzati sia in cemento armato ordinario che in cemento armato precompresso. Le prestazioni di questi manufatti si sono rivelate di elevato livello in tutte le categorie strutturali in cui sono stati utilizzati, dalla realizzazione di strutture di copertura e di impalcati per edifici civili ed industriali fino alla costruzione di impalcati da ponte. La caratteristica fondamentale del comportamento statico degli elementi in parete sottile e profilo aperto, consiste nella possibilità di sopportare sollecitazioni combinate di flessione e torsione anche di elevata entità, in virtù della sensibile resistenza torsio-

nale connessa alla deformazione per ingobbamento delle sezioni trasversali. L'analisi di queste strutture in presenza di sollecitazioni torsionali e nell'ipotesi di comportamento elastico lineare dei materiali, è riportata estesamente in /1/ e può essere utilizzata per studiare elementi in cemento armato precompresso sotto azioni istantanee e nella fase di esercizio, ove il comportamento dei materiali è elastico lineare, oppure per determinare le sollecitazioni negli elementi in cemento armato ordinario nelle medesime condizioni. Una valutazione più approfondita del comportamento degli elementi è però necessaria per poter procedere con affidabilità alla misura della sicurezza in tutti gli stati di comportamento, ove in genere le leggi costitutive dei materiali non sono più elastiche lineari. In particolare, per le strutture in cemento armato precompresso, una corretta interpretazione dello stato di tensione e deformazione nelle fase di esercizio non può prescindere dal mettere in conto i fenomeni di viscosità e ritiro del calcestruzzo, onde valutare con esattezza gli stati di spostamento e le variazioni tensionali negli acciai di precompressione. Analogamente, risulta necessario, e ciò anche in termini normativi, effettuare una valutazione della capacità portante ultima degli elementi, da condurre in presenza di più componenti attive di sollecitazione. Per le strutture in cemento armato ordinario allorchè se ne misuri la sicurezza mediante il criterio delle tensioni ammissibili, i problemi riguardano la valutazione dello stato tensionale nei materiali, per assegnate combinazioni di sollecitazione, che deve essere fatta escludendo la resistenza a trazione del calcestruzzo oppure, se si adotta il metodo semiprobabilistico agli stati limite, è necessario procedere alla valutazione della capacità portante ultima dell'elemento. I problemi ricordati sono stati esaustivamente risolti per le travi soggette a stati di sollecitazione combinata di flessione e forza normale, in particolare per le analisi in fase elasto-viscosa si ricorda il metodo di indagine generale basato sulla determinazione delle funzioni di rilassamento ridotte, stabilito in /2/, /3/, /4/, che in questi problemi trova una delle sue applicazioni più tipiche. Per le analisi allo stato limite ultimo sono ormai ben noti i diagrammi di interazione fra momento e forza normale che definiscono la capacità portante delle sezioni ed il cui utilizzo è ormai ampiamente generalizzato sì da entrare nella normale pratica progettuale. Allorchè a fianco delle sollecitazioni di flessione e forza normale è presente anche quella torsionale, il problema diviene molto più complesso ed attualmente sono disponibili trattazioni che affrontano in maniera solo parziale i vari problemi. Precisamente per quanto riguarda la viscosità e relativamente ad un comportamento semplificato del calcestruzzo descrivibile mediante un modello di puro invecchiamento, il problema è stato affrontato in /5/, la capacità portante ultima è stata indagata nei lavori /6/, /7/, /8/, mentre in /9/, /10/ sono stati effettuati anche confronti con dati sperimentali. Infine, indicazioni riguardanti l'analisi tensionale nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili sono riportate in /11/. Nel presente lavoro, con riferimento a elementi caratterizzati da rigidità torsionale di puro ingobbamento, viene dapprima svolta, mediante l'applicazione del metodo delle funzioni di rilassamento ridotte, la trattazione generale dell'analisi di tensione e deformazione nelle fase di esercizio sotto azioni di lunga durata, nell'ipotesi di comportamento elasto-viscoso lineare per il calcestruzzo e successivamente viene affrontato il problema della determinazione della capacità portante ultima della sezione giungendo alla redazione di diagrammi di interazione fra le varie componenti di sollecitazione che permettono di misurare con facilità la sicurezza allo stato limite ultimo delle sezioni. Poichè si trascura la capacità portante torsionale alla De Saint Venant, l'effetto della torsione dà luogo ad una sollecitazione di tipo biflessionale, e la crisi della sezione

può essere studiata in analogia a quanto avviene per la flessione in presenza di sole tensioni normali, ciò che richiede la conoscenza di leggi di comportamento monoassiali per i materiali, quali ad esempio il ben noto diagramma parabolico-rettangolare per il calcestruzzo ed elastico-perfettamente plastico per gli acciai non pretesi, oppure di tipo più generalmente non lineare per gli acciai di pretensione. Analogamente, per lo studio in fase elasto-viscosa lineare, sarà adottata per il calcestruzzo una legge temporale monoassiale di tipo generale che contempli le due caratteristiche fondamentali del comportamento viscoso del calcestruzzo, ovvero l'invecchiamento del materiale e la sua elasticità ritardata o ereditarietà.

## 2. ANALISI IN FASE ELASTO-VISCOSA LINEARE

Si consideri la sezione in parete sottile e profilo aperto di Fig.1, costituita da materiale elasto-viscoso omogeneo (calcestruzzo) e da elementi elastici (acciai pretesi e non pretesi). Alla sezione, riferita alla terna di assi  $x, y, z$ , con origine in un punto  $O$  generico, siano applicate le sollecitazioni esterne  $M_{\rho_i}$  ( $i=1,2,3,4$ ) e le deformazioni impresse di ritiro  $\epsilon_{cs}(t)$  al calcestruzzo e di pretensione  $\bar{\epsilon}_{sp}$  agli acciai ad alta resistenza. Nel prosieguo, con il simbolo  $\rho_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) si indicheranno ordinatamente le grandezze  $\rho_1=1$ ,  $\rho_2=x(s)$ ,  $\rho_3=y(s)$ ,  $\rho_4=\omega(s)$ , esprimenti rispettivamente le quattro funzioni di distribuzione della deformazione longitudinale  $\epsilon(z,t,s)$  lungo il profilo di cui  $x, y$  sono le coordinate correnti di un punto ed  $\omega(s)$  è l'area settoriale, avente polo ed origine arbitrari e con  $M_{\rho_i}$ , le sollecitazioni agenti ( $M_{\rho_1}=N$ =forza normale,  $M_{\rho_2}=M_x$ =momento flettente intorno all'asse  $y$ ,  $M_{\rho_3}=M_y$ =momento flettente rispetto all'asse  $x$ ,  $M_{\rho_4}=M_\omega$ =bimomento). Indicate rispettivamente  $\zeta'(z,t)$ ,  $\xi''(z,t)$ ,  $\eta''(z,t)$ ,  $\theta''(z,t)$ , la deformazione assiale della sezione e le curvature flessionali e torsionali nella stessa organizzate nel vettore colonna  $\underline{\psi}(z,t)$  e con  $\underline{\rho}(s)$  il vettore coordinate, contenente le  $\rho_i$ , la legge di deformazione della sezione, in accordo a quanto stabilito in /1/ si scrive:

$$\epsilon(t, z, s) = \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z, t) \quad (1)$$

e le leggi costitutive per il calcestruzzo, gli acciai non pretesi e quelli pretesi si scrivono:

$$\epsilon_c(t, z, s) = \int_0^t d\sigma_c(t', z, s) J(t, t') + \epsilon_{cs}(t) \quad (2)$$

$$\epsilon_s(t, z, s) = \sigma_s(t, z, s) / E_s \quad (3)$$

$$\epsilon_{sp}(t, z, s) = \sigma_{sp}(t, z, s) / E_{sp} - \bar{\epsilon}_{sp}$$

ove si è indicato con  $J(t, t')$  la funzione di viscosità del calcestruzzo e lo integrale presente nella (2) va trattato come integrale di Stieltjes.

Applicando alla sezione il principio dei lavori virtuali, si hanno le equazioni di equilibrio:

$$\int_{A_c} \underline{\rho}(s) \sigma_c(t, z, s) dA_c + \sum_i \underline{\rho}(s_i) \sigma_s(t, z, s_i) A_{si} + \sum_j \underline{\rho}(s_j) \sigma_{sp}(t, z, s_j) A_{spj} = \underline{M}(z, t) \quad (4)$$

Dalle (1), (2) premoltiplicando per  $\underline{\rho}(s)$  ed integrando sull'area di calcestruzzo si ottiene:

$$\left( \int_{A_c} \underline{\rho}(s) \underline{\rho}^T(s) dA_c \right) \underline{\psi}(z, t) = \int_{A_c} \left( \int_0^t \underline{\rho}(s) d\sigma_c(t', z, s) J(t, t') \right) dA_c + \int_{A_c} \underline{\rho}(s) \epsilon_{cs}(t) dA_c \quad (5)$$

mentre differenziando le (4) rispetto al tempo si ha:

$$\int_{A_c^-} \rho(s) d\sigma_c(t, z, s) dA_c = -\sum_i \rho(s_i) d\sigma_s(t, z, s_i) A_{si} - \sum_j \rho(s_j) d\sigma_{sp}(t, z, s_j) A_{spj} + dM(z, t) \quad (6)$$

Sostituendo la (6) nella (5) e ricordando la (3) si ricava:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{A_c^-} \rho(s) \rho^T(s) dA_c \right) \psi(z, t) + \left[ \sum_i E_s \rho(s_i) \rho^T(s_i) A_{si} + \sum_j E_{sp} \rho(s_j) \rho^T(s_j) A_{spj} \right] \int_0^t d\psi(z, t') J(t, t') = \\ & = \int_0^t (dM(z, t) - \sum_j \rho(s_j) d\bar{E}_{sp} A_{spj}) J(t, t') + \int_{A_c^-} \rho(s) \epsilon_{cs}(t) dA_c \end{aligned} \quad (7)$$

Posto pertanto:

$$\begin{aligned} \int_{A_c^-} \rho(s) \rho^T(s) dA_c = \underline{A} & \quad ; \quad \sum_i \rho(s_i) \rho^T(s_i) A_{si} = \underline{S} \\ \sum_j \rho(s_j) \rho^T(s_j) A_{spj} = \underline{P} & \quad ; \quad \int_{A_c^-} \rho(s) \epsilon_{cs}(t) dA_c = \underline{C}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

e ricordando che all'istante iniziale, dalla (7) risulta:

$$(\underline{A} + (\underline{E}_s \underline{S} + \underline{E}_{sp} \underline{P})) J(t_0, t_0) \psi(z, t_0) = (\underline{M}(z) - \sum_j \rho(s_j) \bar{E}_{sp} A_{spj}) J(t_0, t_0) \quad (9)$$

la (7), scritta nella forma integrale di Riemann, per sollecitazioni esterne costanti nel tempo, assume la forma:

$$\underline{A} \psi(z, t) + [\underline{E}_s \underline{S} + \underline{E}_{sp} \underline{P}] \int_{t_0}^t d\psi(z, t') J(t, t') = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} [\underline{A} \psi(z, t_0)] + \underline{C}(t) \quad (10)$$

ovvero:

$$\underline{\psi}(z, t) + \underline{F} \int_{t_0}^t d\underline{\psi}(z, t') J(t, t') = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\psi}(z, t_0) + \underline{N}(t) \quad (11)$$

avendo posto:

$$\underline{F} = \underline{A}^{-1} [\underline{E}_s \underline{S} + \underline{E}_{sp} \underline{P}] J(t_0, t_0) \quad ; \quad \underline{N}(t) = \underline{A}^{-1} \underline{C}(t) \quad (12)$$

La risoluzione del sistema di equazioni integrali di Volterra (11), può convenientemente essere affrontata ricorrendo al metodo delle funzioni di rilassamento ridotte. A tale scopo indicata con  $\underline{K}$  la matrice formata con gli autovettori della matrice  $\underline{F}$  ed effettuata la trasformazione lineare:

$$\underline{\psi}(z, t) = \underline{K} \underline{\phi}(z, t) \quad (13)$$

la (11), previo inserimento della (13) e premoltiplicazione per  $\underline{K}^{-1}$  diviene:

$$\underline{\phi}(z, t_0) + \int_{t_0}^t [\underline{K}^{-1} \underline{F} \underline{K} \frac{J(t, t')}{J(t_0, t_0)} + \underline{I}] d\underline{\phi}(z, t') = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\phi}(z, t_0) + \underline{L}(t) \quad (14)$$

ove si è posto:

$$\underline{L}(t) = \underline{K}^{-1} \underline{N}(t) \quad (15)$$

e si è indicata con  $\underline{I}$  la matrice unità.

In virtù delle proprietà della matrice  $\underline{K}$ , il prodotto  $\underline{K}^{-1} \underline{F} \underline{K}$  costituisce la

matrice diagonale  $\alpha_j$ , i cui elementi  $\alpha_j$  sono gli autovalori di  $\underline{F}$ , cosicchè alla (14) corrisponde la forma scalare:

$$\phi_j(z, t_0) + \int_{t_0}^t (\alpha_j \frac{J(t, t')}{J(t_0, t_0)} + 1) d\phi_j(z, t') = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \phi_j(z, t_0) + L_j(t) \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (16)$$

la quale, introdotta la funzione di viscosità variata:

$$J_j^*(t, t') = J(t_0, t_0) (\alpha_j \frac{J(t, t')}{J(t_0, t_0)} + 1) \quad (17)$$

assume l'espressione finale:

$$\phi_j(z, t_0) J_j^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\phi_j^*(z, t') J_j^*(t, t') = \phi_j(z, t_0) \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j} (J_j^*(t, t_0) - J(t_0, t_0)) + L_j(t) J(t_0, t_0) \quad (18)$$

La risoluzione della (18) si effettua facilmente ricorrendo al concetto di funzione di rilassamento ridotta  $r_j^*(t, t_0)$ , risolvente dell'equazione integrale:

$$r_j^*(t_0, t_0) J_j^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial r_j^*(t, t')}{\partial t'} J_j^*(t, t') dt' = 1 \quad (19)$$

la quale in virtù del principio di sovrapposizione permette di ottenere immediatamente per  $\phi_j(z, t)$  la relazione:

$$\phi_j(z, t) = \phi_j(z, t_0) \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j} (1 - r_j^*(t, t_0) J(t_0, t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{\partial L_j(t')}{\partial t'} J(t_0, t_0) r_j^*(t, t') dt' \quad (20)$$

Posto pertanto:

$$\underline{H}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial L_j(t')}{\partial t'} J(t_0, t_0) r_j^*(t, t') dt' \quad (21)$$

ed introdotte le matrici diagonali:

$$\alpha_{jj}^* = \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j} \quad ; \quad R_{jj}^*(t, t_0) = 1 - r_j^*(t, t_0) J(t_0, t_0) \quad (22)$$

dalla (20) risulta:

$$\underline{\phi}(z, t) = \underline{\alpha}^* \underline{R}^*(t, t_0) \underline{\phi}(z, t_0) + \underline{H}(t) \quad (23)$$

e quindi, ricordando la (13), per il vettore incognito  $\underline{\psi}(z, t)$  si ottiene l'espressione definitiva:

$$\underline{\psi}(z, t) = \underline{K} \underline{\alpha}^* \underline{R}^*(t, t_0) \underline{K}^{-1} \underline{\psi}(z, t_0) + \underline{K} \underline{H}(t) \quad (24)$$

La (22), introdotta nella (3) permette di ricavare immediatamente le tensioni nell'acciaio ordinario ed in quello ad alta resistenza, mentre le tensioni nel calcestruzzo, anzichè dalla (2) che richiederebbe l'ulteriore soluzione di una equazione integrale di Volterra, possono ricavarsi da semplici relazioni di equilibrio. Dette infatti  $\Delta\sigma_s(z, t, s)$ ,  $\Delta\sigma_{sp}(z, t, s)$ , le variazioni di tensione negli acciai fra l'istante  $t$  e quello iniziale  $t_0$ , le corrispondenti variazioni delle sollecitazioni assorbite dalle armature valgono:

$$\underline{\Delta M}_s(z, t) = (E_s \underline{S} + E_{sp} \underline{P}) \underline{\Delta \psi}(z, t) \quad (25)$$

ma poichè per l'equilibrio della sezione, indicato con  $\Delta M_c(z,t)$  la variazione di sollecitazione nel calcestruzzo, tenendo presente che le azioni applicate sono costanti, deve essere:

$$\Delta M_c(z,t) + \Delta M_s(z,t) = 0 \quad (26)$$

per le tensioni nel calcestruzzo, cui risulta applicata la sollecitazione  $-\Delta M_s(z,t)$ , per la prima delle (12) risulta l'espressione:

$$\sigma_c(z,t,s) = - \underline{\rho}^T(s) \underline{F} \Delta \psi(z,t) \quad (27)$$

ed il problema è così completamente risolto.

La determinazione dello stato di deformazione e tensione a lungo termine negli elementi in parete sottile a profilo aperto passa quindi attraverso la calcolazione degli autovalori della matrice  $\underline{F}$  e dei corrispondenti autovettori, la risoluzione delle quattro equazioni integrali di Volterra (19) ed infine delle espressioni (24-27), che forniscono le incognite cercate. La mole delle calcolazioni da effettuare non è di particolare complessità in quanto i quattro autovalori  $\alpha_i$  discendono dalla risoluzione di un'equazione algebrica di quarto grado, facilmente ottenibile per tentativi od anche ricorrendo a formule chiuse, mentre per la risoluzione delle (19) possono adottarsi tecniche standard di tipo incrementale di facile applicazione e grande affidabilità.

### 3. ANALISI ALLO STATO LIMITE ULTIMO

La determinazione della capacità portante ultima delle sezioni in parete sottile e profilo aperto in presenza di tensioni normali si effettua ritenendo ancora valida la legge a quattro termini (1) per descrivere lo stato di deformazione longitudinale della sezione, accoppiando ad essa le opportune leggi costitutive di tipo non lineare che descrivono il comportamento dei materiali allo stato limite ultimo. Poichè si tratta di fenomeni di tipo istantaneo, nella trattazione che segue non apparirà il parametro tempo e la capacità portante ultima della sezione, che risulta soggetta nel caso più generale a quattro componenti di sollecitazione, sarà rappresentata mediante i diagrammi di interazione fra tali componenti. In questo modo è possibile fornire una completa descrizione delle caratteristiche prestazionali della sezione allo stato limite ultimo che ne permette una rapida e chiara misura della sicurezza.

Sempre con riferimento a Fig.1, per lo stato di deformazione longitudinale nel calcestruzzo e negli acciai può scriversi:

$$\begin{aligned} \epsilon_c(z,s) &= \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) \\ \epsilon_s(z,s) &= \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) \\ \epsilon_{sp}(z,s) &= \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) + \bar{\epsilon}_{sp} \end{aligned} \quad (28)$$

mentre per le tensioni, assunti per i materiali i diagrammi costitutivi non lineari di Fig.2, si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_c(z,s) &= E_c^*(\epsilon_c) \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) \\ \sigma_s(z,s) &= E_s^*(\epsilon_s) \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) \\ \sigma_{sp}(z,s) &= E_{sp}^*(\epsilon_{sp}) [\underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) + \bar{\epsilon}_{sp}] \end{aligned} \quad (29)$$

e le equazioni di equilibrio della sezione risultano:

$$\int_{A_c} \underline{\rho}(s) \sigma_c(z,s) dA_c + \sum_i \underline{\rho}(s_i) \sigma_s(z,s_i) A_{si} + \sum_j \underline{\rho}(s_j) \sigma_{sp}(z,s_j) A_{spj} = \underline{M}(z) \quad (30)$$



Introdotte le (29) nelle (30) si ottiene il sistema risolvibile non lineare nella forma:

$$\underline{A}(\underline{\psi}) \underline{\psi}(z) = \underline{M}(z) - \underline{M}(\underline{\psi}) \quad (31)$$

ove si è posto:

$$\underline{A}(\underline{\psi}) = \int_{A_c} \underline{\rho}(s) \underline{\rho}^T(s) E_c^*(\epsilon_c) dA_c + \sum_i \underline{\rho}(s_i) \underline{\rho}^T(s_i) E_s^*(\epsilon_{si}) A_{si} + \sum_j \underline{\rho}(s_j) \underline{\rho}^T(s_j) E_{sp}^*(\epsilon_{spj}) A_{spj} \quad (32)$$

$$\underline{M}(\underline{\psi}) = \sum_j E_{sp}^*(\epsilon_{spj}) \underline{\rho}(s_j) A_{spj} \bar{\epsilon}_{sp} \quad (33)$$

La (32) rappresenta la matrice di rigidezza non lineare della sezione, dipendente dallo stato di deformazione in essa presente, mentre la (33) fornisce la espressione delle quattro sollecitazioni equivalenti all'azione di precompressione imposta mediante la distorsione  $\bar{\epsilon}_{sp}$  impressa alle armature ad alta resistenza.

L'utilizzo della (31) per il tracciamento dei diagrammi di interazione dà luogo alle seguenti procedure di calcolo. Innanzitutto si osservi che, essendo quattro le componenti attive di sollecitazione, il diagramma è costituito da una ipersuperficie nello spazio a quattro dimensioni, non suscettibile di una rappresentazione grafica. E' pertanto consigliabile allo scopo di poter disporre di diagrammi facilmente consultabili, procedere mediante il tracciamento di superfici o curve di livello, ottenute intersecando il diagramma di interazione quadridimensionale con piani sui quali una o due componenti di sollecitazione siano mantenute costanti. In tal modo si ottengono superfici o linee di interazione facilmente rappresentabili nello spazio o nel piano. Precisamente, poichè negli elementi utilizzati nella pratica la componente di sollecitazione normale è quasi sempre assente, i diagrammi di interazione possono essere efficacemente rappresentati mediante una superficie nello spazio a tre dimensioni:

$$\Gamma(M_{\rho_1} = N=0, M_{\rho_2} = M_x, M_{\rho_3} = M_y, M_{\rho_4} = M_\omega) = 0 \quad (34)$$

od anche per facilità di rappresentazione, mediante le sue intersezioni con i piani  $M_{\rho_i} = \text{cost.}$  ( $i=2$  opp.  $3$  opp.  $4$ ) ottenendo rispettivamente i diagrammi piani di interazione fra due componenti di sollecitazione essendo la terza costante e la componente di sollecitazione normale nulla.

Tali diagrammi, qualitativamente rappresentati in Fig.3, hanno le espressioni:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(N=0, M_x = \text{cost.}, M_y, M_\omega) &= 0 \\ \Gamma_2(N=0, M_x, M_y = \text{cost.}, M_\omega) &= 0 \\ \Gamma_3(N=0, M_x, M_y, M_\omega = \text{cost.}) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

e le loro intersezioni con gli assi coordinati forniscono, quale caso particolare in cui si considera nulla la sollecitazione costante che caratterizza il diagramma, i valori limite  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ ,  $M_\omega^*$  che assumono le tre componenti  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_\omega$ , quando agiscono da sole, ovvero le misure della sicurezza divengono di tipo monodimensionale. Per il tracciamento delle curve di livello si osservi che, per uno stato di sollecitazione ad esse appartenente, devono raggiungersi in uno od entrambi i materiali le deformazioni ultime. Se ad esempio si vuole tracciare la linea  $\Gamma_1$ , ove sono assegnati i valori  $\bar{M}_{\rho_1}$ ,  $\bar{M}_{\rho_2}$  delle prime due sollecitazioni, le prime due equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\sum_{m=1}^4 A_{nm}(\underline{\psi}) \psi_m = \bar{M}_{\rho_n} - M_{\rho_n}(\underline{\psi}) \quad (n=1,2) \quad (36)$$

e ad esse vanno associate le condizioni di compatibilità delle deformazioni:

$$\begin{aligned} \epsilon_c^{(k)} &= \underline{\rho}^T(s_k) \underline{\psi} \leq \epsilon_{cu} \\ \epsilon_s^{(i)} &= \underline{\rho}^T(s_i) \underline{\psi} \leq \epsilon_{su} \\ \epsilon_{sp}^{(j)} &= \underline{\rho}^T(s_j) \underline{\psi} \leq \epsilon_{spu} \end{aligned} \quad (37)$$

essendo  $k$  l'indice dei nodi in cui viene discretizzata la sezione,  $i, j$ , quelli relativi alle armature ordinarie e ad alta resistenza. Fra due nodi contigui la sezione viene descritta mediante segmenti lineari, all'interno dei quali le  $\rho_j$  variano linearmente, il che permette di affermare che le (37), scritte in punti distinti della sezione, sono sufficienti per assicurare che in tutti i punti della sezione le deformazioni ultime dei materiali non sono superate. Il procedimento di calcolo, esposto in dettaglio in /8/, consiste nel ricercare dapprima tutti i punti del diagramma di interazione nei quali due delle (37) sono soddisfatte con il segno di uguaglianza, ciò che può essere fatto combinando ordinatamente ciascuna delle (37) con le altre, assunte con il segno di uguaglianza, risolvendo iterativamente il sistema non lineare (36) e controllando che le rimanenti delle (37) siano soddisfatte. Determinato così lo stato di deformazione ultimo, dalle due equazioni di equilibrio:

$$\sum_{m=1}^4 A_{nm}(\psi) \psi_m = M_{\rho_n} - M_{\rho_n}(\psi) \quad (n = 3, 4) \quad (38)$$

si valutano immediatamente le due componenti  $M_{\rho_n}$  di sollecitazione che conducono alla crisi la sezione. In tal modo si ottengono i punti del diagramma di interazione comuni a due rami del diagramma stesso. Il tracciamento dei punti rimanenti può quindi effettuarsi assumendo con il segno di uguaglianza solo una delle (37), relativa al punto comune determinato ed assegnando ad una delle due componenti  $\psi_m$  valori compresi fra quelli che essa assume agli estremi del ramo del diagramma. In tal modo dalla risoluzione per via iterativa delle (36) e dal controllo del verificarsi delle (37) si giunge alla determinazione delle tre componenti incognite, che inserite insieme alla predeterminata  $\psi_m$  consentano, tramite la (38), il calcolo delle sollecitazioni ultime.

Il procedimento di calcolo brevemente tratteggiato presenta alcuni passaggi alquanto complessi soprattutto per quanto riguarda la convergenza del procedimento iterativo che è alla base della risoluzione delle equazioni non lineari (36) accoppiate a due relazioni (37) scritte con il segno di uguaglianza. In particolare, poichè alcuni termini della matrice dei coefficienti del sistema risolvete non lineare sono costituiti dalle coordinate dei nodi della sezione, possono aversi valori nulli sulla diagonale principale di tale matrice, il che obbliga ad utilizzare per la risoluzione del sistema algoritmi che siano insensibili a questo fatto, quale ad esempio il metodo di Cramer che si presta bene allo scopo data anche l'esiguità del numero di equazioni e la sua sufficientemente ridotta sensibilità al cattivo condizionamento del sistema, qualora questa si manifestasse. Può inoltre avvenire che in dipendenza di una particolare scelta del sistema di riferimento, una colonna della matrice dei coefficienti risulti combinazione lineare delle altre, rendendone il determinante nullo. Questo fatto è legato alla scelta, peraltro arbitraria, del sistema di riferimento e viene immediatamente rimosso cambiando tale sistema. Nelle sperimentazioni numeriche effettuate, si è riscontrata una probabilità veramente bassa di una simile evenienza allorchè si sceglie quale origine del sistema il baricentro della sezione.

Quanto ora detto con riferimento allo stato limite ultimo può essere ap-

plicato alle sezioni in cemento armato ordinario nella fase di esercizio, ricorrendo alle ipotesi di calcolo del metodo n. In tal caso è sufficiente tener conto della unica non linearità connessa alla incapacità del calcestruzzo a far fronte a sforzi di trazione, ritenendo invece valida l'ipotesi di elasticità lineare per il calcestruzzo compresso e per gli acciai, sostituendo alle disuguaglianze (37) le analoghe scritte con riferimento allo stato tensionale che deve essere contenuto in ogni punto della sezione entro i valori assunti come ammissibili. Si possono così costruire i diagrammi di interazione cosiddetti ammissibili che permettono di misurare rapidamente la sicurezza in esercizio. In via alternativa, poichè in tale fase interessa essenzialmente lo stato tensionale può procedersi alla verifica diretta di tale stato, determinando sotto le assegnate sollecitazioni  $M(z)$  le deformazioni mediante risoluzione diretta del sistema non lineare (31) ricavando le tensioni corrispondenti dalle relazioni (29) e procedendo al confronto fra esse e quelle ammissibili.

#### 4. ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Si consideri la sezione rappresentata in Fig.4, appartenente ad un elemento in c.a.p. di corrente produzione industriale per la realizzazione di coperture con illuminazione indiretta. Nelle Fig.5a,b è riportata la schematizzazione della sezione in sei nodi e cinque elementi lineari e sono indicate le posizioni delle armature ordinarie (in numero di 14) e di quelle ad alta resistenza (in numero di 9). Si è dapprima valutata l'evoluzione temporale del regime di tensione e deformazione della sezione sotto le sollecitazioni di carattere permanente, descrivendo il comportamento viscoso del calcestruzzo mediante il modello CEB /13/. I risultati sono riportati nelle Fig.6-8 di cui le prime due si riferiscono allo stato tensionale nelle armature di pretensione e nel calcestruzzo, oppure allo stato tensionale nelle armature ordinarie ed a quello di deformazione del calcestruzzo, mentre l'ultima riporta l'andamento temporale delle componenti  $\psi_i$  del vettore contenente i parametri di deformazione longitudinale della sezione. Lo stato tensionale diminuisce negli acciai ad alta resistenza per effetto del rilassamento del calcestruzzo e conseguentemente si ha in esso una riduzione della tensione accompagnata da un incremento della deformazione e per congruenza, di quella dell'acciaio ordinario che essendo elastico aumenta il suo stato tensionale. Si osservi come le variazioni di tensione nel calcestruzzo e negli acciai siano influenzate in modo non trascurabile dalla dislocazione dei punti nella sezione e lo stesso può dirsi per le variazioni di deformazione del calcestruzzo, ciò che attesta la necessità di dover procedere ad una valutazione accurata degli effetti prodotti dalla viscosità su ogni armatura di pretensione, anzichè riferirsi a valutazioni più grossolane basate su un'analisi globale fatta con riferimento al cavo risultante. L'osservazione dell'andamento temporale dei parametri di deformazione ne mostra un accrescimento differente, rendendo inapplicabile la ipotesi di affinità per deformazione viscosa ed elastica corrispondente. Questo fatto è connesso all'esistenza di quattro distinti autovalori della matrice  $\underline{F}$ , cui corrispondono altrettante funzioni di rilassamento ridotte, che influenzano in differente maniera gli incrementi dei parametri di deformazione. Poichè gli autovalori  $\alpha_i$  e le corrispondenti  $r_i^*$  dipendono dalla dislocazione delle armature nella sezione, per ottenere una riduzione degli effetti viscosi non è sufficiente disporre in essa un adeguato quantitativo d'armatura ordinaria, bensì è di grande importanza dislocarlo in maniera corretta onde ridurre maggiormente gli effetti per quelle componenti di spostamento che hanno valori

maggiori, agendo opportunamente sull'entità degli autovalori.

Nelle Fig.9-11 sono tracciati i diagrammi temporali delle medesime grandezze in presenza oltre che delle sollecitazioni permanenti, della deformazione di ritiro del calcestruzzo. Si osserva un netto incremento delle sollecitazioni nelle armature lente poichè, allo stato di compressione in esse esistenti per effetto dei carichi esterni che nel tempo v'è aumentando per la viscosità, si somma quello, sempre di compressione, prodotto dal ritiro. In maniera analoga si manifesta un più consistente calo di tensione nelle armature ad alta resistenza cui consegue una riduzione tensionale nel calcestruzzo. Per quanto riguarda infine le componenti di deformazione della sezione se ne osservano ovviamente incrementi per quella di tipo assiale, mentre le altre componenti diminuiscono a causa della particolare dislocazione delle armature metalliche il cui impedimento al libero ritiro del calcestruzzo genera curvature flessionali e torsionali di segno opposto a quelle generate dalle azioni esterne e dalla precompressione.

Le Fig.12-15 riguardano il comportamento allo stato limite ultimo delle sezioni. In particolare nelle prime tre figure sono riportati i diagrammi di interazione tra il momento trasversale  $M_y$  ed il bimomento  $M_{\omega}$  in assenza di forza normale, per tre differenti valori del momento flettente longitudinale  $M_x$ . Per ogni ramo dei diagrammi, sono indicate le modalità di raggiungimento dello stato ultimo, corrispondente alla crisi lato acciaio oppure lato calcestruzzo. I diagrammi mostrano una interazione positiva per le due sollecitazioni ad esclusione dei tratti relativi alla crisi dell'armatura A1 e del calcestruzzo nel nodo 1, quest'ultimo fatto peraltro si attenua al decrescere di  $M_x$ , sino a non essere più presente per  $M_x = -24tm$ . L'interazione positiva è dovuta al fatto che il momento  $M_y$  ed il bimomento  $M_{\omega}$  generano deformazioni nei materiali di segno opposto e per tanto la loro contemporanea presenza aumenta la resistenza della sezione, come può notarsi osservando il netto incremento nel quadrante ove  $M_y$ ,  $M_{\omega}$  sono positivi dell'entità delle sollecitazioni allo stato limite ultimo rispetto a quelle che da sole comportano la crisi della sezione, misurate dalle intercette del diagramma di interazione con gli assi coordinati. Nel quadrante ove le sollecitazioni sono negative, il loro incremento è nettamente più contenuto, e ciò è dovuto essenzialmente alla modesta quantità di armature esistente nelle sezioni che subiscono allungamenti sotto il momento  $M_y$  di segno negativo. La presenza di un momento  $M_x$  positivo dà luogo ad una maggiore estensione del diagramma nel quadrante con sollecitazioni negative e ad una riduzione in quello ove esse sono positive, mentre valori di  $M_x$  negativi aumentano sensibilmente i valori minimi delle sollecitazioni positive riducendo ad una zona ormai ristretta il diagramma nel campo delle sollecitazioni negative. Questo fatto è conseguenza dell'effetto concordante od antagonista del momento  $M_x$  nelle varie situazioni limite rispetto alle due sollecitazioni che interagiscono nel diagramma.

Nella Fig.15 è infine tracciato il diagramma di interazione  $M_x$ ,  $M_{\omega}$  per  $M_y = N = 0$ . Tale diagramma per  $M_{\omega}$  positivo denuncia una interazione positiva in corrispondenza alla crisi del calcestruzzo nel punto 6 ed una netta interazione negativa per crisi del calcestruzzo nel punto 1. Per  $M_{\omega}$  negativo tali effetti si hanno rispettivamente allorchè si raggiunge la crisi nel calcestruzzo nel punto 4 o nell'acciaio A14. Questo fatto mostra la necessità di considerare la presenza concomitante di entrambe le sollecitazioni nella misura della sicurezza allo stato limite ultimo in quanto una misura basata solo sulla sollecitazione flessionale darebbe luogo a risultati inattendibili anche in presenza di modesti valori del bimomento.

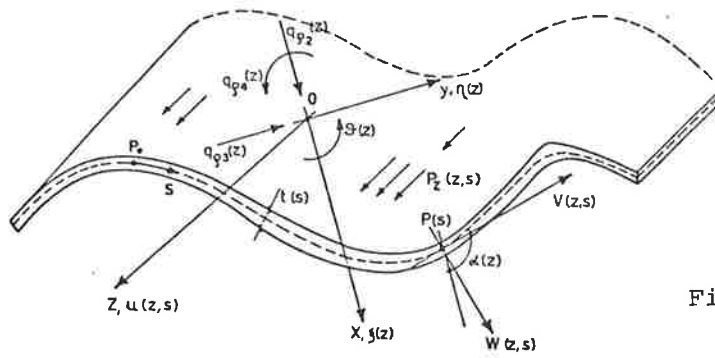


Fig. 1

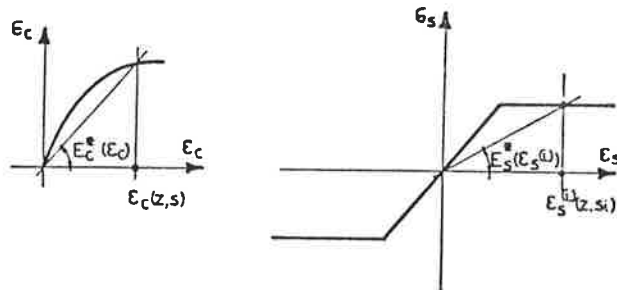


Fig. 2

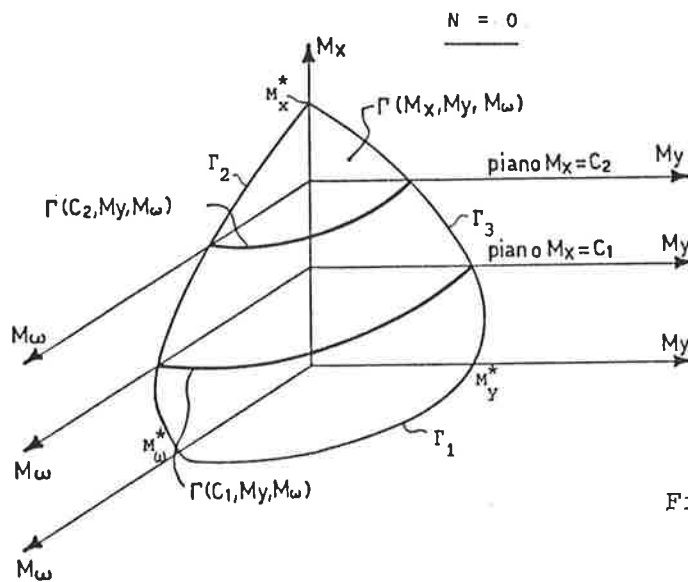
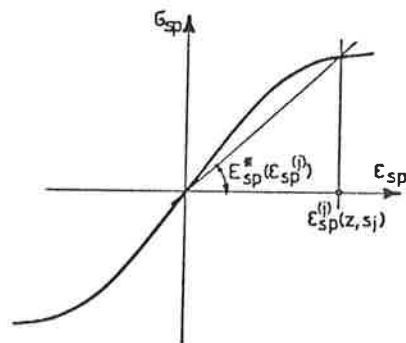


Fig. 3

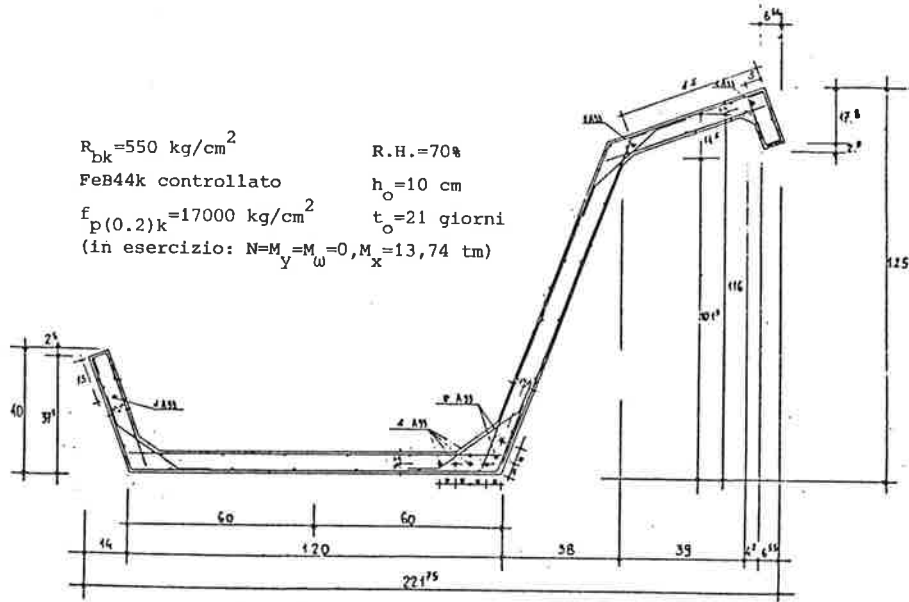


Fig. 4

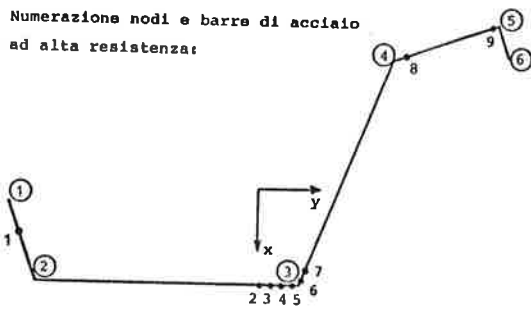


Fig. 5a

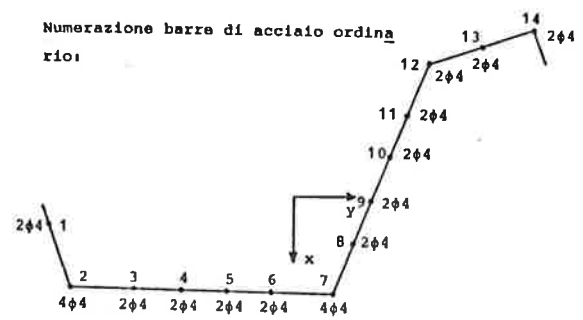


Fig. 5b

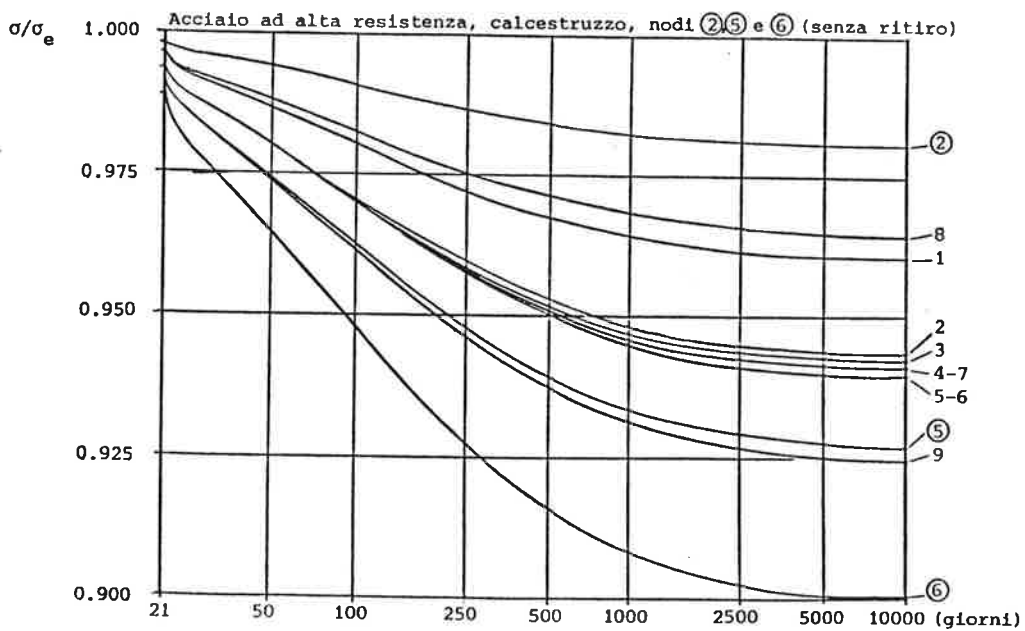


Fig. 6

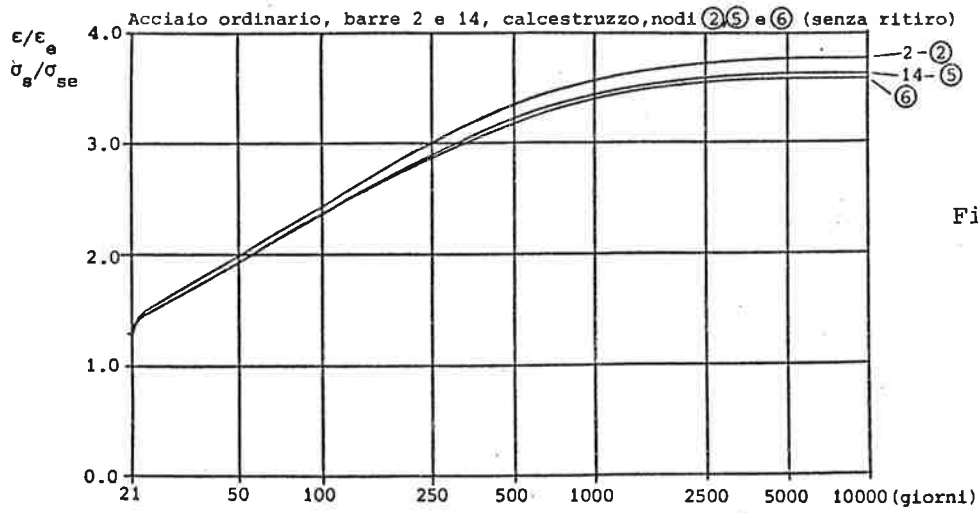


Fig. 7

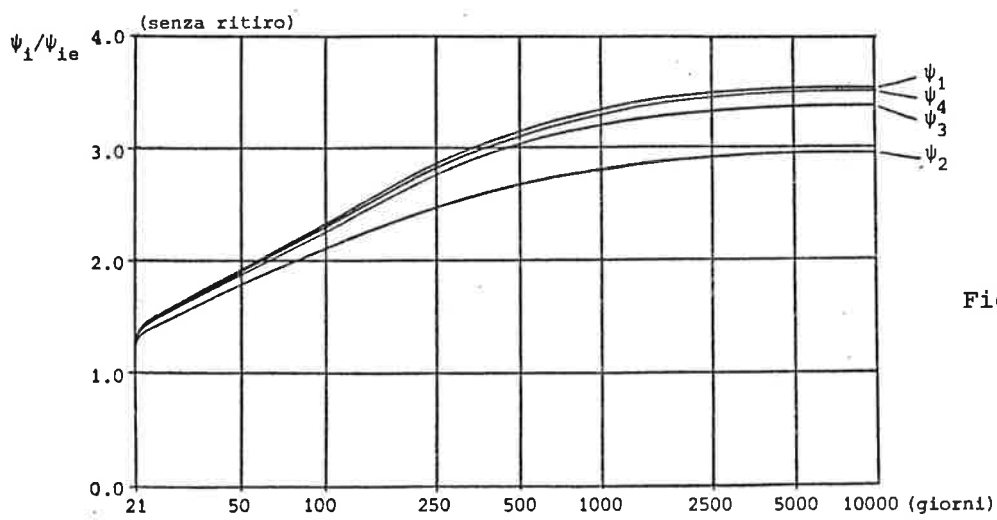


Fig. 8

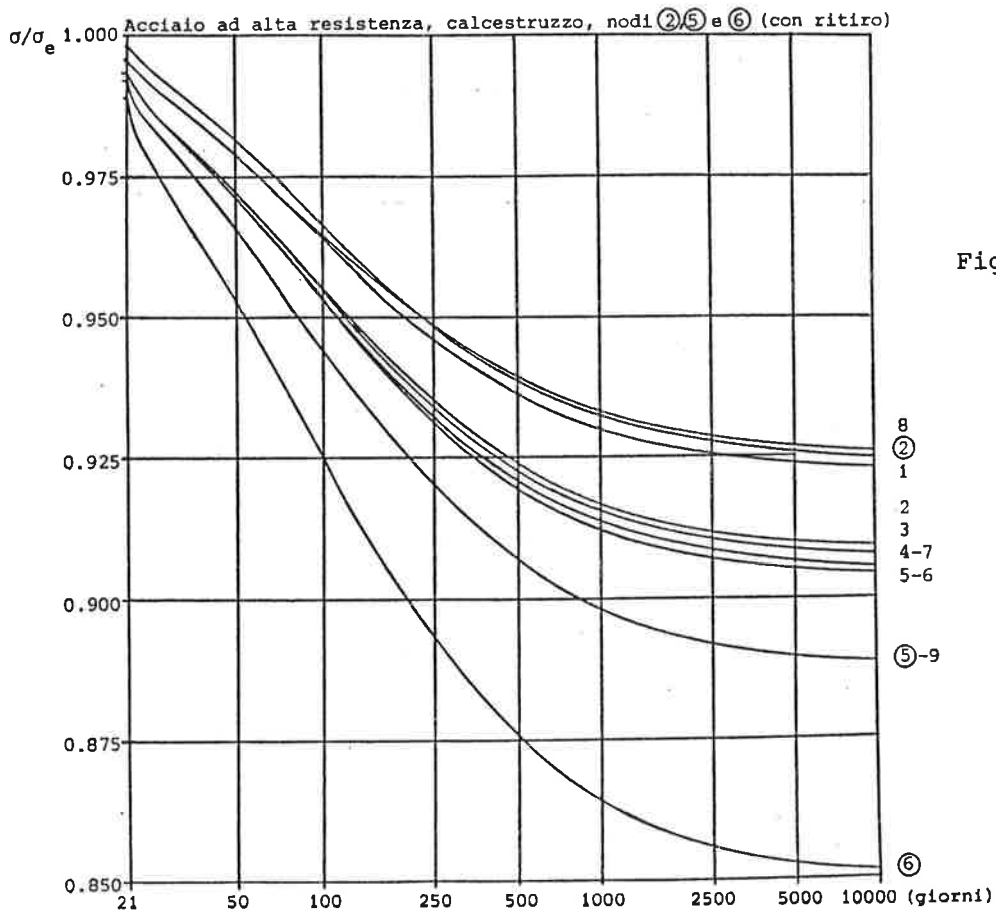


Fig. 9

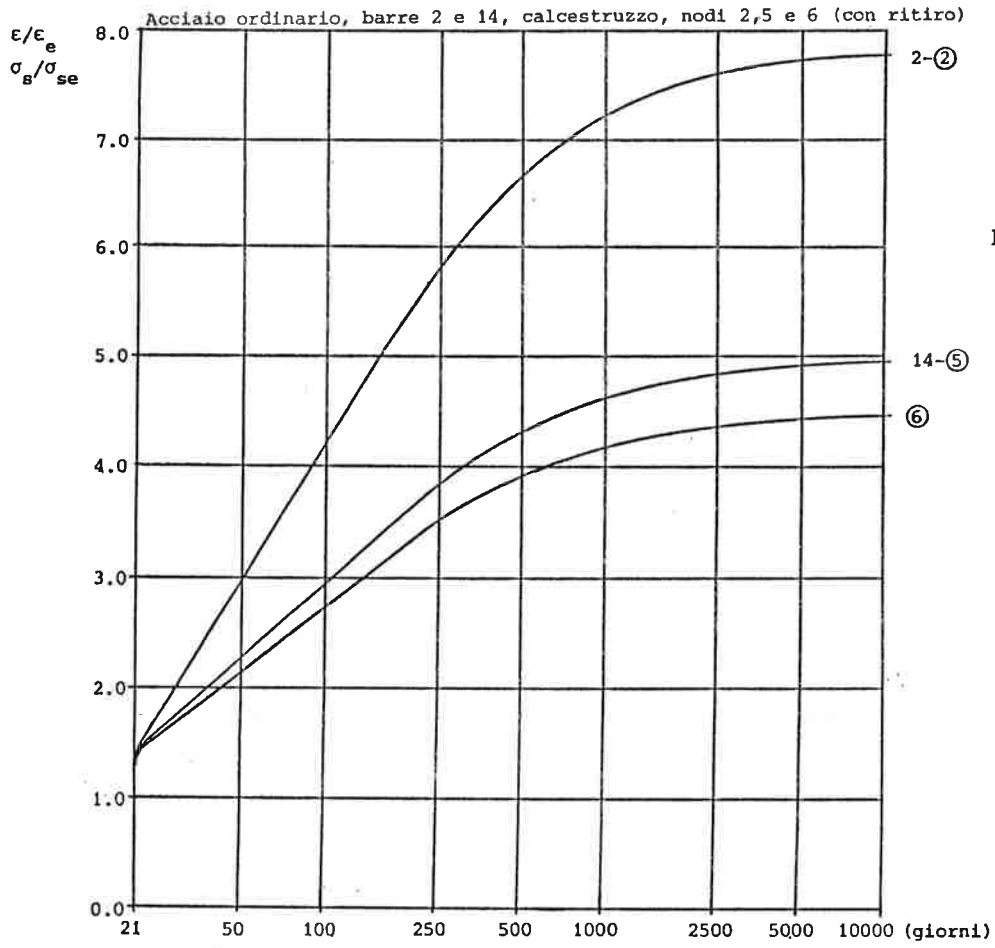


Fig.10

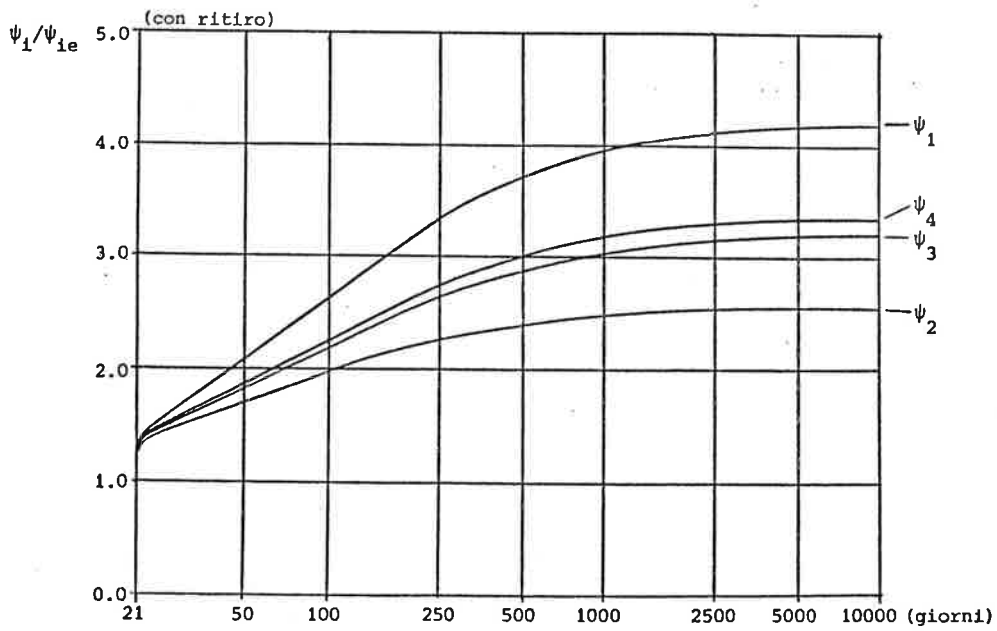


Fig.11



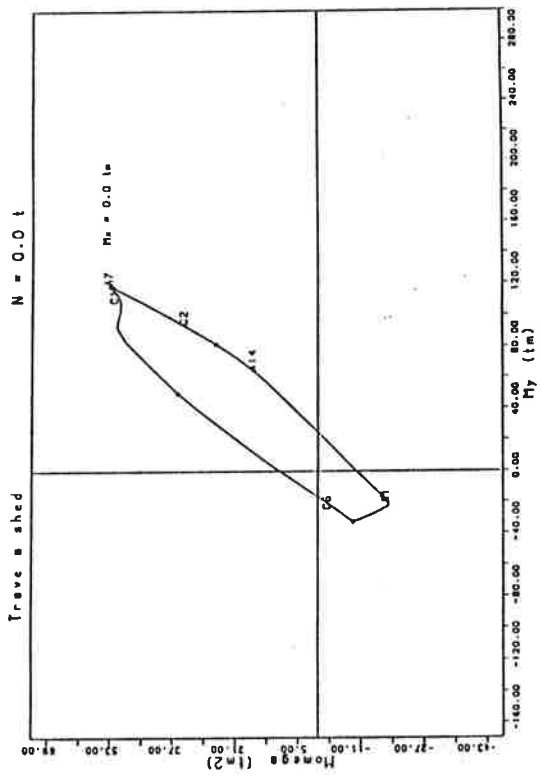


Fig.13

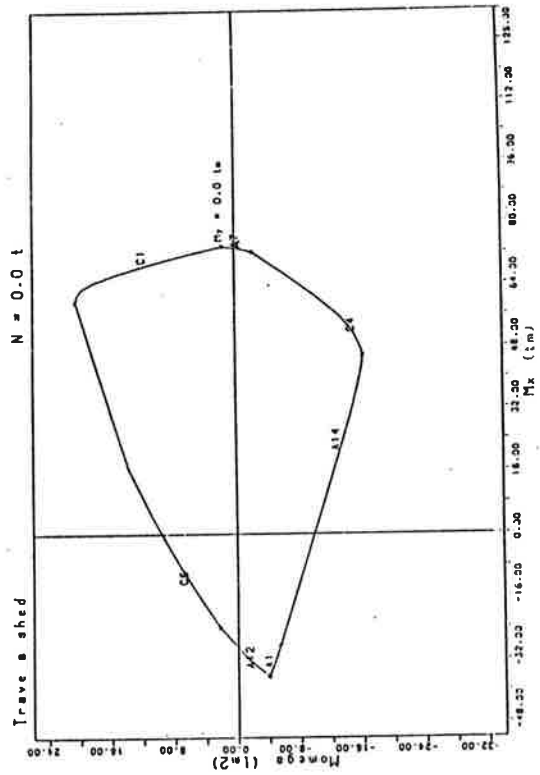


Fig.15

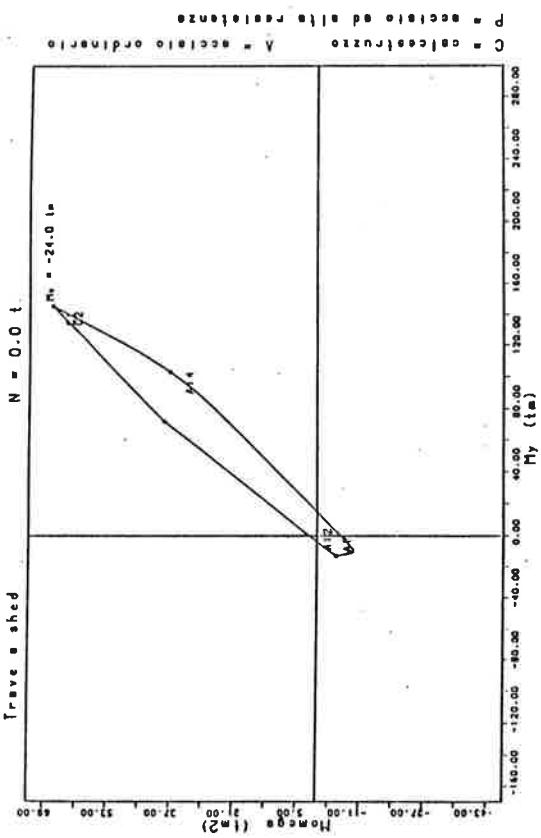


Fig.12

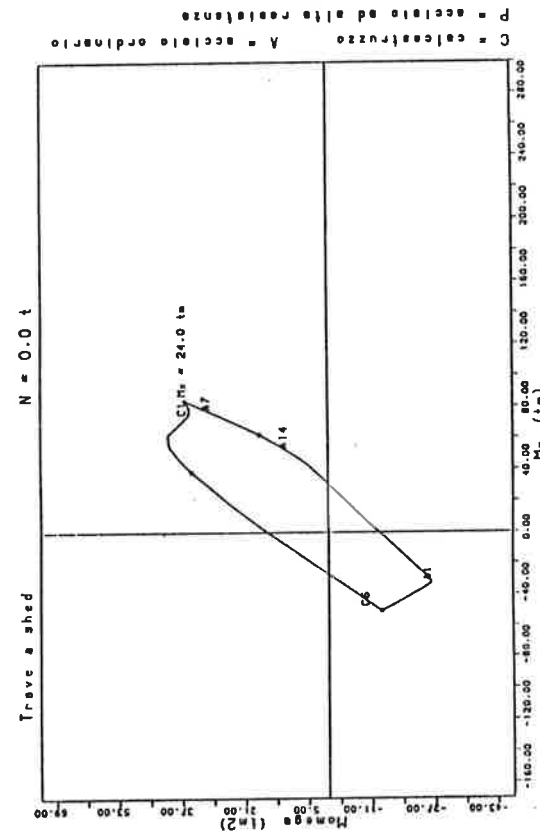


Fig.14

C = calcestruzzo A = acciaio ordinario  
 P = acciaio ad alta resistenza

C = calcestruzzo A = acciaio ordinario  
 P = acciaio ad alta resistenza

BIBLIOGRAFIA

- /1/ Vlasov, V.Z., *Pieces longues en voiles minces*, Eyrolles, Paris, 1962.
- /2/ Mola, F., *Metodo generale e metodo approssimato per la risoluzione delle strutture non omogenee a comportamento elasto-viscoso lineare*, Studi e Ricerche, Vol.1, Italcementi, Bergamo, 1979.
- /3/ Mola, F., *Il metodo delle funzioni di rilassamento ridotte nella risoluzione di strutture elasto-viscose non omogenee a modulo elastico variabile nel tempo*, Studi e Ricerche, Vol.3, Italcementi, Bergamo, 1981.
- /4/ Mola, F., *Applicazioni del metodo delle funzioni di rilassamento ridotte all'analisi di strutture viscoelastiche non omogenee*, Studi e Ricerche, Vol.8, Italcementi, Bergamo, 1982.
- /5/ Mola, F., *Sul problema della flessotorsione in fase elasto-viscosa lineare di elementi a profilo aperto con pareti di piccolo spessore*, Nota Tecnica n.620, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Politecnico di Milano, 1974.
- /6/ Migliacci, A., Mola, F., Gaddi, T., *Analisi teorica di elementi in c.a. a pareti sottili e profilo aperto in presenza di leggi costitutive dei materiali non lineari*, Atti del Congresso CTE, Ferrara, 1980.
- /7/ Mola, F., Pisani, M.A., *Analisi in esercizio ed allo stato limite ultimo di elementi in c.a. e c.a.p. in parete sottile e profilo aperto soggetti a sollecitazioni flesso-torsionali*, Studi e Ricerche, Vol. 7, Italcementi Bergamo, 1985.
- /8/ Mola, F., Pisani, M.A., *Capacità portante ultima di elementi in c.a.p. a parete sottile e profilo aperto in presenza di sollecitazioni flessotorsionali*, Atti del Congresso CTE, Marina di Ravenna, 1986.
- /9/ Krpan, P., Collins, N.P., *Predicting torsional response of thin-walled open R.C. members*, ASCE, Struct. Div., June, 1981.
- /10/ Krpan, P., Collins, N.P., *Testing thin-walled open R.C. structures in torsion*, ASCE, Struct. Div., June, 1981.
- /11/ Zbirdrowsky-Koscia, K.F., *Stress analysis of cracked reinforced and prestressed concrete thin-walled beams and shells*, Magazine of Concrete Research, Vol.20, No.65, 1968.
- /12/ FIP/CEB, *Manual "Structural effects of time-dependent behaviour of concrete"*, CEB, Bulletin d'Information No.142/142bis, Giorgi Publishing Co., Saint-Saphorin, 1984.

INDAGINE SPERIMENTALE SU NODI DI ELEMENTI PREFABBRICATI TRAVE-PILASTRO SOTTO FATICA IN CAMPO PLASTICO.

L.Sanpaolesi, S.Caramelli, P.Croce

Dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa

#### SOMMARIO

Il programma sperimentale è inteso a valutare il comportamento a fatica in campo plastico di edifici civili di prototipi di nodo trave-pilastro di struttura ad elementi prefabbricati in stabilimento con nodi eseguiti con getto in opera.

Nella memoria viene riferito sulle modalità di prova, sui risultati conseguiti e sul comportamento dei nodi.

#### SUMMARY

The aim of the experimental programme described in the present paper is to assess the plastic field fatigue behaviour of civil column-beam-joint building prototypes, made up of factory produced elements and of joints carried out by on-site-casting.

The paper contains a description of the way in which the tests were performed, as well as the results obtained and details of the behaviour of the joints.

#### 1. INTRODUZIONE.

Lo studio del comportamento strutturale sotto azioni sismiche come è noto, può essere condotto, per il "sisma di servizio", con buoni risultati utilizzando gli usuali modelli di calcolo operanti in campo elastico; qualora, invece, si voglia valutare il comportamento per sismi con lungo periodo di ritorno, quando, cioè, si faccia appello alla capacità delle strutture di evolvere in campo plastico, il calcolo deve essere, in generale, accompagnato da accurate indagini sperimentali, volte ad indagare la capacità dissipativa della struttura; ciò soprattutto quando questa presenti peculiarità, difficilmente schematizzabili, connesse con le modalità costruttive e in particolare, per le strutture prefabbricate nelle quali, in genere, il nodo rappresenta l'elemento da studiare.

Il programma di sperimentazione sul quale si riferisce, in corso presso il Laboratorio Ufficiale per le Esperienze dei Materiali da Costruzione dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni della Università di Pisa, la cui 1<sup>a</sup> fase si è appena conclusa, ha lo scopo di affinare le conoscenze del comportamento nodale, sotto azioni sismiche, di strutture prefabbricate monodimensionali, per edifici civili, nel quale il nodo ha le caratteristiche illustrate in fig. 1.

Una volta conclusa l'analisi dei nodi strutturali ed ottenuti risultati soddisfacenti, il programma proseguirà con un'indagine sperimentale a rottura su un prototipo di edificio al vero.

In particolare la sperimentazione ha il duplice scopo di valutare:

a) duttilità strutturale di nodi tipici

b) capacità dissipativa

attraverso prove a fatica oligociclica spinte in campo plastico fino a rottura.

Nel seguito, viene riferito sul programma di prova, sui risultati sperimentali, sulla analisi elastica e sulle prime conclusioni di questa fase della ricerca.

### 1.1. Prototipi di nodo trave-pilastro.

Il nodo trave-pilastro del sistema costruttivo viene realizzato in opera attraverso le seguenti fasi (fig. 1):

- montaggio del sistema di travi autoportanti sul pilastro inferiore;
- montaggio del solaio sulle travi;
- montaggio del pilastro superiore tramite tubo di posizionamento e successiva piombatura dei pilastri superiori;
- messa in opera dei ferri integrativi dei solai e delle travi;
- getto in unica fase del solaio, delle travi e dei nodi trave-pilastro.

## 2. PROGRAMMA SPERIMENTALE.

### 2.1. Dispositivo di prova.

La struttura di contrasto, destinata a sopportare gli sforzi alterni prodotti dal generatore di carico, è vincolata al solaio, al quale sono pure vincolati gli altri elementi metallici destinati a realizzare le cerniere fisse e scorrevoli alle tre estremità di ciascun prototipo. Nella fig. 2 e 3 sono riportati gli schemi del prototipo di nodo e del sistema di contrasto con i relativi vincoli: il nodo in prova è disposto con pilastro orizzontale e trave verticale. Il martinetto a doppio effetto, con portata di 100 KN, collegato alle due estremità con cerniere sferiche, è regolato a mezzo di elettrovalvola da un generatore elettronico di funzioni capace di comandare l'alternanza di carico o di deformazione secondo leggi prefissate.

Il carico viene rilevato mediante estensimetri a variazione di resistenza elettrica applicati al braccio del martinetto.

Per le letture degli spostamenti vengono impiegati estensimetri induttivi, disposti tra i due bracci della crociera in prova (fig. 4).

I segnali elettrici provenienti dal lettore di carico e di spostamento sono inviati ad un plotter per il tracciamento automatico dei diagrammi.

Le eventuali azioni normali nei pilastri vengono imposte mediante tesatura di 4 trefoli da 1/2", ancorati a piastre poste alle due estremità del pilastro.

Le prove vengono condotte imponendo le deformazioni e rilevando i corrispondenti carichi, al fine di controllare il comportamento strutturale anche nella fase di forti deformazioni prossime alla rottura.

## 2.2. Modalità di prova.

Le prove a fatica oligociclica spinte in campo plastico fino a rottura, integrate con prove statiche, sono state realizzate su prototipi aventi le stesse caratteristiche dimensionali del nodo tipico, costituito da una crociera trave-pilastro di dimensioni a circa 3.0x3.0 m, realizzata in stabilimento con le stesse modalità costruttive adottate nel sistema.

Le prove sono state eseguite, per quanto possibile, in accordo con la proposta di procedure internazionali, relative alla condotta delle prove "quasi statiche", che si articolano come segue:

- 1) determinazione nei due sensi del gradino  $\delta_1 - \delta_2$  di spostamento sotto un carico pari a  $0.5P_{serv}$ , essendo  $P_{serv}$  il carico di esercizio;
- 2) realizzazione di n° 5 cicli a deformazione imposta tra  $\delta_1$  e  $\delta_2$ ;
- 3) realizzazione di n° 5 cicli tra  $2\delta_1$  e  $2\delta_2$  e così via fino a rottura.

Sono stati programmati tre differenti tipi di prove allo scopo di simulare il più completamente possibile lo stato di sollecitazione del nodo, indotto dalle azioni sismiche nelle varie situazioni:

- la prima serie di prove è realizzata secondo lo schema statico di fig. 2.a con diagrammi di momento triangolari su trave e pilastro;
- la seconda serie di prove è realizzata secondo lo schema di fig. 2.b che simula le situazioni di nodo a tre vie o di nodo a quattro vie con prevalente momento negativo sulla trave;
- la terza serie di prove è realizzata con lo schema di fig. 2.c ed è intesa a creare le massime sollecitazioni di pressoflessione sul pilastro.

## 3. RISULTATI SPERIMENTALI.

In questa prima fase sperimentale sono state eseguite quattro prove, fino a rottura, precedute da una prova preliminare di inquadramento.

Gli schemi delle quattro prove sono riportati in fig. 5.

Le prove n° 1, 2, 3 sono state eseguite secondo lo schema di fig. 2.a: nella prova 1 l'armatura della trave è simmetrica e lo sforzo normale nel pilastro nullo.

Nella prova 2 la trave è maggiormente armata all'estradosso e lo sforzo normale nel pilastro nullo.

Nella prova 3 la trave è ad armatura simmetrica, mentre il pilastro è soggetto ad uno sforzo normale di precompressione di 40 KN.

La prova 4 è stata effettuata con lo schema 2.b, che comporta sforzi flessionali ridotti nei pilastri, con trave maggiormente armata all'estradosso, e pilastro precompresso con  $N = 40$  KN.

Nella fig. 6 sono riportati, a titolo di esempio, i diagrammi rilevati al plotter, relativi alla prova n° 1; in essi, in funzione dei livelli crescenti di deformazione imposta, sono registrati i corrispondenti livelli di carico.

Nei diagrammi delle figg. 7-10 sono riportati i valori dei carichi massimi raggiunti (nel I° e nel II° ciclo) per ciascun livello di deformazione imposta.

Durante la prova è stato particolarmente seguito il fenomeno fessurativo; nelle figg. 11 a, b e c, relative alla prova n° 1, sono riportate le foto di tre successivi stati di fessurazione del nodo.

L'esame dei risultati delle quattro prove ha portato alle considerazioni successivamente puntualizzate:

- a) la discontinuità tecnologica del nodo prefabbricato all'attacco pilastro-trave ha effetto sulla rigidezza del nodo ai carichi bassi come evidenziato dal tratto quasi orizzontale dei diagrammi di fig. 6;  
i diagrammi relativi alle varie prove denunciano costantemente:  
b) elevata deformabilità;  
c) evidente degrado di rigidezza già a partire dai primi gradini di deformazione; conseguentemente:  
d) scarsa capacità dissipativa.

Il quadro fessurativo si evolve, in generale, a partire dal nodo, risultando importante anche a carichi bassi, mentre all'incremento dei carichi, la trave evidenzia notevoli lesioni da taglio.

#### 4. ANALISI DELLA DEFORMABILITA'.

La scarsa capacità dissipativa denunciata dal nodo, imputabile principalmente all'evidente fenomeno fessurativo, ha spinto all'esame dei diversi contributi, allo scopo di indirizzare concretamente gli interventi di miglioramento al nodo. In particolare sono stati esaminati i contributi deformativi dovuti alla flessione ed al taglio, nello stato fessurato, e il contributo dovuto alla deformabilità nel nodo fessurato per lo schema statico di fig. 2.a.

Nei punti successivi vengono esaminati i vari contributi.

Il calcolo viene effettuato, per un carico di 40 KN, di poco superiore al carico di servizio; in corrispondenza al carico scelto il quadro fessurativo è sufficientemente esteso e tale da giustificare le ipotesi assunte a base del calcolo; nello stesso tempo si possono escludere plasticizzazioni importanti nel calcestruzzo e nell'acciaio.

Il calcolo è stato condotto per il punto P di fig. 14, per il quale è stato rilevato, sperimentalmente, sotto carico statico di 40 KN, uno spostamento secondo l'orizzontale di 2.10 cm.

##### 4.1. Contributo dovuto alla flessione nello stato fessurato.

Le rigidezze della trave e del pilastro nello stato II sono state ricavate dai diagrammi momento-curvatura di fig. 15, ottenuti nelle ipotesi di conservazione delle sezioni piane e calcestruzzo non resistente a trazione, assunta una distribuzione delle tensioni, nel calcestruzzo compresso, di tipo parabola-rettangolo: tenuto conto, mediante opportuni coefficienti correttivi, della collaborazione del calcestruzzo teso tra le fessure, risulta:

$$\bar{M}_P = 1.120 \text{ cm.}$$

mentre lo spostamento calcolato nello stato I, relativamente alla sezione internamente reagente, risulta:

$$M_P^I = 0.435 \text{ cm.}$$

In definitiva il contributo dovuto alla fessurazione risulta:

$$M_P^II = 0.685 \text{ cm.}$$

#### 4.2. Contributo dovuto al taglio nello stato fessurato.

Per gli scopi del calcolo in esame, teso alla valutazione degli ordini di grandezza dei vari contributi, si ritiene sufficientemente adeguata, per la valutazione della rigidità a taglio, la determinazione dello scorrimento mediante il calcolo della deformazione delle aste di parete nel modello reticolare di fig. 12; nel caso in esame, trascurando l'incremento di rigidità dovuta all'effetto spinotto ed all'ingranamento degli inerti, risulta:

$$\eta_p^{III} = 0.256 \text{ cm.}$$

#### 4.3. Contributo dovuto alla deformabilità del nodo fessurato.

Con riferimento alla fig.13, nella quale è rappresentato il meccanismo di trasferimento degli sforzi del nodo, il calcolo della ampiezza delle lesioni è stato effettuato con le modalità seguenti:

- 1) determinazione delle altezze delle zone compresse nelle sezioni della trave e del pilastro  $y_1$  e  $y_2$ , rispettivamente, per i momenti corrispondenti a  $F=40 \text{ KN}$ , nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane e di distribuzione tipo parabola-rettangolo nella zona di calcestruzzo compressa;
- 2) valutazione delle componenti di spostamento,  $x$  ed  $y$ , della lesione, come allungamenti delle aste  $AB$  e  $CD$ : nell'ipotesi che le tensioni nelle armature siano costanti, e pari a quelle dell'acciaio teso, nei tratti, a fessurazione diffusa,  $BB'$  e  $DD'$ , e variabili linearmente, tra le tensioni presenti nell'acciaio teso e in quello compresso, nei tratti  $AB'$  e  $CD'$  e determinazioni delle componenti normale e tangenziale di spostamento della lesione.

Dagli spostamenti  $x$  ed  $y$  calcolati in 2 si può risalire alle rotazioni relative tra le sezioni terminali della trave e del pilastro e le corrispondenti sezioni del nodo, e da queste, mediante composizione di movimenti di corpo rigido, alla corrispondente deformazione valutata in  $P$ .

Nel caso in esame risulta:

$$\begin{aligned} x &= \Delta l \quad (AB) = 3.48 \times 10^{-2} \text{ cm} \\ y &= \Delta l \quad (CD) = 3.11 \times 10^{-2} \text{ cm} \end{aligned}$$

apertura della lesione:  $\Delta = 4.64 \times 10^{-2} \text{ cm}$

spostamento relativo dei lembi  $\Delta s = 0.53 \times 10^{-2} \text{ cm}$

valori che risultano in sufficiente accordo con quelli rilevati sperimentalmente sotto carico statico.

Lo spostamento orizzontale di  $P$  risulta:

$$\eta_P^{IV} = 0.608 \text{ cm.}$$

Occorre notare che, per effetto della ripetizione dei carichi, come evidenziato nelle figg. 11 a, b, c, il quadro fessurativo del nodo risulta di entità molto maggiore di quella calcolata o misurata sotto carico statico e conseguentemente molto maggiore anche il contributo di questo aspetto allo spostamento totale.

#### 4.4. Deformabilità totale.

In definitiva, lo spostamento calcolato del punto  $P$ , sotto azione statica di

40 KN, risulta:

$\eta_P = 1.984$  cm, in buon accordo con quello sperimentale di 2.10 cm.

I valori trovati sono riepilogati, con le loro incidenze percentuali, nella tabella di fig. 14.

Ovviamente nel corso della prova oligociclica si sono ottenuti spostamenti via via più elevati, conseguenti sia all'incremento di carico, sia soprattutto, al degrado sempre più importante, del nodo.

## 5. CONCLUSIONI.

Dallo studio dei dati sperimentali e dell'analisi svolta al punto precedente si possono trarre le seguenti indicazioni:

- la deformabilità dell'elemento è fortemente influenzata dall'entità del quadro fessurativo nel nodo;
- il corretto funzionamento statico del nodo richiede tensioni di aderenza elevate: questo fa sì che, per effetto della ripetizione del carico e del conseguente degrado dell'aderenza, si abbia scorrimento delle armature e quadro fessurativo più esteso di quello riscontrato e/o calcolato in condizioni statiche, come evidente dalle figg. 11 a, b, c;
- nell'ipotesi di assenza di forza normale, come avviene, al limite, negli ultimi piani degli edifici, le prestazioni del pilastro non risultano adeguate a quelle della trave (vedi fig. 15);
- il calcestruzzo del nodo non pare sufficientemente confinato;
- la staffatura del pilastro, in prossimità del nodo, è opportuno venga incrementata.

Sulla base di quanto sopra è stata ipotizzata una proposta atta a migliorare il comportamento dell'elemento mediante i seguenti interventi:

- a) modesto incremento dell'armatura locale del pilastro;
- b) adozione di un'idonea armatura di confinamento del calcestruzzo del nodo;
- c) rinforzo della staffatura del pilastro in prossimità del nodo.

Una analisi teorica condotta con i criteri sopra esposti, prevedendo i rinforzi indicati, conduce ad una sensibile riduzione della deformabilità sotto azioni statiche.

Ma, soprattutto, si presume che, oltre i positivi effetti elencati, gli interventi proposti, riducendo l'entità del quadro fessurativo, evitino il precoce degrado della rigidità e consentano il funzionamento efficace dei vari meccanismi resistenti, quali, per esempio: l'ingranamento degli inerti, in un campo di spostamento più ampio, quale si ha con la ripetizione dei cicli di carico.

La sperimentazione sui prototipi modificati, che costituirà la seconda fase della ricerca, consentirà di valutare l'efficacia delle modifiche apportate.



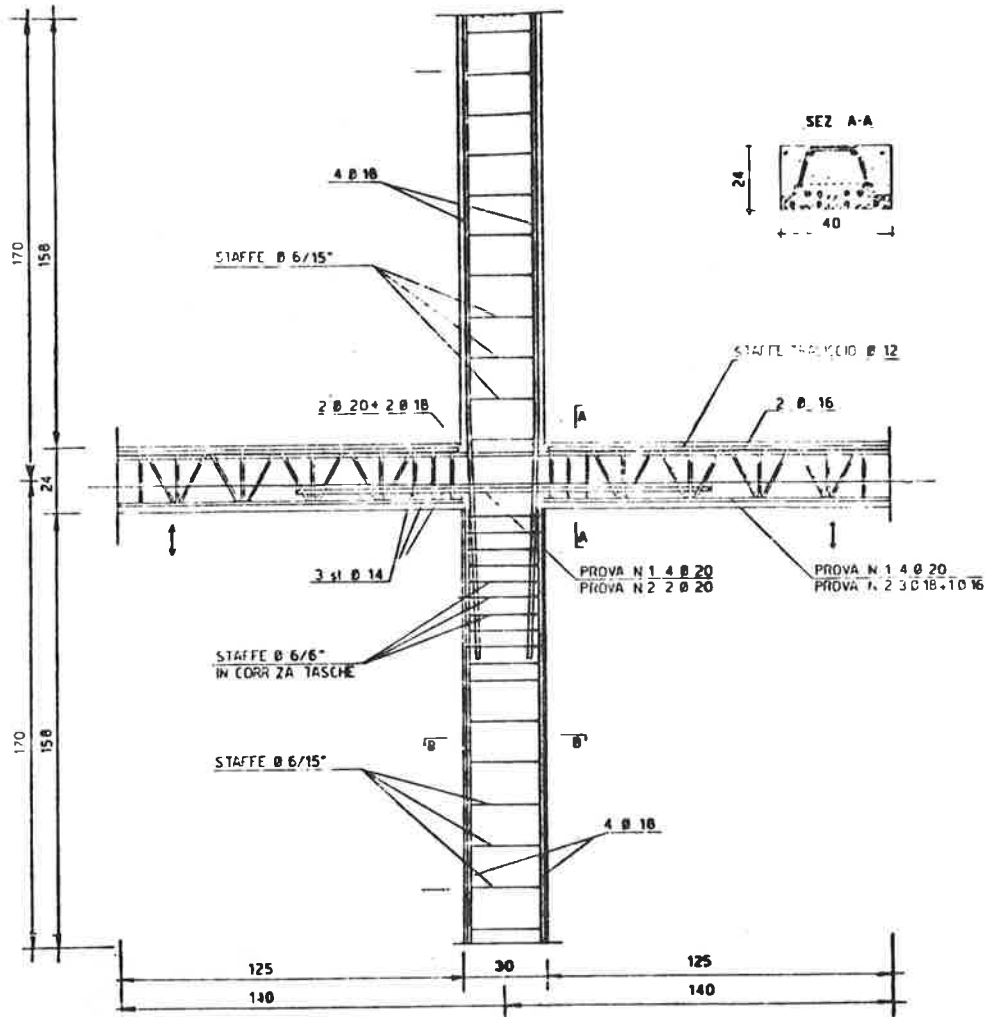


FIG. 1 - Struttura del nodo

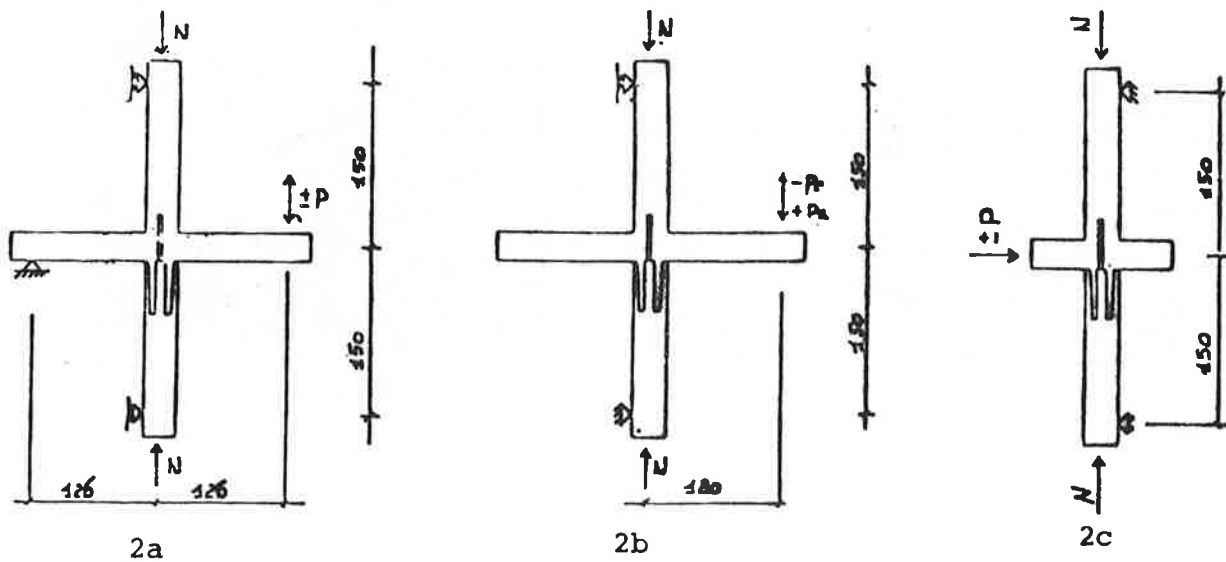


FIG. 2 - Schemi di prova

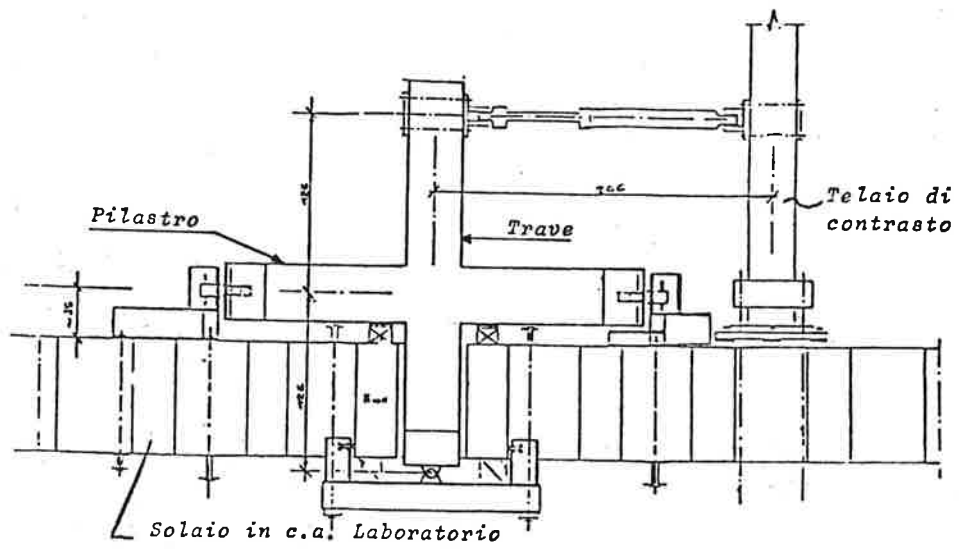


FIG. 3 - Complessivo del dispositivo di prova

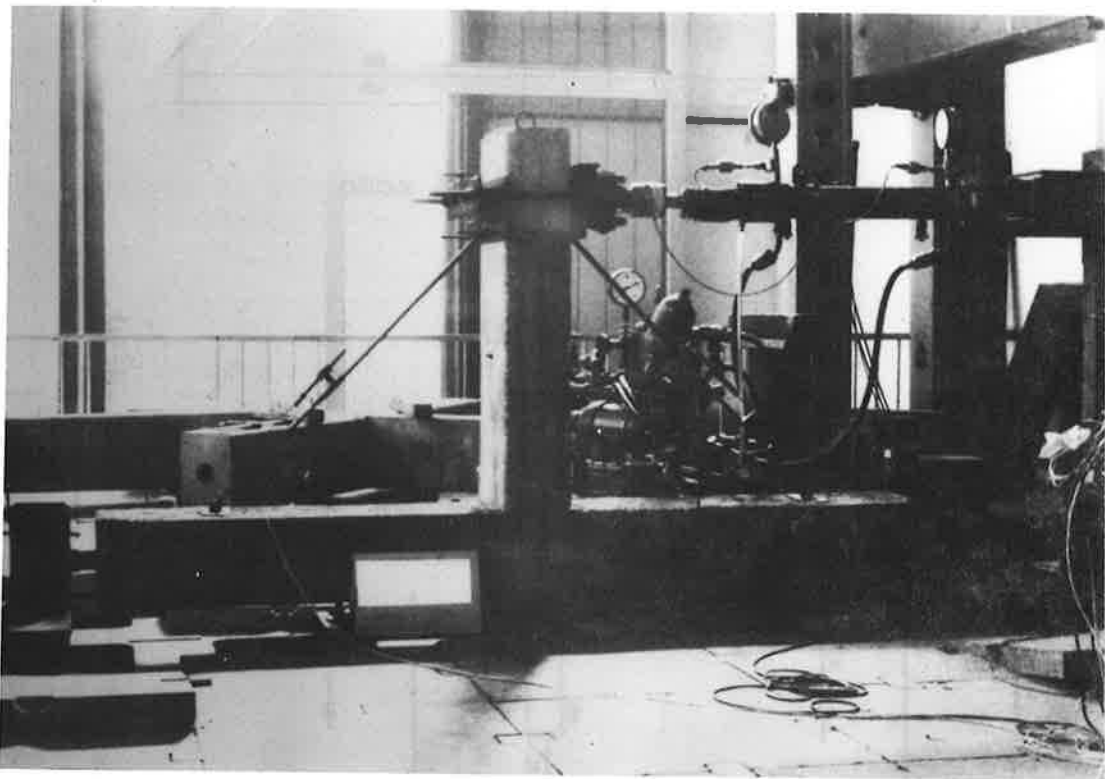
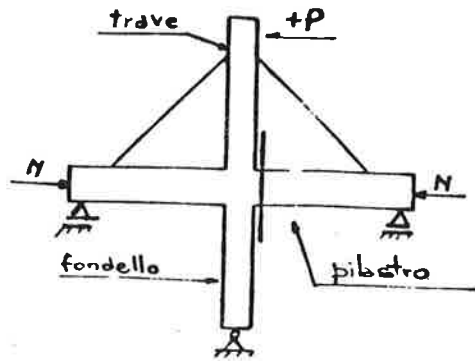


FIG. 4 - Dispositivo di prova

PROVA N. 1 - CAMPIONE TIPO 1

$$N = 0 \quad \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \quad P$$

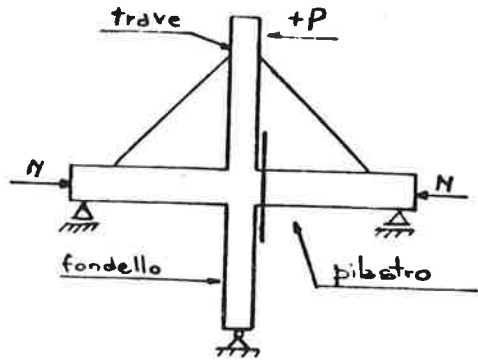
Armatura trave simmetrica



PROVA N. 2 - CAMPIONE TIPO 2

$$N = 0 \quad \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \quad P$$

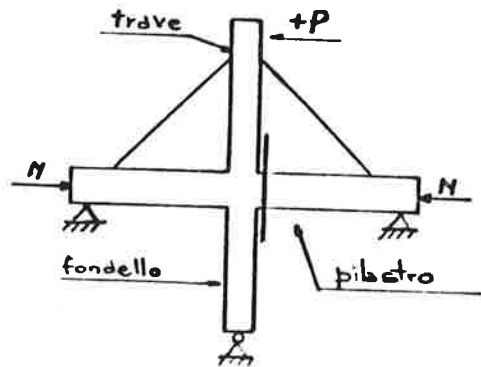
Armatura trave dissimmetrica



PROVA N. 3 - CAMPIONE TIPO 1

$$N = 40 T \quad \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \quad P$$

Armatura trave simmetrica



PROVA N. 4 - CAMPIONE TIPO 2

$$N = 40 T \quad + \quad P \quad \text{---} \quad P/2$$

Armatura trave dissimmetrica

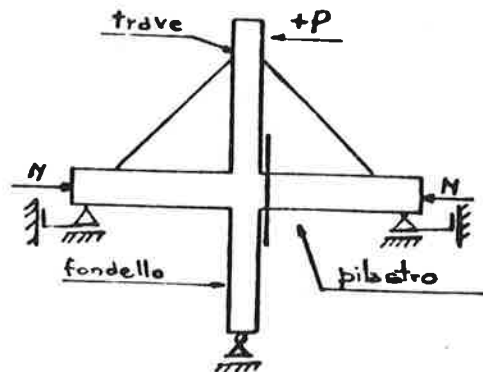


FIG. 5 - Schemi delle prove effettuate



FIG. 6 - Registrazione al plotter

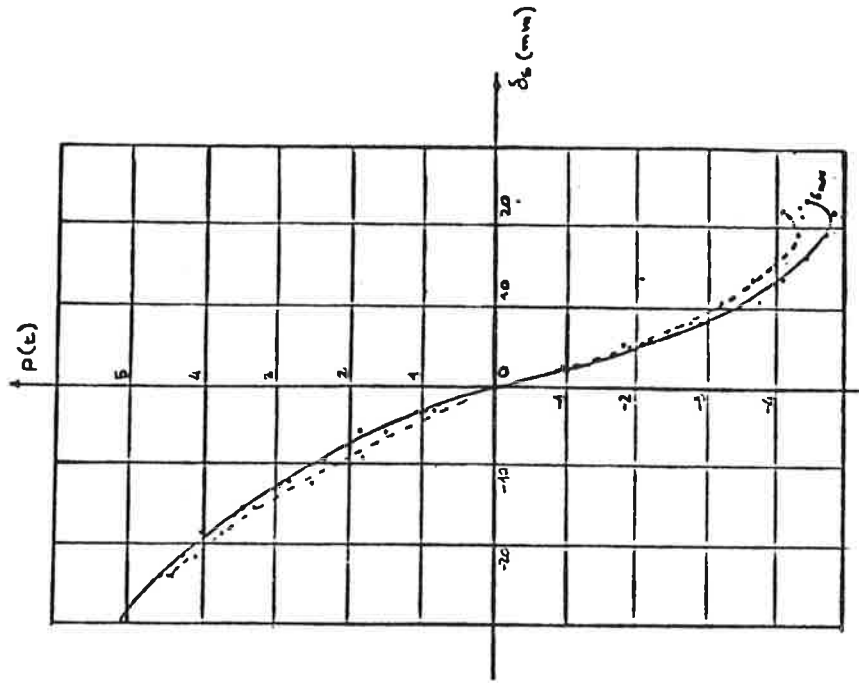


FIG. 8 - Prova 2

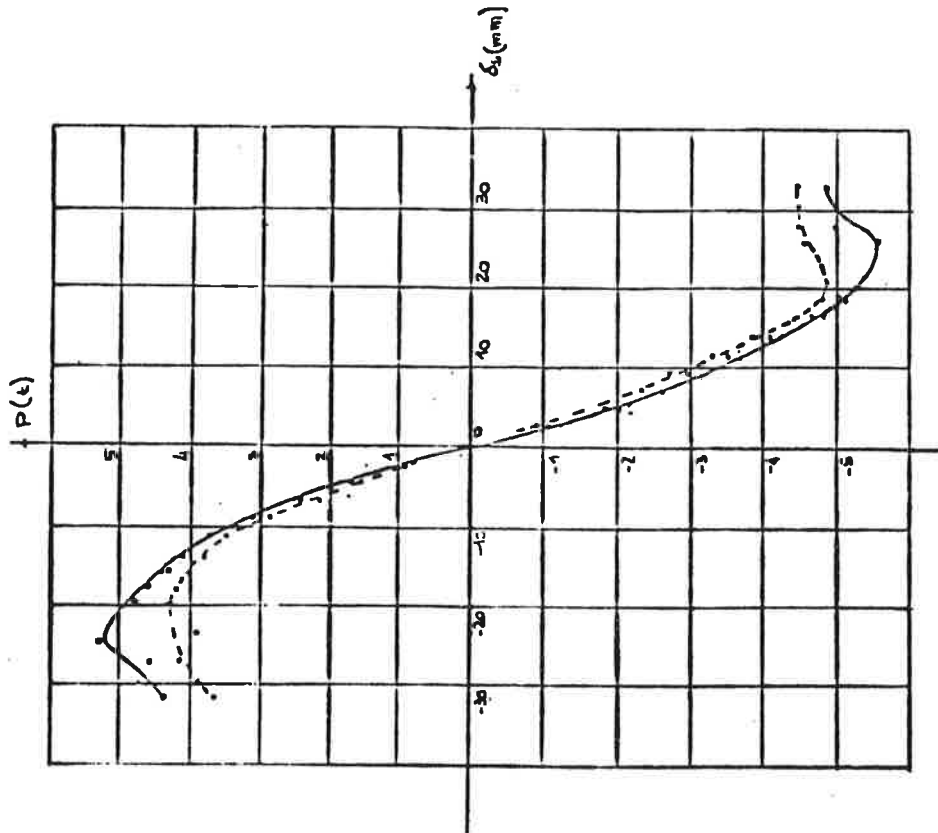


FIG. 7 - Prova 1

Risultati sperimentali

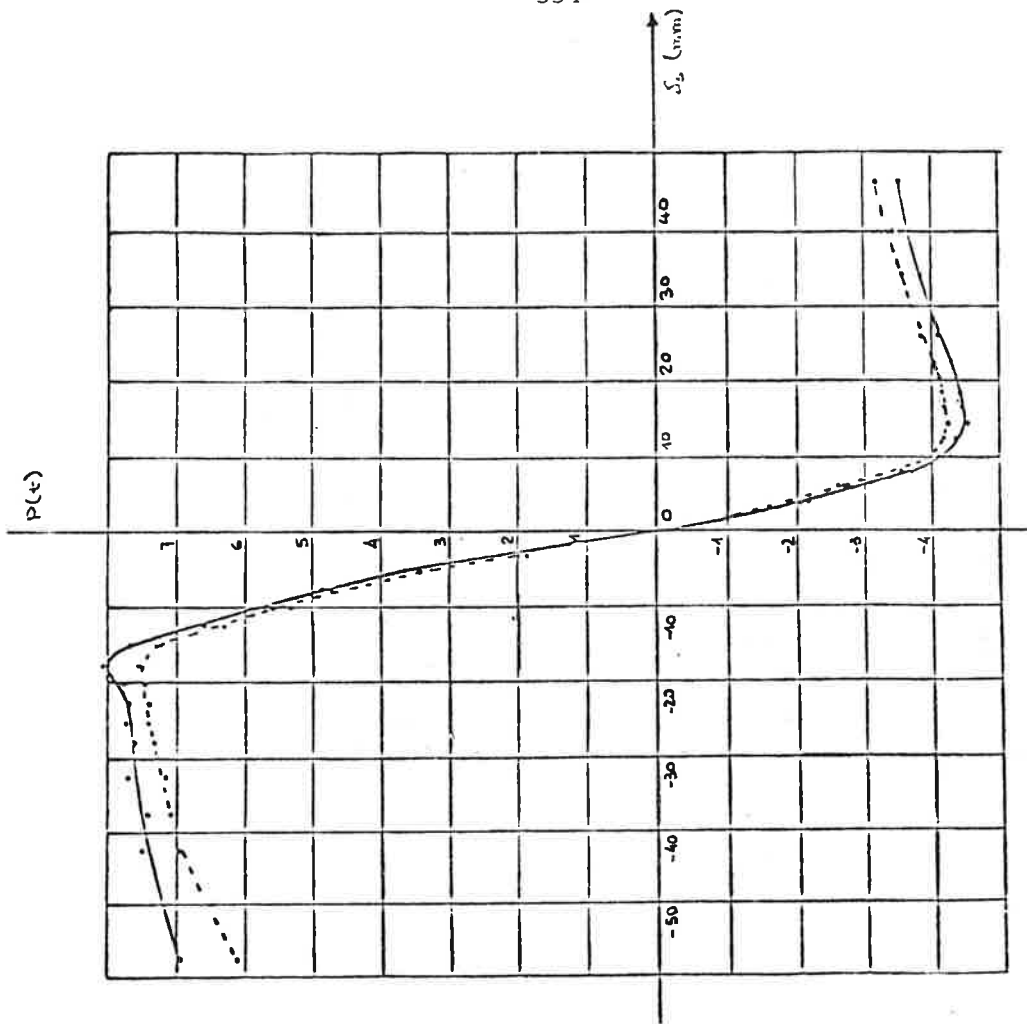


FIG. 10 - Prova 4

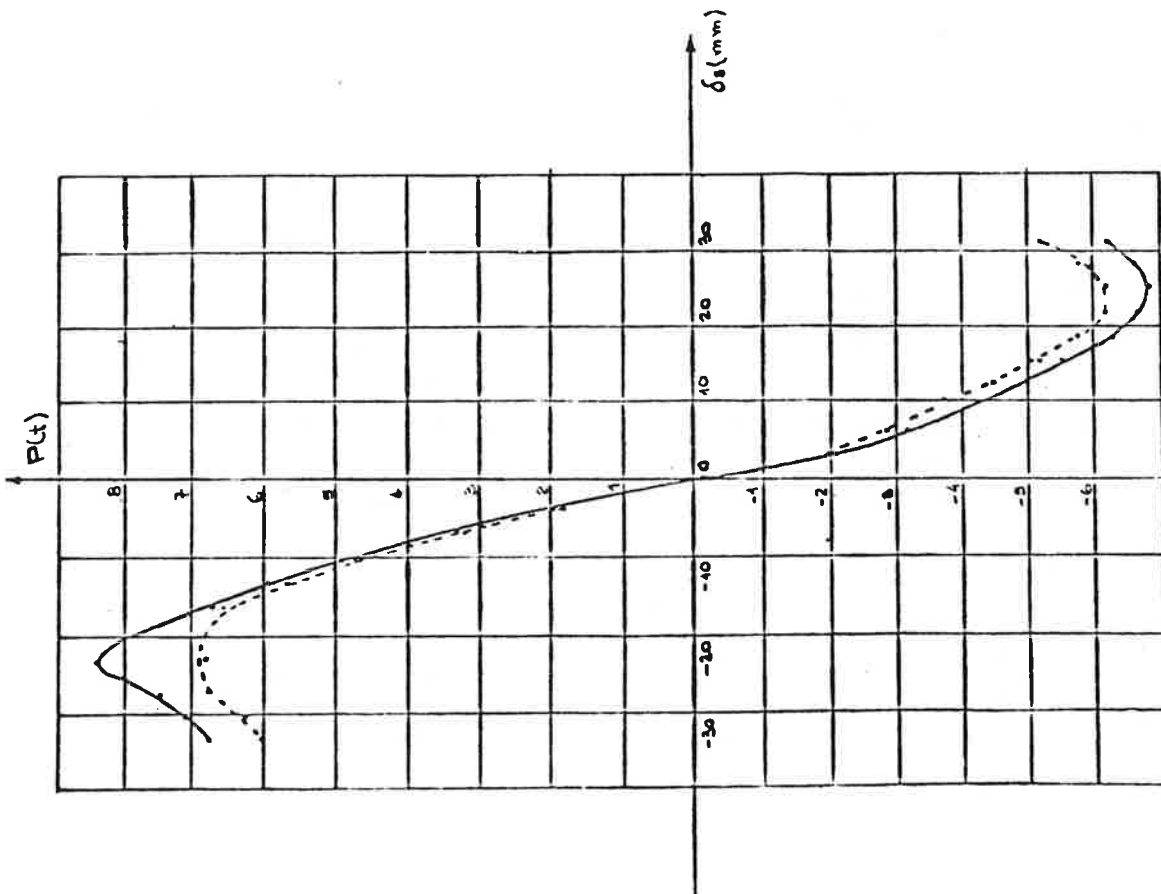


FIG. 9 - Prova 3

Risultati sperimentali

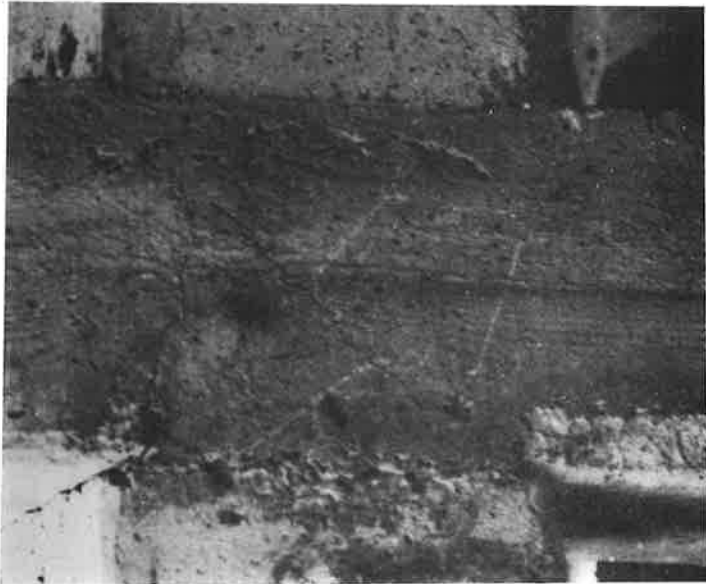


Fig. 11.a (F = 30 KN)

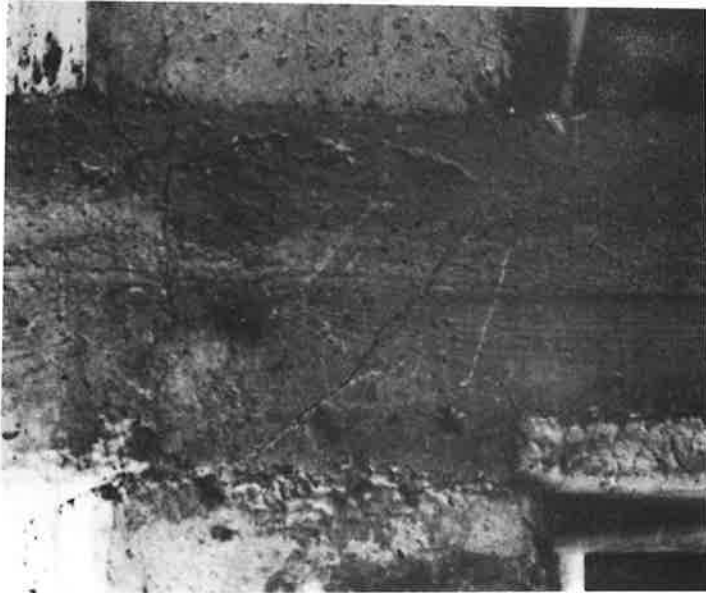


Fig. 11.b (F = 40 KN)

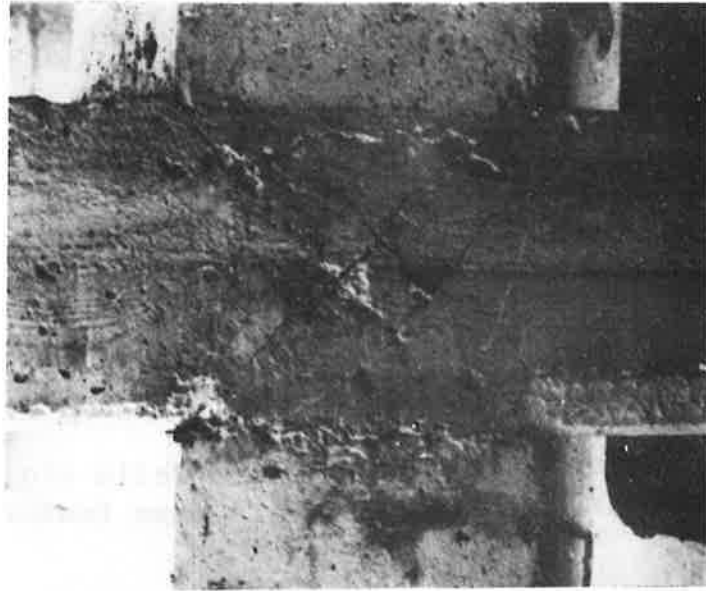


Fig. 11.c (F = 50 KN)

Fig. 11 - Quadro fessurativo del nodo

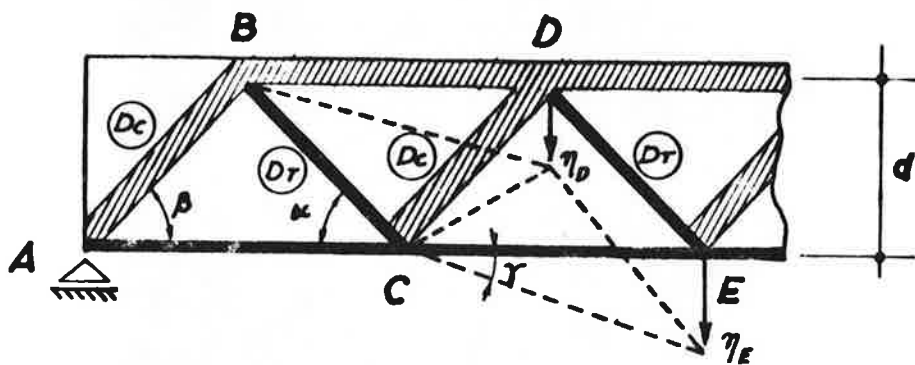


FIG. 12 - Modello di calcolo della rigidità a taglio nella fase fessurata

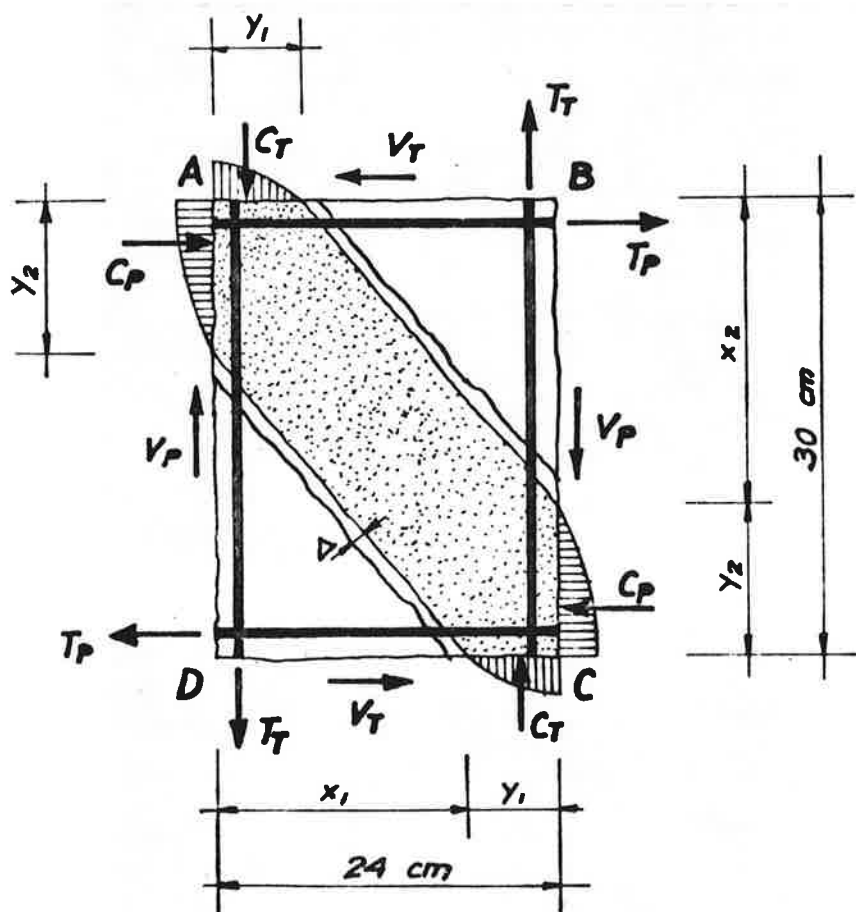
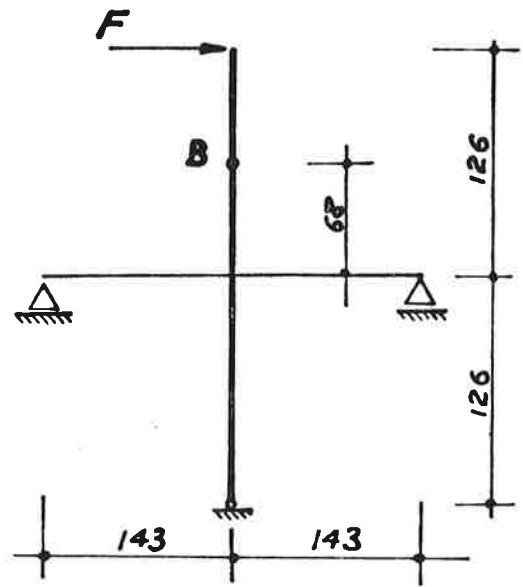


FIG. 13 - Modello di nodo fessurato



CAUSE DI DEFORMABILITÀ	$\eta$ (cm)	$\eta$ (%)
Flessione (stato 1*)	0.435	21.9
Flessione (stato 2**)	0.685	34.5
Taglio (stato 2**)	0.256	12.9
Deformabilità del nodo	0.608	30.7
Totale	1.984	100.0



(\*) stato non fessurato

(\*\*) nello stato fessurato

FIG. 14 - Analisi delle deformabilità

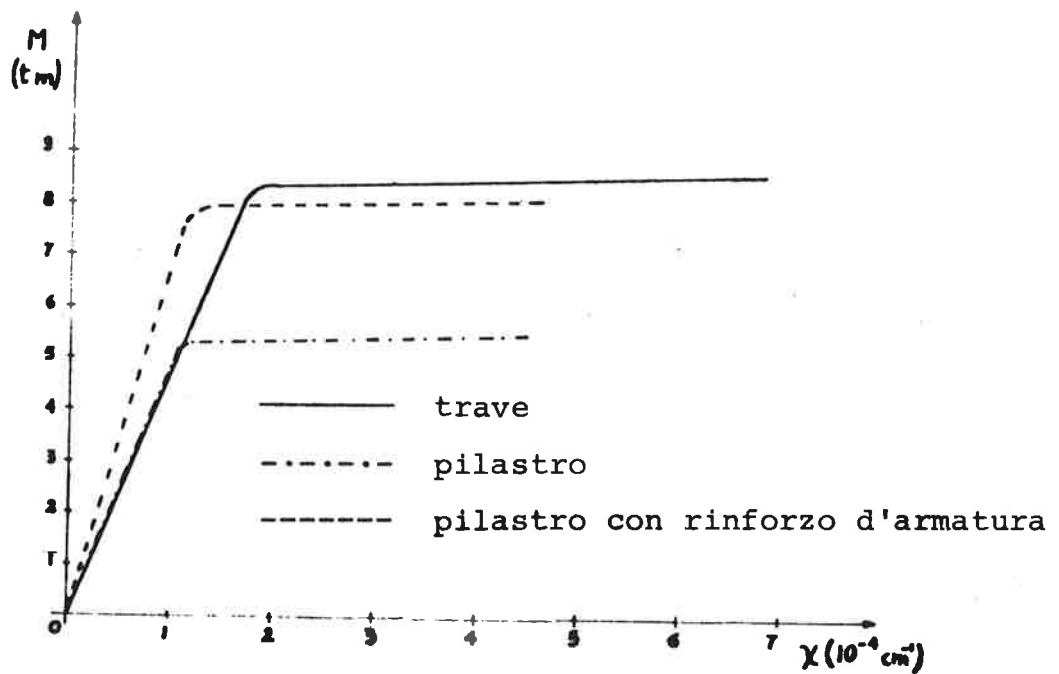


FIG. 15 - Diagrammi momento-curvatura

