

**A) strutture bidimensionali e curve in conglomerato  
cementizio**

A1) ASPETTI TEORICI

Presidente di sessione: prof. ing. Elio GIANGRECO

Relazione generale: prof. ing. Luigi CEDOLIN

M E M O R I E



COMPORTAMENTO NON LINEARE DI PIASTRE IN CONGLOMERATO CEMENTIZIO  
CON ARMATURA LENTA.

ANTONUCCI RODOLFO - COCCHI GIANMICHELE - GOVERNATORI GIORGIO -  
MENDITTO GIOVANNI (1).

Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - Università di  
Ancona.

SOMMARIO

Adottando un legame costitutivo che coglie il comportamento fisico del calcestruzzo in modo più completo di quanto noto in letteratura, viene proposto un elemento finito che riduce notevolmente l'onere computazionale e permette di seguire l'evoluzione del campo degli sforzi e del quadro deformativo della piastra al crescere monotono dei carichi.

SUMMARY

By adopting a constitutive law which describes the physical behaviour of concrete in a more complete way than it is known in the literature, Authors set up a finite element which reduces considerably the computational onus and makes it possible to follow the evolution of the stress and strain patterns of the slab with monotonically increasing loads.

1. PREMESSA

La risposta di una piastra in conglomerato cementizio con armatura lenta all'azione di un carico crescente quasi staticamente nel tempo è caratterizzata dal succedersi (I),(II),(III),(IV),(V),(VI),(VII),(VIII):

- i.- di una fase elastica in cui si evidenzia un comportamento di continuo omogeneo in regime elastico pressoché lineare;
- ii.- di una fase fessurativa in cui il calcestruzzo è interessato da microfratture (microcraks) che, all'aumentare del carico, si ampliano e si congiungono fino a dar luogo a vere e proprie soluzioni di continuità;
- iii.- di successive fasi deformative che modificano in vario modo il regime tensionale interno - ed indirettamente il carico ultimo della piastra - e che traggono origine da fenomeni concomitanti (interlocking action, dowel action, riorientamento delle barre in acciaio, fessurazione locale e secondaria) e di non facile valutazione (IX);
- iv.- di una fase finale di rottura nella quale la fessurazione del calcestruzzo e la plasticizzazione delle barre d'armatura è talmente avanzata da non consentire ulteriori incrementi di carico.

---

(1) Gli Autori dichiarano di aver contribuito in egual misura alla stesura del presente lavoro.

L'analisi in fase elastica-lineare è affrontabile, com'è noto, con i metodi classici della teoria dei continui; le ulteriori fasi vanno seguite, per la complessità del fenomeno, determinando il campo degli sforzi e delle deformazioni all'evolversi degli eventi locali in funzione della storia dei carichi. Questo obiettivo è perseguibile con i procedimenti di discretizzazione del continuo ed in particolare con l'impiego di elementi finiti stratificati a comportamento flessionale sulla base di ipotesi semplificative (sul legame costitutivo del materiale e sulla matrice di rigidità dello strato) ed impiego di algoritmi al passo.

In questa sede, adottando per il conglomerato cementizio un legame costitutivo che coglie il comportamento fisico del materiale in modo più completo di quanto sia già noto in letteratura (X), viene proposto un elemento finito che, con notevole riduzione dell'onere computazionale, si presenta particolarmente flessibile nel seguire l'evoluzione del quadro deformativo della piastra al crescere monotono dei carichi.

L'elemento proposto è poi utilizzato per lo studio di due piastre in c.a. di cui una già analizzata in laboratorio (XIV); i risultati ottenuti evidenziano un ottimo accordo teorico-sperimentale.

## 2. ANALISI DEL PROBLEMA

L'analisi agli elementi finiti di una piastra in regime non lineare, comporta, com'è noto, la soluzione del sistema di equazioni algebriche di equilibrio:

$$\underline{F} = \underline{K}(\underline{s}) \underline{s} \quad 1$$

con  $\underline{F}$  e  $\underline{s}$  rispettivamente vettore dei carichi e degli spostamenti nodali e  $\underline{K}(\underline{s})$  matrice di rigidità della struttura.

Adottando l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni - con che rimane invariato il sistema di riferimento e validi i legami del primo ordine deformazione-spostamenti - la non linearità della 1 è attribuibile al comportamento non lineare del materiale.

L'ulteriore ipotesi di indipendenza dal tempo del fenomeno e di carichi monotonicamente crescenti, consente di risolvere la 1 calcolando le variazioni degli spostamenti ( $\delta \underline{s}$ ) per piccole variazioni dei carichi ( $\delta \underline{F}$ ) e risolvendo il sistema di tipo lineare

$$\delta \underline{F} = \underline{K}(\underline{s}) \delta \underline{s} \quad 2$$

con il procedimento misto-incrementale schematicamente riassunto in fig. 1.

Si opera, cioè, per incrementi di carico successivi affinando nel contempo la soluzione con una serie di cicli iterativi ad ogni incremento secondo quanto risulta dalla relazione ricorrente:

$$\delta \underline{s}_i = \left[ \underline{K}(\underline{s}_{i-1}) \right]^{-1} \cdot \delta \underline{F}_i + \sum_1^{N_i} k \left[ \underline{K}(\underline{s}_{i-1}) \right]^{-1} \cdot \delta \underline{F}_{sk} \quad 3$$

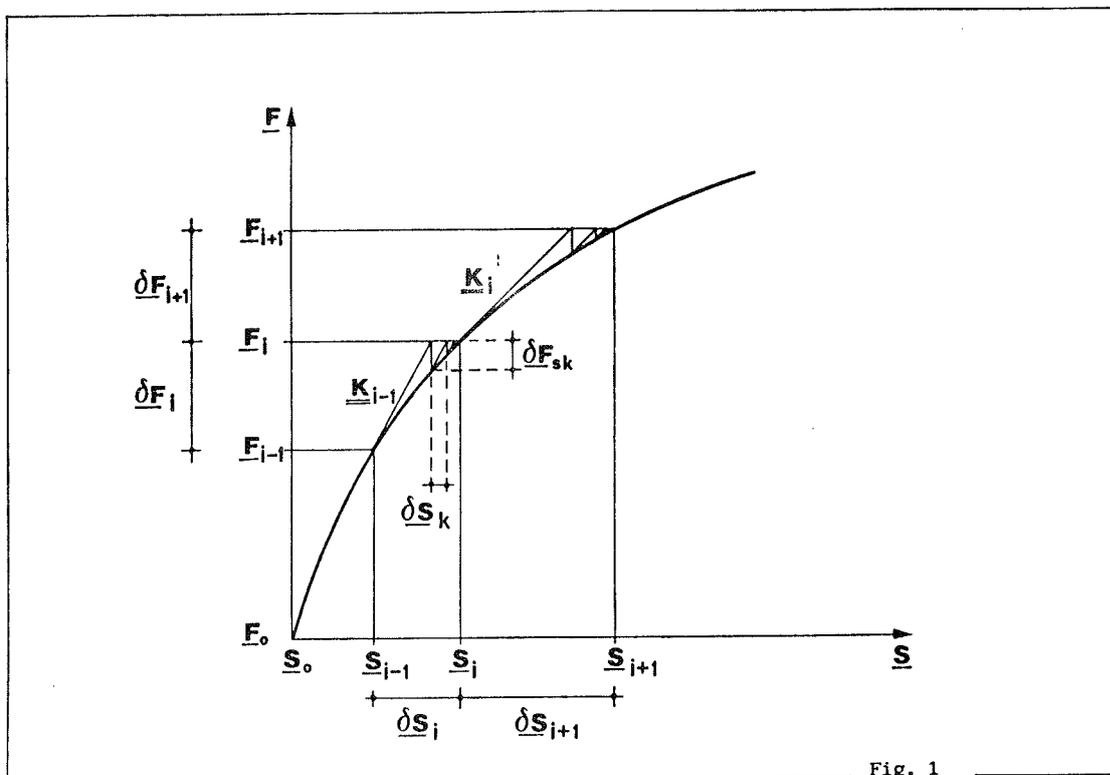


Fig. 1

dove gli indici  $i$  e  $k$  caratterizzano rispettivamente il passo incrementale ed il ciclo iterativo. La matrice di rigidezza  $K$  è ritenuta costante nell'ambito del  $k^{\text{mo}}$  ciclo iterativo e viene riaggiornata ad ogni incremento di carico in funzione degli spostamenti corrispondenti all'incremento precedente, essendo:

$$\delta F_{-sk} = F_i - F_{-ek} \quad 4$$

con:

$\delta F_{-sk}$  aliquote dei carichi nodali non equilibrati dalle reali tensioni interne al passo  $k$  (forze squilibrate);

$F_i$  carichi nodali corrispondenti all'incremento  $i^{\text{mo}}$ ;

$F_{-ek}$  aliquote dei carichi nodali in equilibrio con le reali tensioni interne al passo  $k$ .

Al termine dell' $1^{\text{mo}}$  passo incrementale risulta poi:

$$S_1 = S_0 + \sum_i^1 S_i \quad 5$$

### 3. ELEMENTO FINITO E MODELLO DI SPOSTAMENTO

Si adotta l'elemento finito a shell ribassato con doppia curvatura e a pianta rettangolare (X) avente quattro nodi (ciascuno con cinque gradi di libertà), costituiti da ciascun vertice della superficie di riferimento (fig.2). Per tale elemento il modello delle tre componenti di spostamento ( $u, v, w$ ) nei punti della superficie di riferimento rispetto al sistema di fig.2 sono dati da:

$$u_o(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_9 (C_x x + C_{xy} y) + \\ + \frac{1}{2} \alpha_{10} (C_x x^2 - C_y y^2) + \alpha_{11} (C_x xy + C_{xy} y^2)$$

$$v_o(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy + \alpha_9 (C_{xy} x + C_y y) + \\ + \alpha_{10} (C_{xy} x^2 + C_y xy) + \frac{1}{2} \alpha_{11} (C_y y^2 - C_x x^2)$$

6

$$w_o(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} x^2 + \alpha_{14} y^2 + \\ + \alpha_{15} x^3 + \alpha_{16} x^2 y + \alpha_{17} xy^2 + \alpha_{18} y^3 + \alpha_{19} x^3 y + \\ + \alpha_{20} xy^3$$

con

$C_x$  e  $C_y$  curvature secondo x ed y rispettivamente;

$C_{xy}$  curvatura mista dell'elemento.

I venti parametri

$$\underline{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}]^T$$

sono esprimibili a mezzo della:

$$\underline{s}_e = \underline{H} \underline{\alpha}$$

7

dove:

la matrice  $\underline{H}$  è fornita dalla tabella di fig.3;

$$\underline{s}_e = [u_1, v_1, w_1, \varphi_1, \psi_1 ; u_2, \dots ; \dots \psi_4]^T$$

8

e, per il nodo generico ( $k=1,2,3,4$ ):

$u_k, v_k, w_k$  sono le componenti dello spostamento rispettivamente nella direzione x,y,z;

$$\varphi_k = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_k \quad \text{la rotazione oraria attorno all'asse y;}$$

$$\psi_k = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_k \quad \text{la rotazione antioraria attorno all'asse x.}$$

Risulta dalla 6 la matrice delle funzioni di forma

$$\underline{N}_e = \underline{F} \underline{H}^{-1}$$

9

dove la matrice  $\underline{F}$  è riportata nella tabella di fig.4.

Ritenendo valida l'ipotesi della conservazione della normale al piano di riferimento della piastra durante la deformazione e considerando l'elemento costituito da n strati, la matrice di rigidez

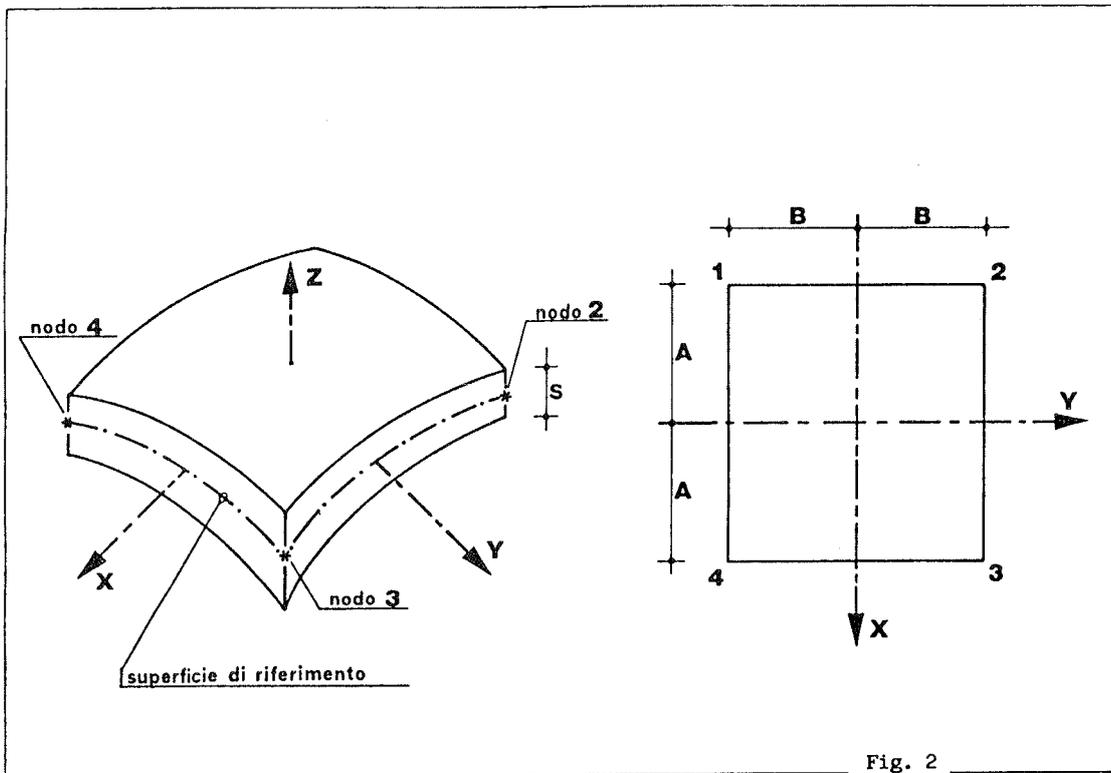


Fig. 2

za dell'elemento è fornita da:

$$\underline{K}_e = (\underline{H}^{-1})^T \cdot \left( \sum_1^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \underline{\beta}^* \cdot \underline{C} \cdot \underline{\beta}^* dx dy dz \right) \cdot \underline{H}^{-1} \quad 10$$

essendo  $\underline{\beta}^*$  la matrice riportata nella tabella di fig.5,  $\underline{C}$  la matrice relativa al legame costitutivo in forma differenziale del materiale dello strato  $j^{\text{mo}}$  di cui alla:

$$\underline{\mathcal{G}}(x,y,z_j) = \underline{C}(\underline{\mathcal{E}}(x,y,z_j)) \cdot \underline{\mathcal{E}}(x,y,z_j) \quad 11$$

Il calcolo della 10 viene condotto in forma chiusa tenendo conto di un legame costitutivo medio dello strato (indipendente da  $x$  ed  $y$ ): si evitano così le approssimazioni e gli oneri computazionali connessi con un'integrazione numerica dell'espressione matriciale contenuta nella 10. Siffatto modo di procedere non influisce, del resto, sulla correttezza della soluzione avendo adottato, come si è detto, un procedimento di tipo misto.

Le forze nodali squilibrate risultano dalla:

$$\underline{F}_{se} = (\underline{H}^{-1})^T \cdot \sum_1^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \underline{\beta}^*(x,y,z) \cdot \underline{\mathcal{G}}_s(x,y,z_j) dx dy dz \quad 12$$

indicando  $\underline{\mathcal{G}}_s$  le aliquote di tensione non equilibrate con i carichi esterni (fig.6).



Il calcolo della 12 è condotto integrando, rispetto a  $z$  in forma chiusa, e, rispetto ad  $x$  ed  $y$ , mediante il metodo di Gauss-Legendre, considerando 16 punti del dominio dell'elemento finito equindi altrettanti legami costitutivi diversi per ogni strato.

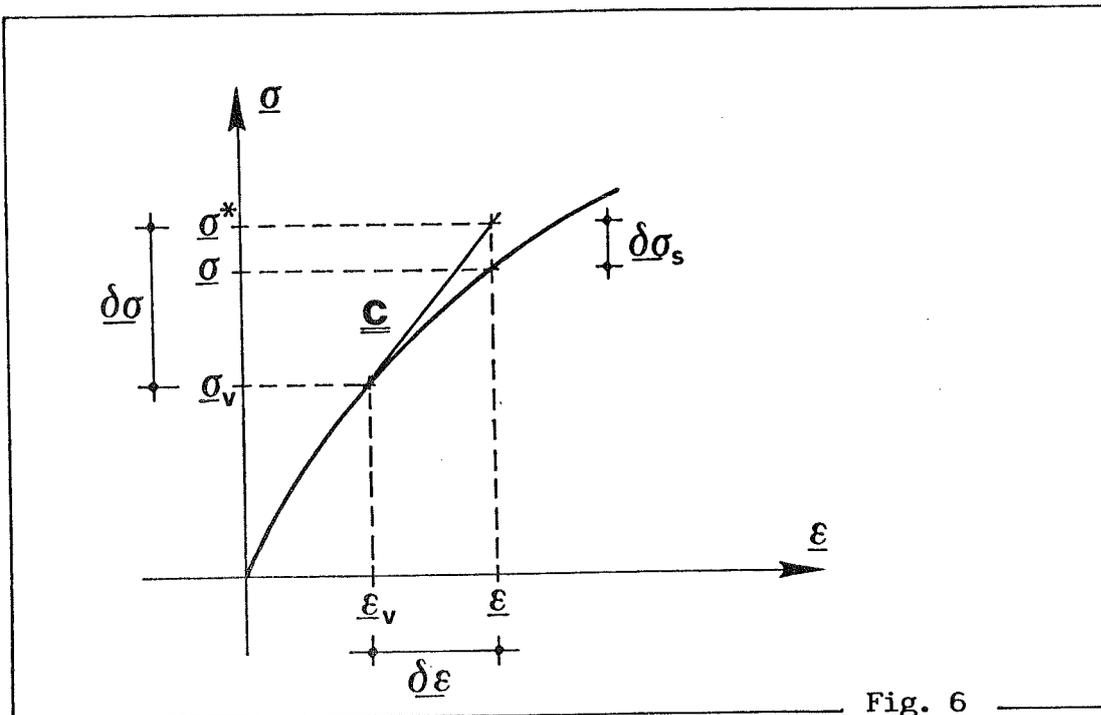


Fig. 6

#### 4. LEGAMI COSTITUTIVI E CRITERI DI ROTTURA

In fig.7 è indicato il legame costitutivo dell'acciaio del generico strato. Per il calcestruzzo di ciascun strato si adotta il legame costitutivo biassiale (2) in forma differenziale di Darwin e Pecknold (XI) nel quale i moduli elastici tangenti relativi alle dire-

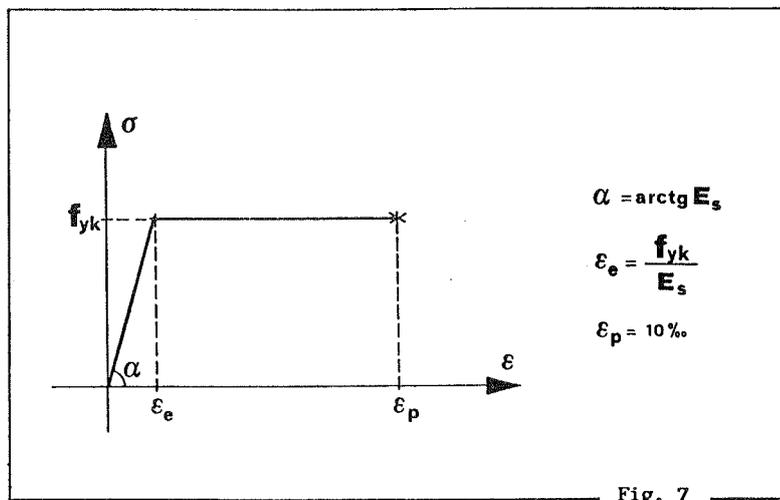
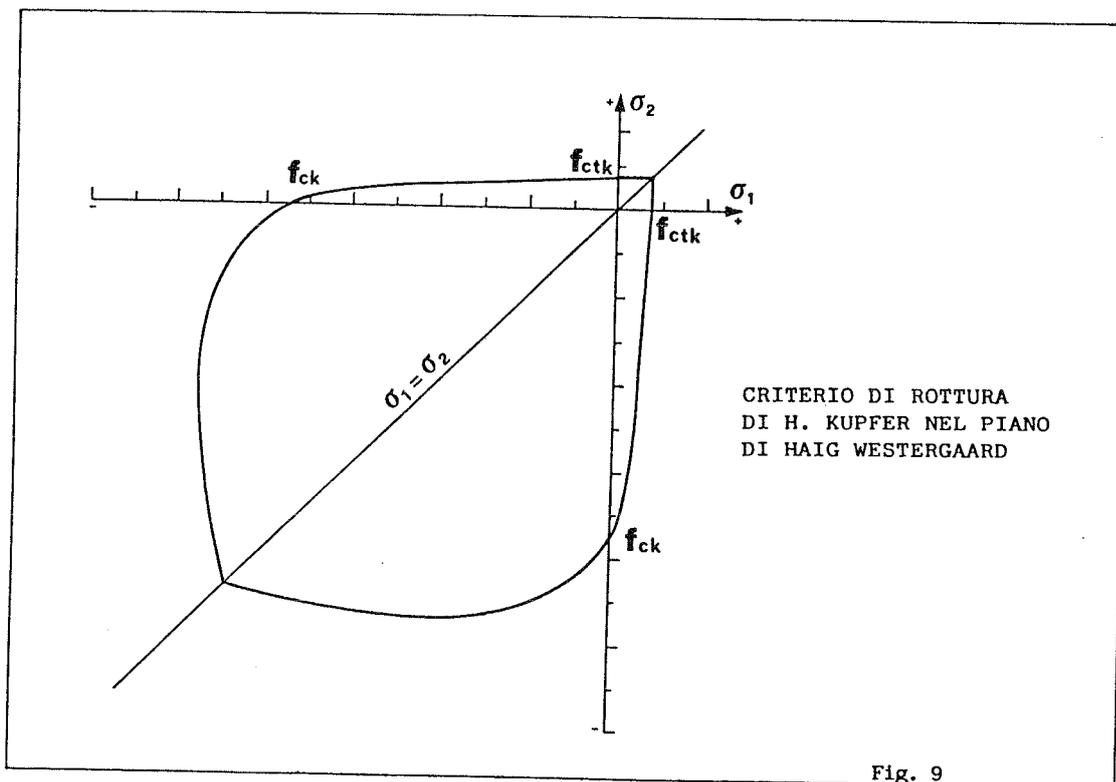
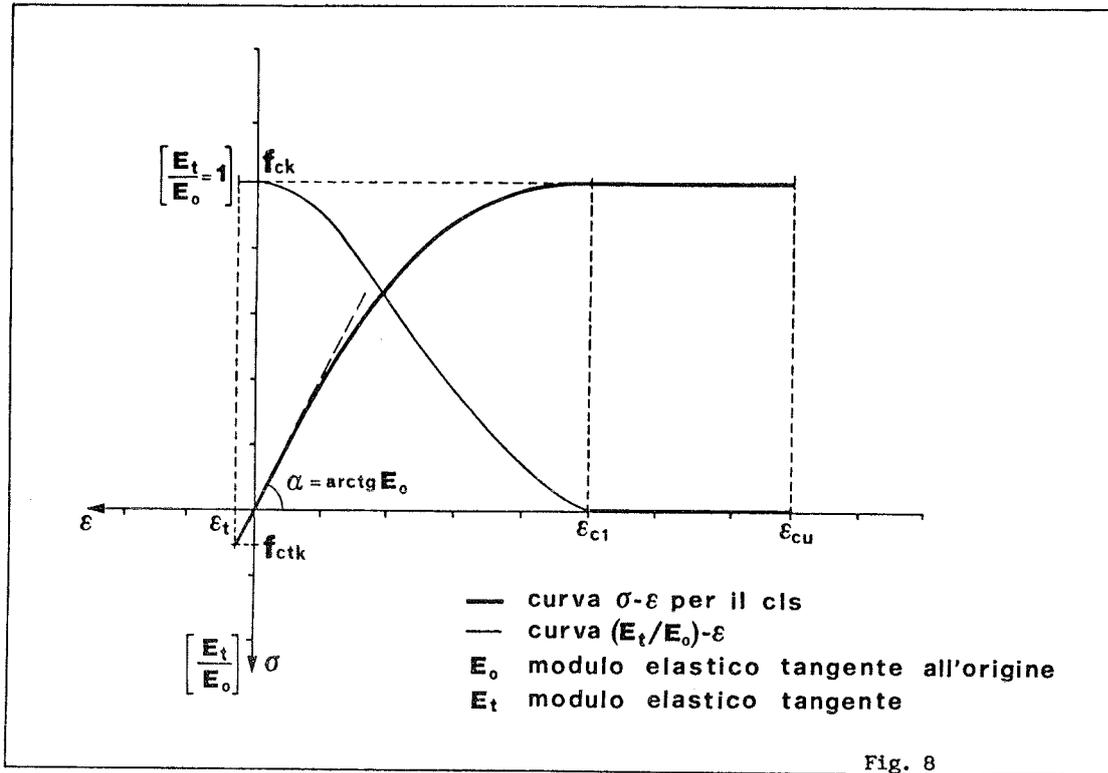
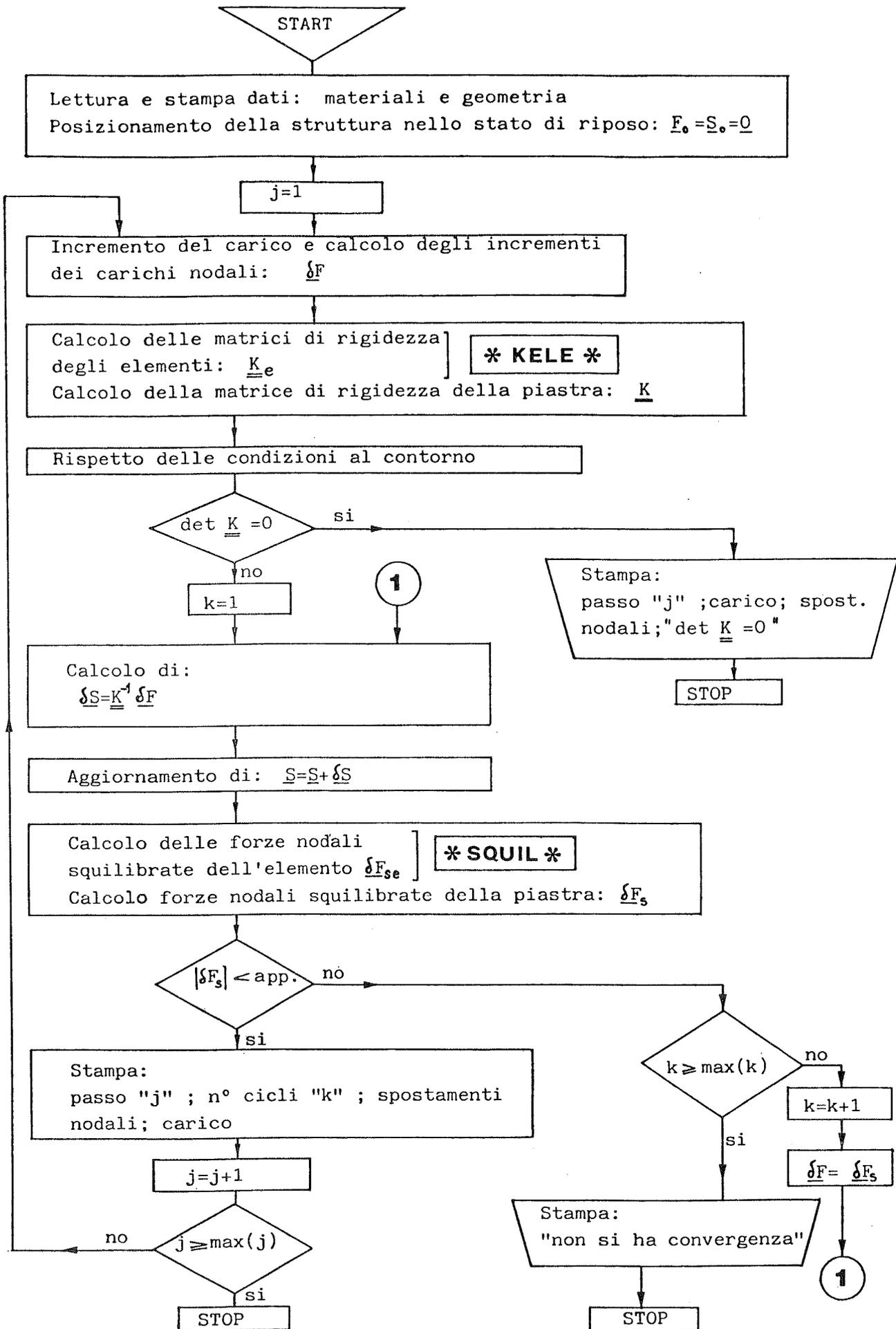


Fig. 7

(2) l'adozione del legame costitutivo biassiale trova la sua giustificazione nel fatto che, con buona approssimazione, può ritenersi trascurabile l'effetto delle tensioni normali e tangenziali nella direzione dell'asse  $z$ .

zioni principali sono ricavabili dalla derivazione delle curve uni-  
 assiali equivalenti ottenibili dalla curva tensioni-deformazioni  
 fornita da Saenz (XII) modificando con un segmento di retta orizzon-  
 tale il ramo discendente (fig.8).





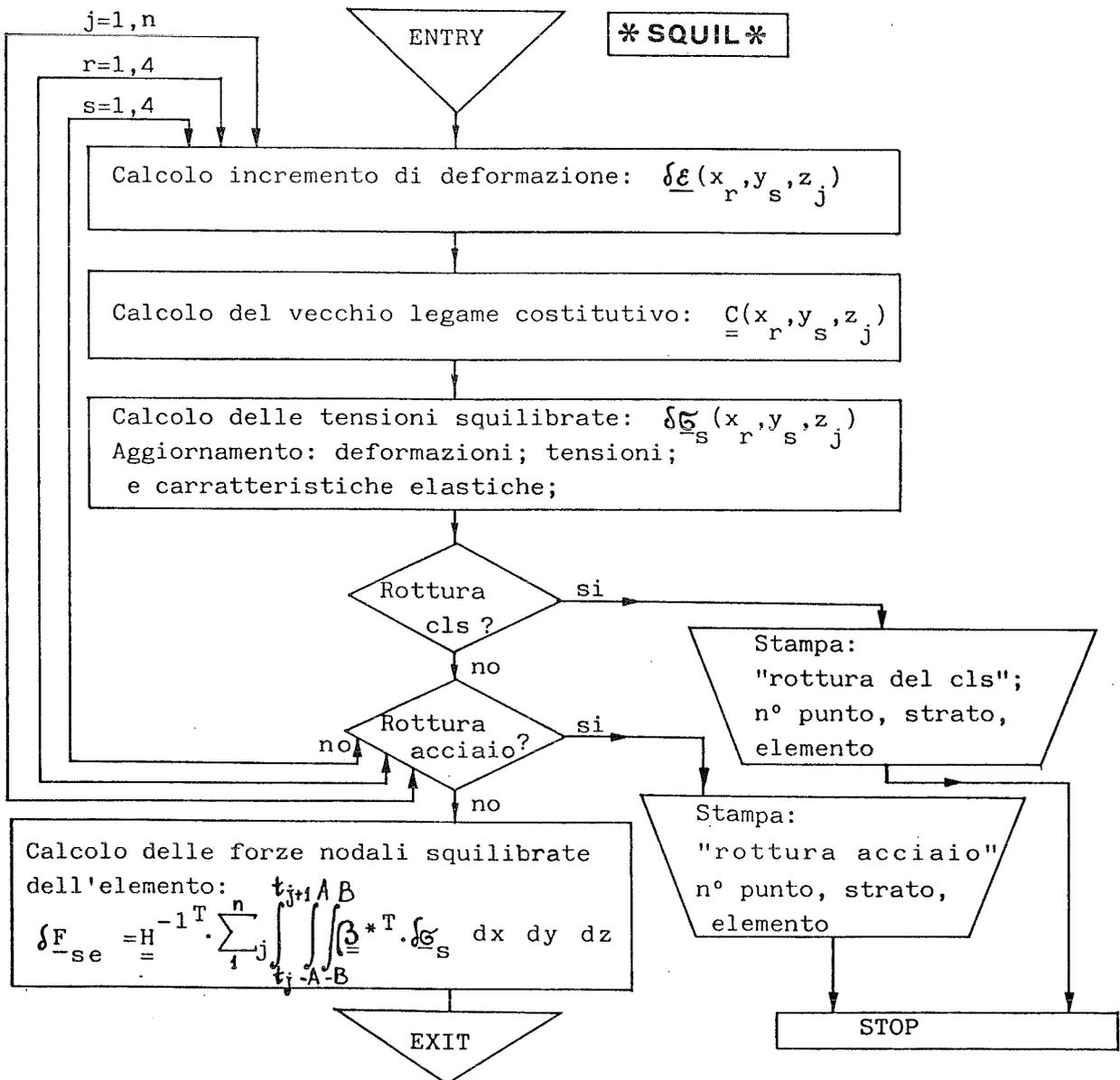
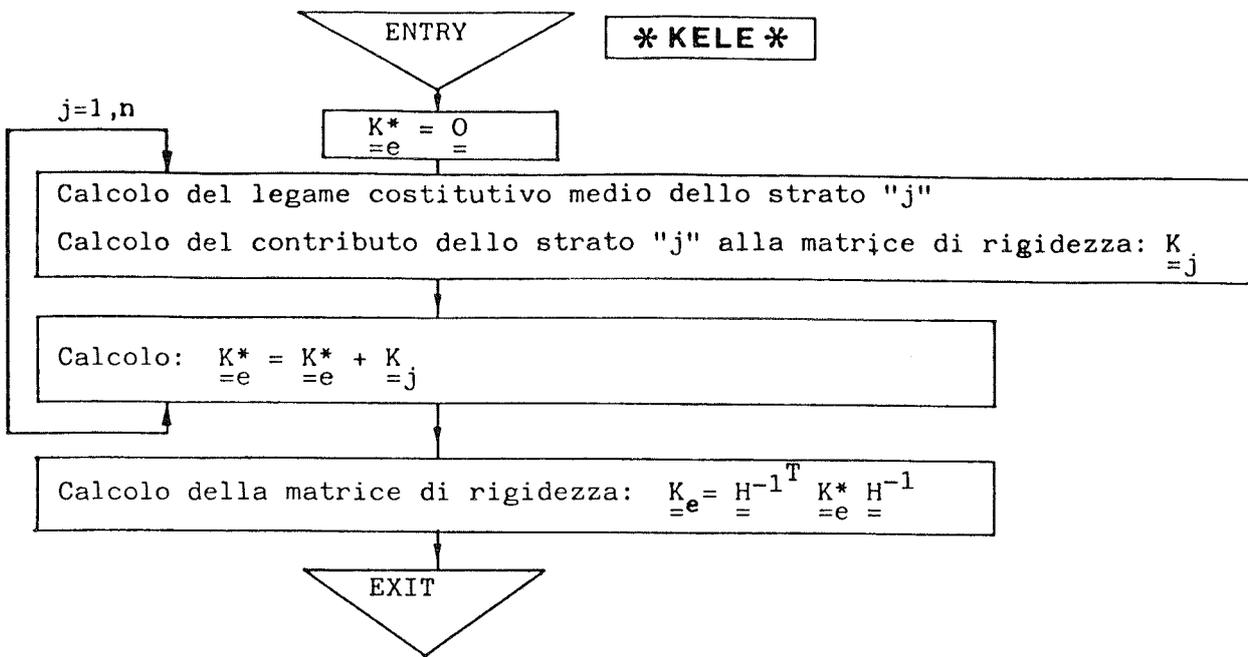
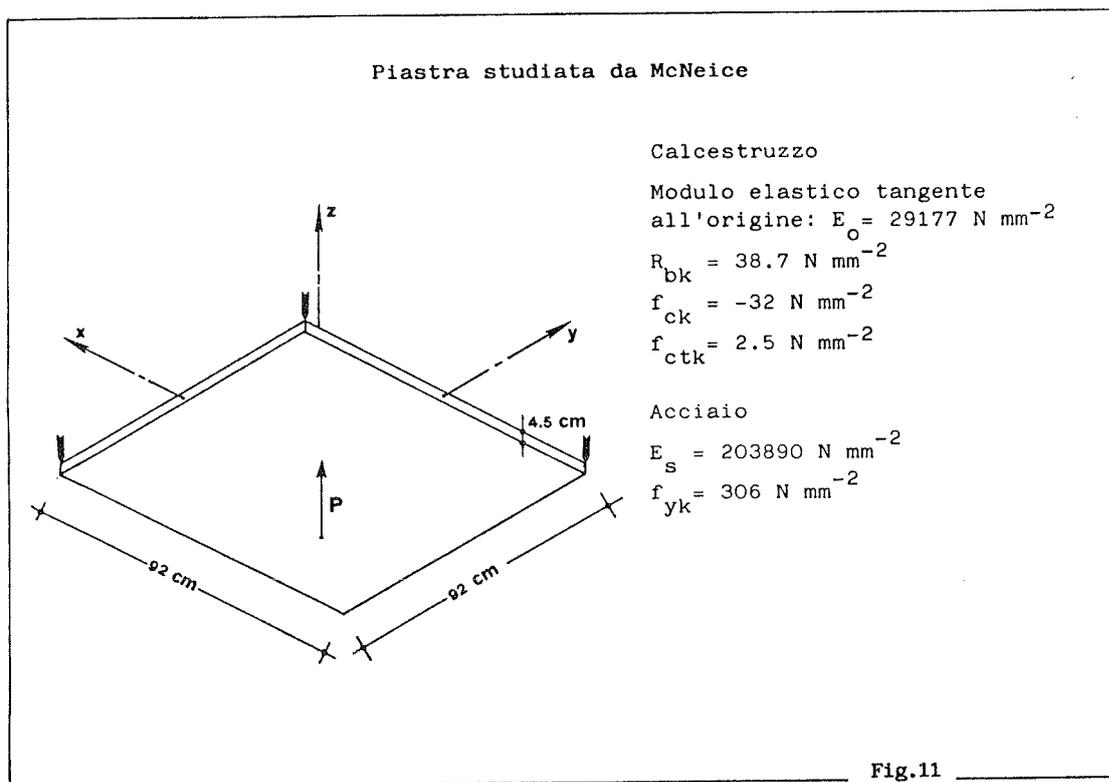


Fig.10

Quale criterio di rottura si è adottato quello proposto da Kupfer e Gerstle (XIII) (fig.9), sostituendo la parabola cubica relativa al campo compressione-trazione con una parabola di secondo grado, nell'ipotesi di calcestruzzo di media resistenza.

## 5. APPLICAZIONI NUMERICHE

Il procedimento illustrato è stato programmato per l'elaboratore elettronico (3) (fig.10) ed utilizzato per due applicazioni. La prima è relativa alla piastra studiata da McNeice (II) per la quale si dispone del diagramma sperimentale carico-spostamento. Le caratteristiche elasto-meccaniche della piastra sono consegnate nella fig.11 ed in fig.12 è illustrata la stratificazione adottata e la maglia degli elementi finiti.



Nelle figg.13 e 14 sono riportate in funzione dei valori del carico le deformate della linea di bordo (fig.13) e della mediana (fig.14).

In fig.15 la curva carico-spostamento ottenuta con il procedimento avanti esposto viene confrontata con la curva sperimentale di McNeice e con quella che altri Autori hanno ottenuto mediante procedimenti agli elementi finiti.

- (3) Il programma è disponibile presso l'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Ancona.

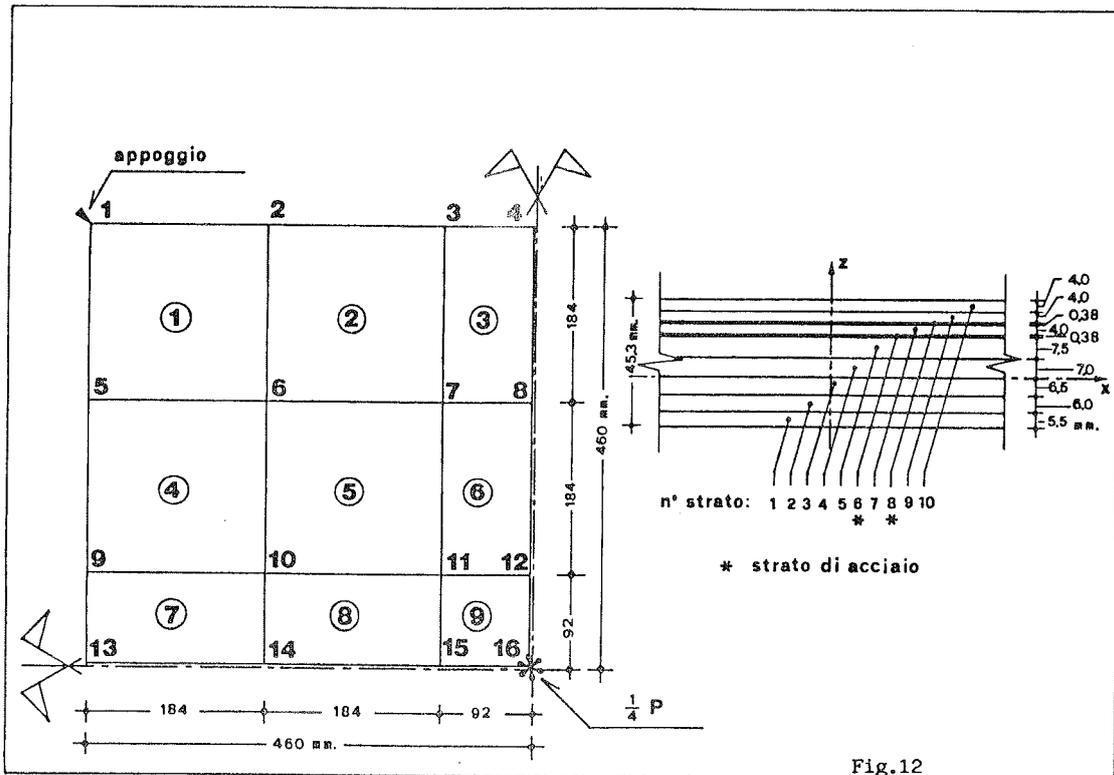
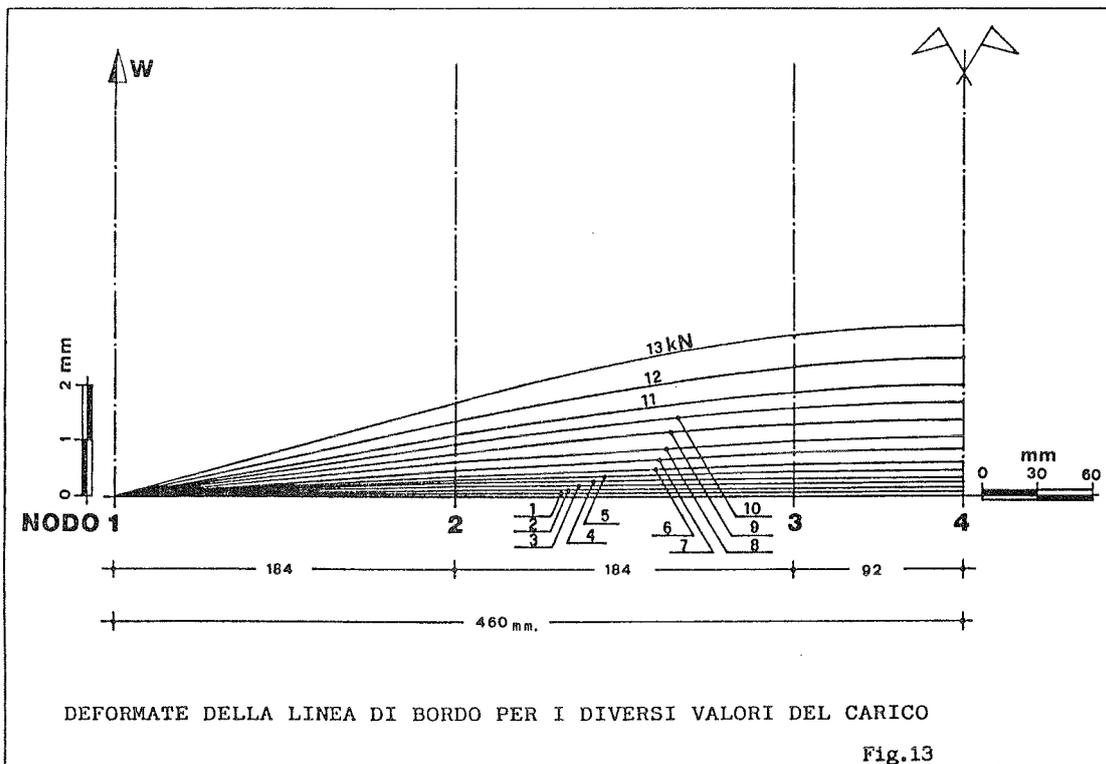


Fig.12



L'ispezione della figura evidenzia che la curva ricavata con il procedimento esposto aderisce abbastanza bene a quella sperimentale e inoltre la approssima meglio di tutte le altre pur avendo utilizzato un numero di elementi finiti quattro volte inferiore. Ciò deriva:

- i.- dall'impiego di un legame costitutivo per il calcestruzzo descritto, come si è visto, dalla curva di Saenz, a differenza della schematizzazione trilatera adottata da altri Autori;
- ii.- all'impiego di un legame costitutivo che è proprio di ciascuno dei 16 punti dello strato dell'elemento, a differenza di un legame costitutivo che altri Autori assumono costante per l'intero strato.

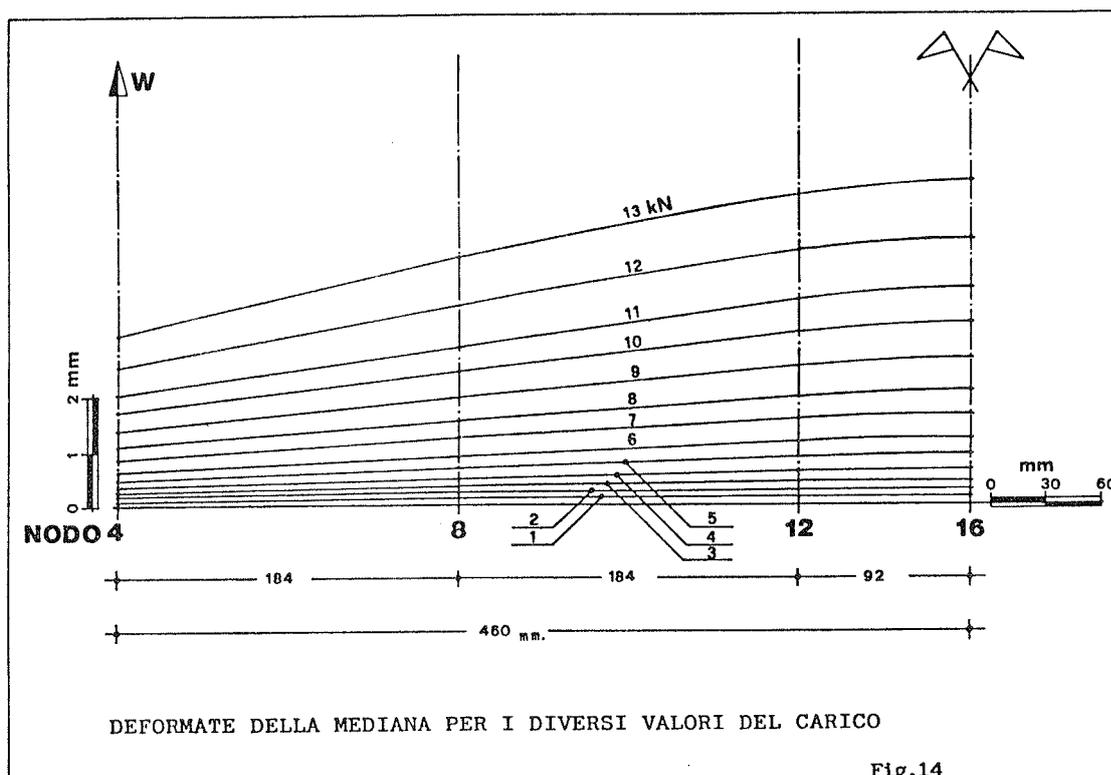
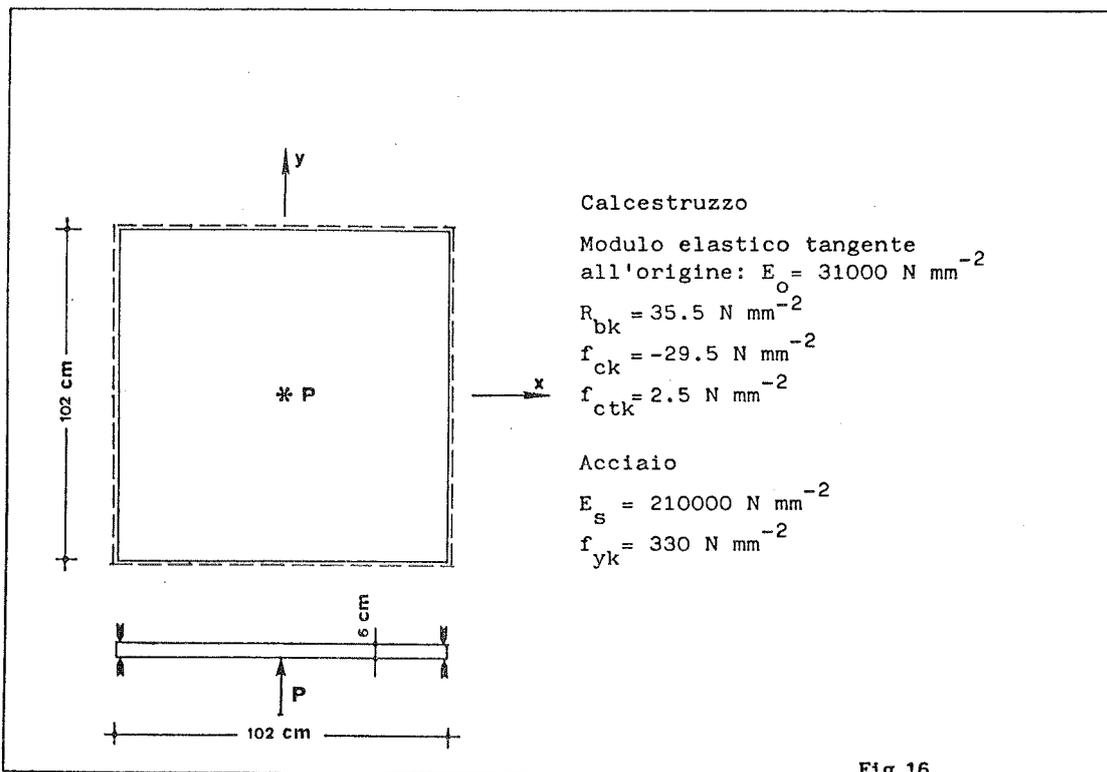
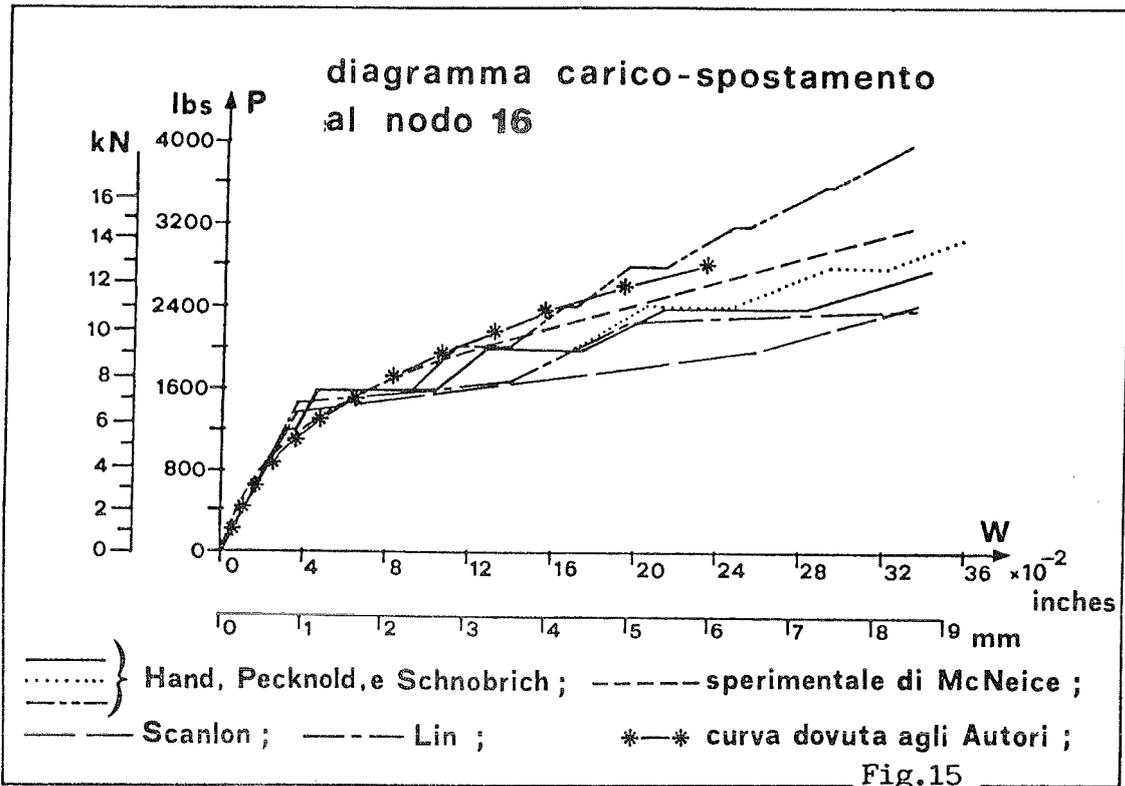
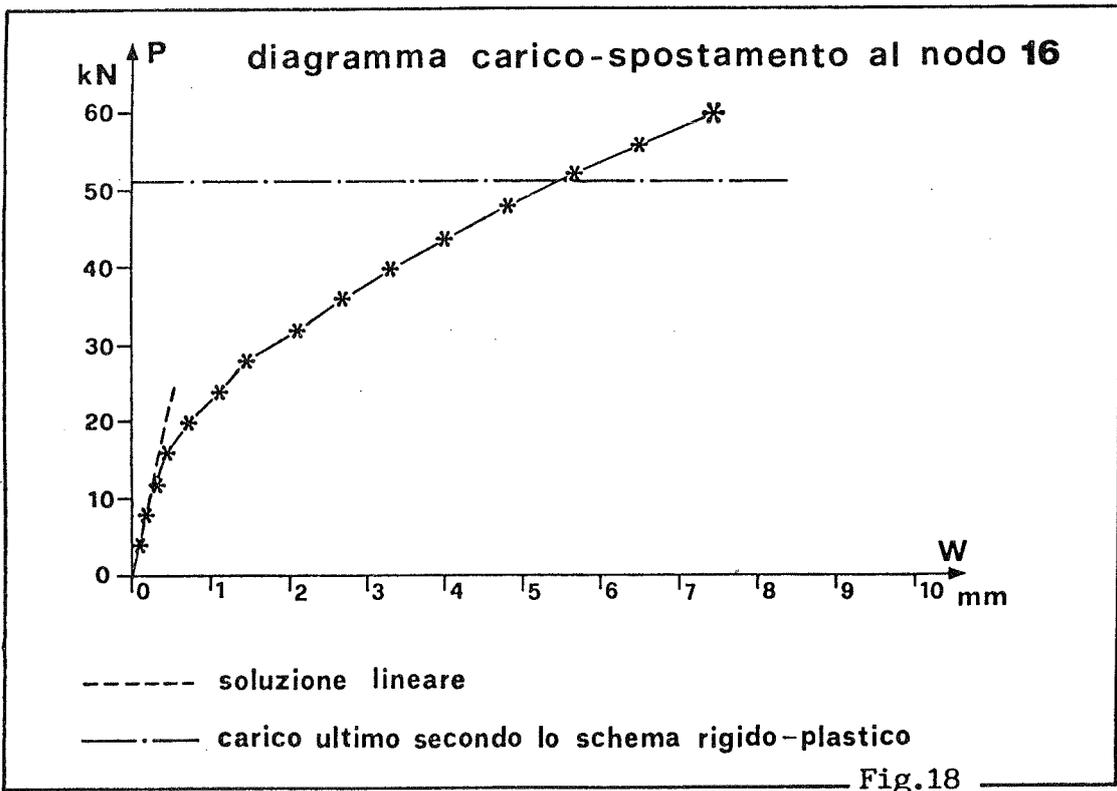
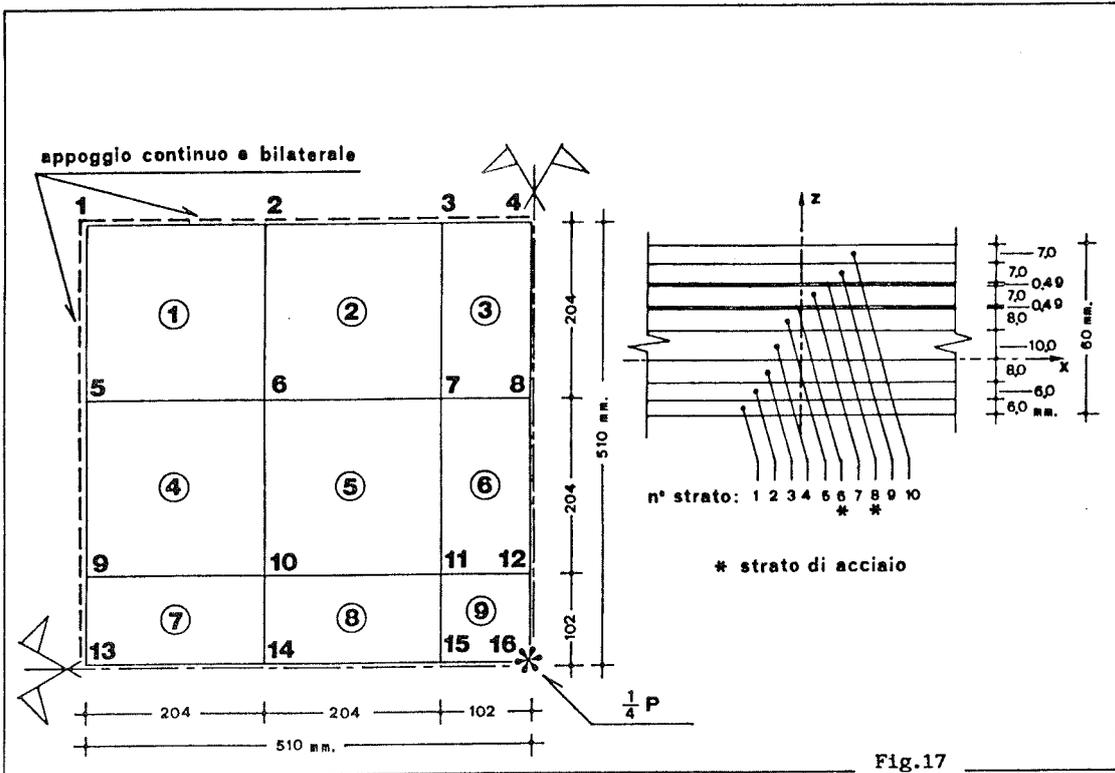


Fig.14

Come seconda applicazione è stata studiata una piastra quadrata con appoggio continuo su tutti i suoi lati: le caratteristiche elasto-geometriche, la stratificazione adottata, le maglie degli elementi finiti, sono consegnate nelle figg.16 e 17. In fig.18 è riportato il confronto tra la soluzione ottenuta con il procedimento illustrato, la soluzione elastica-lineare e quella derivante da uno schema di calcolo rigido-plastico (XIV).

Emerge dal confronto un comportamento lineare della piastra per valori limitati del carico ed un comportamento non lineare per valori superiori: il carico ultimo, calcolato con schemi del tipo rigido-plastico, differisce da quello ottenuto con il procedimento proposto di circa il 15%.





## BIBLIOGRAFIA

- (I) SUENSON,E. "Eisenbetonbéwehrung unter einem winkel mit der Richtung der Normalkraft", Beton und Eisen, H.10, 1922.
- (II) SCHOLZ,G. "Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken", Beton und Stahlbetonbau, H 10, 1958.
- (III) NAWY,E.G. "Crack width control in welded fabric reinforced centrally loaded two-way concrete slabs. Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete", S.P.20, A.C.I., 1960.
- (IV) BAUS,R.-TOLACCIA,S. "Calcul a la rupture des dalles en béton armée et étude expérimentale du critère de rupture en flexion pure", Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, n.189, 1963.
- (V) TAYLOR,R.-MAHER,D.R.H.-HAYES,B. "Effects of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs", Magazine of Concrete Research, vol.18, n.55, 1966.
- (VI) JÖRG,P. "Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung", Die Bau-technik, H.5, 1966.
- (VII) ROBINSON,J.R.-POMMERET,M. "Un cas de rupture généralisée de l'adhérence de l'armature dans une dalle carrée en béton armé uniformément chargée", Annales de l'Institut Technique du Batiment e des Travaux Publics, n.235-236, 1967.
- (VIII) NAWY,E.G.-BALIR,K.W. "Further studies on flexural crack control in structural slab systems", S.P.30, A.C.I., 1971.
- (IX) ZDENEK P.BAZANT "Inelastic and failure of concrete", Politecnico di Milano, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, 1981-82.
- (X) HAND,F.R.-PECKNOLD,D.A.-SCHNOBRICH,W.C. "Non linear layered analysis of R.C. plates and shells", Journal of Struc. Division, ASCE, vol.99, 1973.
- (XI) DARWIN,D.-PECKNOLD,D.A. "Non linear Biaxial Stress-Strain Lawfor Concrete", Journal Eng. Mech. Div. ASCE,EM2, p.229, 1977.
- (XII) SAENZ,L.P. Nella discussione della nota di Prakash Desay,S. Krishnan "Equation for the stress-strain curve of concrete", Journal ACI, 1964, p.1229.
- (XIII) KUPFER,H.-GERSTLE,K.H. "The Non-linear Behavior of Concrete under Biaxial Stress States, Nat.Struct.Eng.Meeting ASCE, Cleveland, 1972.
- (XIV) JOHANSEN,K.W. "Yield-line theory",Londra, Cement and Concrete Association 1962.

## MODELLO A COMPORTAMENTO NON LINEARE PER PIASTRE IN C.A. E C.A.P.

BEOLCHINI Giovanni C., GALEOTA Dante, GIAMMATTEO Matteo M.

Istituto di Scienza delle Costruzioni-Facoltà di Ingegneria- L'Aquila

### SOMMARIO

In questo lavoro viene descritto un metodo numerico per dedurre relazioni momento-curvatura in un elemento di piastra in c.a. e c.a.p. con armature ortotrope, sottoposto a carichi monotoni o ciclici; preliminarmente vengono illustrati i legami costitutivi dei materiali. Alcuni dei risultati numerici ottenuti sono confrontati con risultati sperimentali di altri Autori.

### SUMMARY

A numerical method to compute moment-curvature relationship for RC or PRC slab element orthotropically reinforced and subjected to monotonic or cyclic loading is presented. Material representations and numerical procedure are described. The numerical results have been compared with experimental results by other Authors. Additional examples are given.

### 1. INTRODUZIONE

L'analisi del comportamento fino a rottura di piastre in c.a. e c.a.p. è stata orientata, nel passato, essenzialmente allo studio dei criteri di rottura e delle sollecitazioni ultime; solo recentemente l'interesse dei ricercatori si è rivolto anche allo studio delle caratteristiche della deformazione, con lo scopo di individuare relazioni momento-curvatura in elementi di piastre soggetti a momenti flettenti in due direzioni oltre che a momento torcente; studi analitici e sperimentali forniscono alcune relazioni di questo tipo, essenzialmente per storie di carico monotone.

Le procedure numeriche utilizzate per ottenere previsioni attendibili sono in genere piuttosto complesse, se si utilizzano realistici modelli per schematizzare il comportamento dei diversi materiali; la complessità deriva anche dalla dipendenza delle caratteristiche di tensione e di deformazione, corrispondenti ad un certo stadio, dal ciclo di carico utilizzato. Usualmente descrizioni accurate si ottengono adottando per l'elemento tridimensionale di calcestruzzo schemi a elementi piani stratificati ((IX),(XIV),(XXI)) potendo in tal modo tener conto, semplicemente, delle variazioni delle tensioni e delle deformazioni nello spessore della piastra; in tali schemi vengono introdotte le barre di armatura, sia ordinaria che pretesa, considerandole concentrate al corrispondente livello.

In questo lavoro vengono presentati i primi risultati ottenuti utilizzando una procedura numerica messa a punto per individuare relazioni momento-curvatura in piastre in c.a. a c.a.p. sottoposte a storie di carico che possono essere anche cicliche. Il modello utilizzato è lo schema stratificato di cui in precedenza, sottoposto all'azione, in due direzioni ortogonali, di momenti fletten

ti con rapporto variabile; nelle indagini numeriche i cui risultati sono presentati nel seguito, tale rapporto è stato mantenuto costante per ogni storia di carico; è stato per ora trascurato l'effetto biassiale sulla rigidità e sulla resistenza del calcestruzzo; e neppure è stata per ora considerata l'influenza del tension stiffening e del bond-slip tra calcestruzzo e acciaio.

L'attendibilità del modello non lineare è verificata dal confronto con alcuni risultati sperimentali ottenuti in piastre di c.a. sottoposte a carichi monotoni; sono inoltre presentati relazioni momento-curvatura per piastre di c.a. e c.a.p. sottoposte a carichi ciclici.

## 2. LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI

### 2.1 Calcestruzzo in compressione

Il modello adottato è quello di Blakeley e Park (III) dedotto da quello di Kent e Park (XVIII). In letteratura esistono senz'altro modelli più complessi ed accurati (I); tuttavia l'adozione in questa analisi di una formulazione molto sofisticata non è necessaria in quanto è generalmente riconosciuto che il diagramma momento-curvatura di sezioni in c.a. debolmente armate, come nel caso delle piastre, è sostanzialmente dipendente dal comportamento dell'acciaio.

Nella Tav. 1 è riportato il diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  adottato in questa analisi e le corrispondenti relazioni analitiche.

Si osserva che il legame utilizzato è relativo a sollecitazioni monoassiali. L'estensione al caso biassiale, proprio delle piastre, potrebbe essere realizzato in modo agevole secondo la formulazione di Darwin e Pecknold(VII) basata sul concetto di 'deformazione monoassiale equivalente'; essa consiste nello schematizzare la risposta del calcestruzzo, sotto l'effetto di uno stato di tensione biassiale, mediante relazioni monoassiali  $\sigma$ - $\epsilon$  equivalenti, per ciascuno degli assi principali. Tale procedura consente di rappresentare in maniera abbastanza soddisfacente il comportamento di strutture bidimensionali in c.a. sotto storie di carico sia monotone che cicliche ((VI),(II)). Peraltro vari ricercatori concordano nel ritenere l'effetto biassiale poco influente nella determinazione della relazione momento-curvatura, nel caso di piastre sottoposte a carichi monotoni ((II),(XX)).

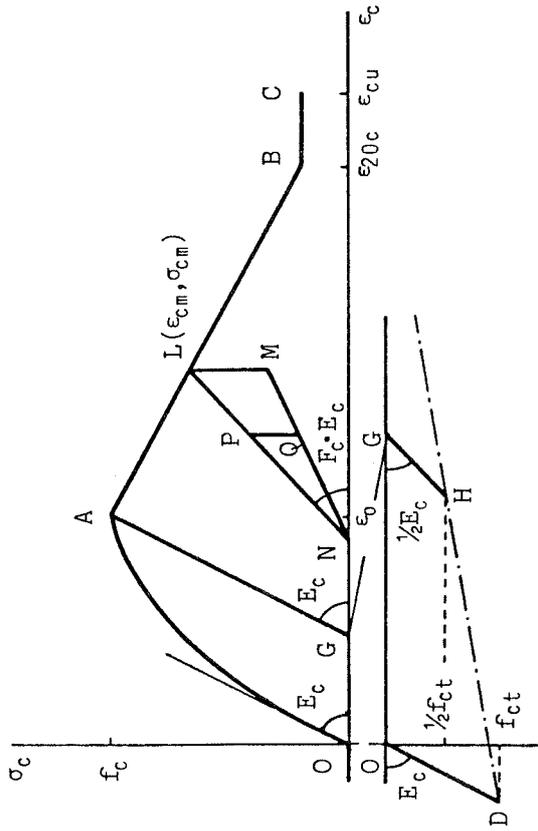
### 2.2 Calcestruzzo in trazione

Per il calcestruzzo in trazione si fa riferimento al modello di Morita e Kaku (XV) (v.Tav. 1).

Si assume che il calcestruzzo abbia a trazione comportamento di tipo elastico, con rottura fragile, con andamento degradante del modulo elastico e della resistenza limite, in funzione della storia di carico a compressione.

Maggior accuratezza nella rappresentazione del fenomeno della fessurazione ed un miglioramento della stabilità numerica della soluzione potrebbero essere ottenute tenendo conto del tension stiffening, ossia dell'irrigidimento offerto dal calcestruzzo integro compreso tra le lesioni ((XX),(XIV)). Il tension stiffening può essere simulato aggiungendo al modello del calcestruzzo in trazione un ramo gradualmente discendente (XIX); tale rappresentazione è abbastanza realistica, se si considera il comportamento sperimentale del calcestruzzo in trazione(X).In questa analisi, comunque, tale effetto è stato ignorato; infatti il fenomeno è validamente modellato solo per curve di primo carico, oltre al fatto che il tension stiffening si esaurisce rapidamente sotto l'azione dei carichi

TAV.1.1 - LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI  
Calcestruzzo



- Compressione

- O-A :  $\sigma_c = f_c [2\epsilon_c / \epsilon_0 - (\epsilon_c / \epsilon_0)^2]$
- A-B :  $\sigma_c = f_c [1 - 2(\epsilon_c - \epsilon_0)]$
- B-C :  $\sigma_c = 0, 2f_c$

- $\epsilon_c \leq \epsilon_0$  : linea retta con pend.  $E_c$
- $\epsilon_c > \epsilon_0$  : LM,  $M(\epsilon_{cm}; 0, 5\sigma_{cm})$   
MN, retta con pend.  $0, 5E_c \cdot E_c$

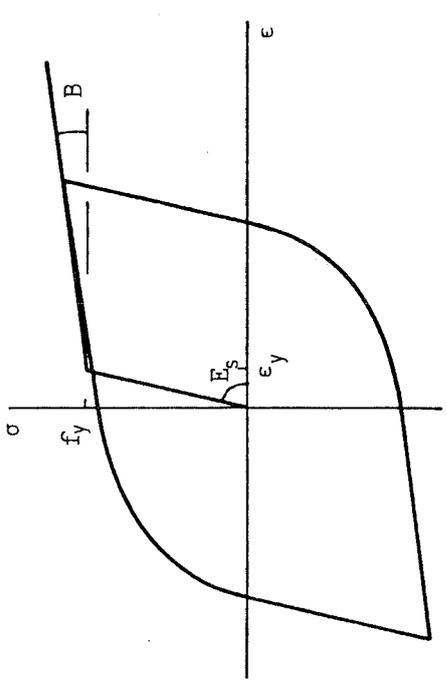
- $\epsilon_c \leq \epsilon_0$  : linea retta con pend.  $E_c$
- $\epsilon_c > \epsilon_0$  : NL, retta con pend.  $F_c \cdot E_c$

$$F_c = 0, 8 - [(\epsilon_{cm} - \epsilon_0) / (\epsilon_{20c} - \epsilon_0)] \geq 0, 1$$

- Trazione

- O-D : retta con pend.  $E_c$ ;  $\sigma_{ctmax} = f_{ct} = 0, 3f_c^{2/3}$
  - G-H : retta con pend.  $0, 5E_c$ ;  $\sigma_{ctmax} = 0, 5f_{ct}$
- per valori diversi interpolare linearmente

Acciaio



$$\bar{\sigma} = (1-B)\bar{\epsilon} / (1 + |\bar{\epsilon}|^R) / R + B\bar{\epsilon}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma / f_y ; \quad \bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_y$$

curva inviluppo :  $R = R_0$

scarichi e ricarichi :  $R = R_0 - A_1\xi / (A_2 + \xi)$

acciaio ordinario :  $R_0 = 20$  ;  $A_1, A_2$  parametri legati al tipo di acciaio

acciaio da precompresso :  $R = R_0 = 8$

ripetuti.

### 2.3 Acciaio ordinario

E' noto che il comportamento del cemento armato è fortemente dipendente dalle proprietà meccaniche dell'acciaio, e pertanto è molto importante formularne il modello in maniera accurata. In particolare bisogna tener conto dell'incrudimento e dell'effetto Bauschinger, nel caso di carichi ciclici.

I modelli più sofisticati (XI) sono basati sulla classica formulazione di Ramberg-Osgood.

In questo lavoro è stato utilizzato il modello proposto da Giuffrè e Pinto (VIII) che, rispetto alla formulazione precedente, consente di rappresentare in maniera più semplice, ma egualmente efficace, sia l'incrudimento che l'effetto Bauschinger (v. Tav. 1).

Non viene qui considerata l'instabilità delle armature compresse.

### 2.4 Acciaio da precompresso

Prove sperimentali cicliche (XII) condotte su campioni di acciaio da precompresso mostrano a deformazioni elevate l'esistenza di un comportamento isteretico in fase di ricarico; si nota inoltre una riduzione di pendenza dei rami di scarico all'aumentare delle deformazione massima. Il modello impiegato per l'acciaio ordinario può essere vantaggiosamente utilizzato anche per rappresentare il comportamento dell'acciaio da precompresso calibrando opportunamente i parametri che determinano il valore dell'espressione riportata in Tav. 1.

## 3. CRITERIO DI ROTTURA

Usualmente, nell'analisi del comportamento di strutture bidimensionali, viene adottato un criterio di rottura basato sugli involucri delle massime tensioni biassiali, del tipo di quello proposto da Kupfer e Gerstle ((XVII), (VI)).

In questa analisi comunque, senza pregiudicare l'attendibilità del modello, si considera raggiunta la rottura se il calcestruzzo attinge ad una deformazione ultima convenzionale  $\epsilon_{cu}$  (v. Tav. 1).

## 4. DESCRIZIONE DEL MODELLO

E' stato considerato un elemento di piastra, di altezza H e lati unitari, con armature ordinaria e pretesa, orientate secondo due assi x e y (v. Fig. 1), sotto posto all'azione di momenti flettenti e torcenti. Lo stato di sollecitazione è caratterizzato dai due momenti principali  $M_1$  e  $M_2 \leq M_1$  agenti in due piani ortogonali con giacitura individuata dall'angolo  $\phi$  e aventi la direzione dei due assi ortogonali u e v; l'angolo  $\theta = \phi + \psi$  individua i due generici assi n e t, normali a giaciture sulle quali si considerano agenti i due momenti flettenti  $M_n$  e  $M_t$  e il momento torcente  $M_{nt}$ ; lo scopo dell'indagine è quello di determinare relazioni  $M_n - k_n$  o  $M_t - k_t$  avendo indicato con  $k_n$  e  $k_t$  le curvatures nei piani n-z e t-z rispettivamente; volendo utilizzare il modello per dedurre legami significativi e rappresentativi è opportuno scegliere n in modo tale che sia diretto ortogonalmente ad una linea di rottura, da individuare preliminarmente sulla base delle condizioni di vincolo e dei rapporti di armatura oltre che del tipo di sollecitazione utilizzato, come indicato in letteratura.

Le ipotesi adottate in questo lavoro sono brevemente elencate qui di seguito:

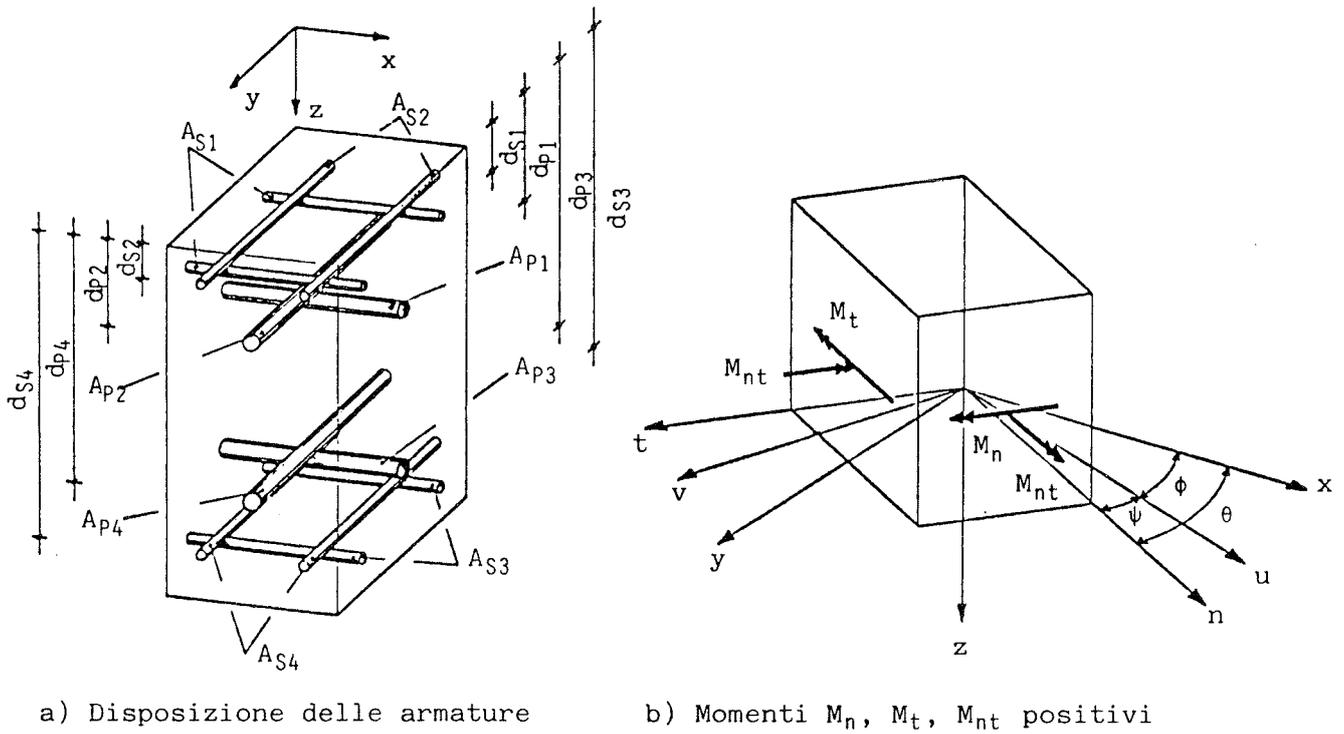


Fig. 1

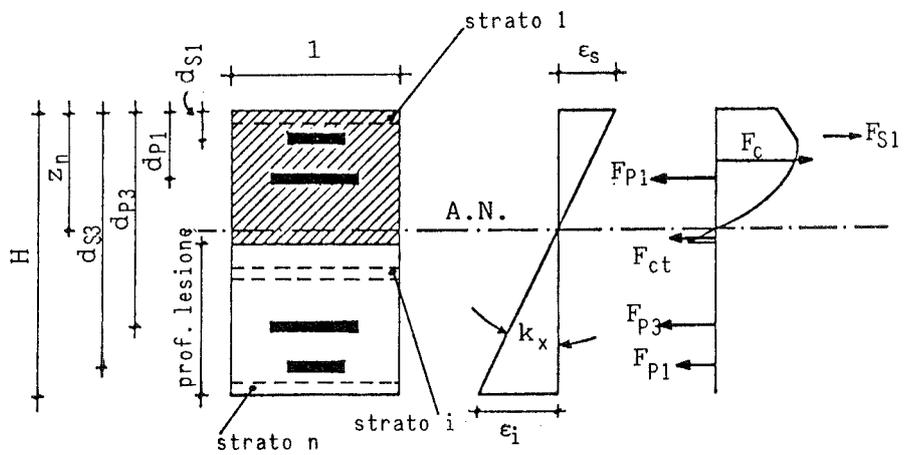


Fig. 2

- a) il rapporto tra i momenti principali in ogni stadio di carico è definito dal coefficiente  $\omega = M_2/M_1$  che è supposto essere costante;
- b) come conseguenza dell'ipotesi a) anche il rapporto tra i momenti flettenti  $M_n$  e  $M_t$  è costante ed è uguale a  $R = M_n/M_t$  con  $R$  definito nell'App. I ;
- c) l'andamento delle deformazioni e delle tensioni nelle direzioni  $n$  e  $t$  sono quelle indicate in Fig.2; di conseguenza la distribuzione delle deformazioni longitudinali in ogni direzione è completamente definita dalla corrispondente curvatura e dal valore della  $\epsilon$  ad un arbitrario livello di riferimento; tale livello è stato assunto essere quello dell'estradosso della piastra; nel seguito le deformazioni caratterizzate da un indice indicano i valori di riferimento nella direzione corrispondente all'indice stesso;
- d) le deformazioni e le tensioni associate al momento torcente  $M_{nt}$  sono quelle che si avrebbero nell'ipotesi di piastra elastica isotropa:

$$k_{nt} = 12 \frac{M_{nt}}{E_c H^3} \quad (1)$$

essendo  $E_c$  il modulo di elasticità, tangente all'origine, del calcestruzzo, con le corrispondenti distorsioni  $\gamma$  distribuite linearmente nello spessore :

$$\gamma = -2 k_{nt} z \quad (2)$$

essendo  $z$  la distanza dal piano medio; è stato inoltre ipotizzato che il rapporto tra  $\epsilon_n$  e  $\gamma_{nt}$  (valore di  $\gamma$  al livello di riferimento) sia uguale a quello che si ha in sezioni omogenee, così che risulta :

$$\gamma_{nt} = - \frac{2(1 - \omega) \sin \psi \cos \psi}{\cos^2 \psi + \omega \sin^2 \psi} \epsilon_n \quad (3)$$

Nell'App. I sono riportate le relazioni che esprimono i legami che intercorrono tra le corrispondenti grandezze nei sistemi di riferimento utilizzati.

## 5. EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

In ogni fase del ciclo di carico le tensioni normali al piano  $t-z$  devono essere equivalenti ad una coppia  $M_n$ , essendo nulla la somma delle forze in quella direzione :

$$F_{s,n} + F_{p,n} + (1/k_n) \int_{\epsilon_{in}}^{\epsilon_{en}} f_c(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (4)$$

$$M_{s,n} + M_{p,n} + (1/k_n^2) \int_{\epsilon_{in}}^{\epsilon_{en}} f_c(\epsilon) (\epsilon - \epsilon_n) d\epsilon = M_n \quad (5)$$

essendo  $F_{s,n}$  e  $F_{p,n}$  le risultanti, nella direzione  $n$ , rispettivamente delle forze nelle armature ordinarie e in quelle pretese, ed essendo  $M_{s,n}$  e  $M_{p,n}$  i loro momenti rispetto all'asse orizzontale di riferimento; il terzo termine nelle (4) e (5) sta ad indicare la risultante, e il suo momento rispetto all'asse di riferimento, delle tensioni nel calcestruzzo dirette parallelamente all'asse  $n$ .

Le tensioni normali al piano  $n-z$  devono rispettare due equazioni simili alle precedenti, che possono essere scritte cambiando gli indici  $n$  con  $t$  :

$$F_{s,t} + F_{p,t} + (1/k_t) \int_{\epsilon_{it}}^{\epsilon_{et}} f_c(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (6)$$

$$M_{s,t} + M_{p,t} + (1/k_t^2) \int_{\epsilon_{it}}^{\epsilon_{et}} f_c(\epsilon) (\epsilon - \epsilon_t) d\epsilon = M_t \quad (7)$$

Nella procedura numerica descritta nel successivo paragrafo sono stati utilizzati come assi di riferimento due assi orizzontali alla quota dell'estradosso della piastra; la storia di carico è stata assegnata fissando una certa sequenza di curvature  $k_n$ , così che l'analisi completa ha richiesto, per ogni stadio di carico, la determinazione di  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_t$  e  $k_t$ , oltre ai valori dei corrispondenti momenti  $M_n$  e  $M_t$ , con il vincolo costituito dal rispetto della costanza del rapporto tra i due.

## 6. PROCEDIMENTO NUMERICO

Il procedimento numerico utilizzato è molto elementare, risultando sproporzionati alla semplicità del modello o difficilmente adattabili al caso in esame i metodi più generali che in letteratura vengono proposti per l'analisi di sistemi non lineari.

Si supponga di aver calcolato le grandezze corrispondenti ad un certo stadio di carico, caratterizzato dai tre vettori seguenti :

$$\tilde{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix}; \quad \tilde{k} = \begin{Bmatrix} k_n \\ k_t \\ k_{nt} \end{Bmatrix}; \quad \tilde{M} = \begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \\ M_{nt} \end{Bmatrix}$$

dove  $\gamma_{nt}$ ,  $k_{nt}$  e  $M_{nt}$ , come conseguenza delle ipotesi adottate, sono stati calcolati utilizzando le (3), (1) e la 3. dell'App. I.

Il procedimento iterativo che porta a determinare i tre vettori  $\tilde{\epsilon}^s$ ,  $\tilde{k}^s$  e  $\tilde{M}^s$  corrispondenti allo stadio successivo è stato implementato utilizzando tre loops in ognuno dei quali si opera in una delle equazioni di equilibrio (4), (6) e (7), come illustrato nel seguito; ad ogni passo dell'iterazione, passo caratterizzato da certi valori degli elementi dei vettori  $\tilde{\epsilon}^i$ ,  $\tilde{k}^i$  e  $\tilde{M}^i$  vengono naturalmente calcolate le forze nelle armature, ordinarie e pretese, tramite le deformazioni e le curvature corrispondenti alle armature stesse, valutate utilizzando le relazioni riportate nella App. I.

a) Si assegna il nuovo valore della curvatura  $k_n^s$  e viene calcolato il valore  $\epsilon_n^0$  che soddisfa l'equazione di equilibrio (4); alla fine di questa prima iterazione risultano definiti i vettori

$$\tilde{\epsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_n^0 \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt}^0 \end{Bmatrix}; \quad \tilde{k}^0 = \begin{Bmatrix} k_n^s \\ k_t \\ k_{nt}^0 \end{Bmatrix}; \quad \tilde{M}^0 = \begin{Bmatrix} M_n^0 \\ M_t \\ M_{nt}^0 \end{Bmatrix}$$

dove  $M_n^0$  è valutato tramite la (5);  $M_t^0 = R_{tn} M_n^0$ , e  $\gamma_{nt}^0$ ,  $k_{nt}^0$  e  $M_{nt}^0$  sono calcolati mediante le (3), (1) e la 3. dell'App. I.

b) Considerando inalterati tutti gli altri parametri, viene calcolato, con successive iterazioni, il valore di  $\epsilon_t^1$  che soddisfa l'equazione di equilibrio (6); poichè in genere quest'ultimo valore differisce da  $\epsilon_t$  utilizzato nel passo precedente, si rientra nel primo loop per calcolare un nuovo valore di  $\epsilon_n$  e le corrispondenti grandezze derivate; alla fine di questo secondo ciclo risultano pertanto definiti i vettori :

$$\tilde{\epsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_n^1 \\ \epsilon_t^1 \\ \gamma_{nt}^1 \end{Bmatrix} ; \quad \tilde{k}^1 = \begin{Bmatrix} k_n^s \\ k_t \\ k_{nt}^1 \end{Bmatrix} ; \quad \tilde{M} = \begin{Bmatrix} M_n^1 \\ M_t^1 \\ M_{nt}^1 \end{Bmatrix}$$

risultando quindi soddisfatte le equazioni di equilibrio (4) e (6) con  $M_n^1$  valutato tramite la (5) e  $M_t^1 = R_{tn} M_n^1$ .

- c) Si calcola con successive iterazioni il valore  $k_t^2$  che soddisfa l'equazione (7), tenendo fissi tutti gli altri parametri risultato dell'iterazione precedente; se  $k_t^2 \neq k_t$  si ritorna nel primo ciclo per calcolare il nuovo valore di  $\epsilon_n$  che, sulla base degli aggiornamenti ottenuti per gli altri parametri, soddisfa la (4). L'iterazione si considera conclusa quando l'ultimo valore di  $k_t$  calcolato nel ciclo c) differisce da quello utilizzato nei cicli precedenti di una quantità prefissata.

I criteri adottati per giudicare l'accettabilità dei risultati delle iterazioni ai diversi passi sono i seguenti:

- le equazioni di equilibrio si considerano soddisfatte quando la risultante complessiva delle azioni sulla sezione è minore di una assegnata percentuale della risultante delle forze, o dei corrispondenti momenti, nelle armature ordinarie; in questa indagine tali percentuali sono state fissate pari allo 0.1% nel caso di forze e pari all'1% nel caso di momenti; tali equazioni si considerano comunque soddisfatte se il valore assoluto della risultante delle forze o dei corrispondenti momenti è minore di un prefissato valore; in questo lavoro, tale valore è stato fissato pari a 100 N per le forze e 1 Nm per i momenti.
- ogni ciclo si considera concluso quando lo scarto percentuale tra l'ultimo valore trovato ed il corrispondente utilizzato nei cicli precedenti è inferiore ad un prefissato valore, fissato in questa indagine pari allo 0.1 % per le deformazioni e pari allo 0.5 % per le curvature.

## 7. CONFRONTI ED ESEMPI NUMERICI

La validità del modello è stata testata utilizzando alcuni risultati di prove sperimentali su piastre in cemento armato, sottoposte a varie combinazioni di momenti flettenti e torcenti (V), (XIII).

Le caratteristiche geometriche dei campioni, e quelle meccaniche dei materiali sono riportate nella Tab.1, assieme alle condizioni di sollecitazione applicate, di tipo monotono.

La Fig.3 mostra gli andamenti delle relazioni momento-curvatura, riferiti al momento principale massimo, dedotti dal modello, in confronto con quelli sperimentali.

Si osserva quanto segue:

- c'è buon accordo tra i momenti di fessurazione e snervamento calcolati, e quelli di prova;
- la discordanza nella fase immediatamente successiva alla fessurazione, più evidente in presenza di armature deboli, è da attribuire al fatto che nel modello non si tiene conto del fenomeno del "tension stiffening";
- complessivamente i grafici dimostrano il buon accordo tra valutazioni teoriche e dati sperimentali, e quindi la validità del modello, relativamente a piastre in c.a. sottoposte a storie di carico monotono.

Tab.1 - Caratteristiche geometriche e meccaniche.

		C2	B16	B35	B39	CAP
Spessore [cm]	H	10.5	10.3	10.5	10.3	20.0
Acciaio ordinario [cm <sup>2</sup> /cm]	A <sub>S1</sub>	-	0.084	0.084	0.084	0.080
	A <sub>S2</sub>	-	0.091	0.091	0.023	0.080
	A <sub>S3</sub>	0.084	0.084	0.084	0.084	0.080
	A <sub>S4</sub>	0.091	0.091	0.091	0.023	0.080
Dist.armature estradosso [cm]	d <sub>S1</sub>	-	1.27	1.27	1.27	1.20
	d <sub>S2</sub>	-	1.91	1.91	1.91	2.00
	d <sub>S3</sub>	9.23	8.59	8.59	8.59	18.00
	d <sub>S4</sub>	8.59	9.23	9.23	9.23	18.80
Area acciaio preteso [cm <sup>2</sup> /cm]	A <sub>p1</sub>	-	-	-	-	0.025
	A <sub>p2</sub>	-	-	-	-	0.025
	A <sub>p3</sub>	-	-	-	-	0.025
	A <sub>p4</sub>	-	-	-	-	0.025
Dist.armature estradosso [cm]	d <sub>p1</sub>	-	-	-	-	3.40
	d <sub>p2</sub>	-	-	-	-	5.40
	d <sub>p3</sub>	-	-	-	-	14.60
	d <sub>p4</sub>	-	-	-	-	16.60
Tens.snerv.acciaio ord. [MPa]	f <sub>yk</sub>	343	333	373	353	373
Tens.rott. acciaio ord. [MPa]	f <sub>tk</sub>	440	440	440	440	440
Tens.snerv.acciaio pret. [MPa]	f <sub>p(0.2)</sub>	-	-	-	-	1620
Tens.rott. acciaio pret. [MPa]	f <sub>ptk</sub>	-	-	-	-	1815
Res. compr. calcestruzzo [MPa]	f <sub>ck</sub>	32	32	32	37	39
Rapporto Momenti agenti (princip.)	ω	1	-1	-0.45	-0.45	1
Orientamento armatura	θ	0°	45°	-34°	56°	0°

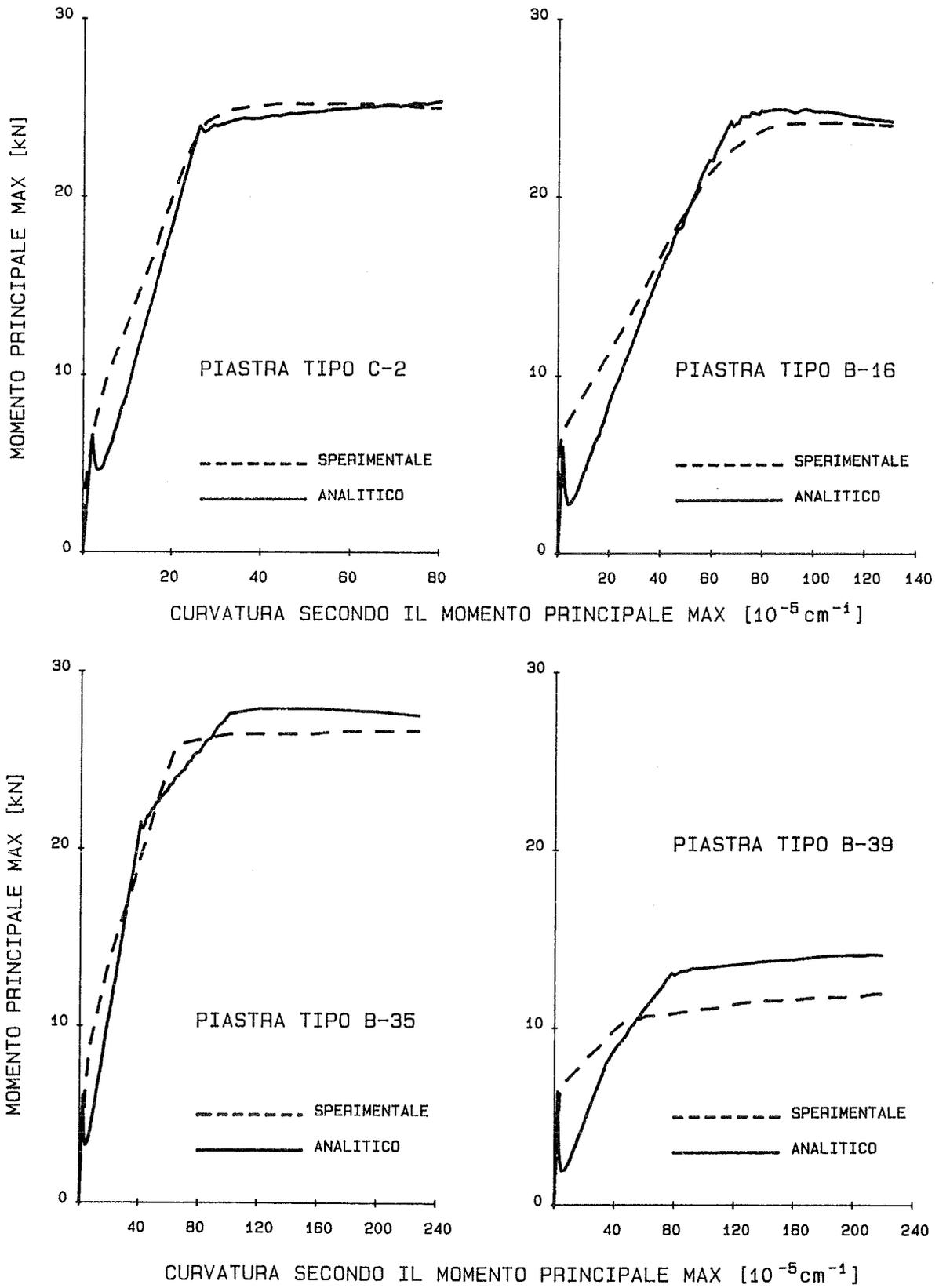


Fig. 3

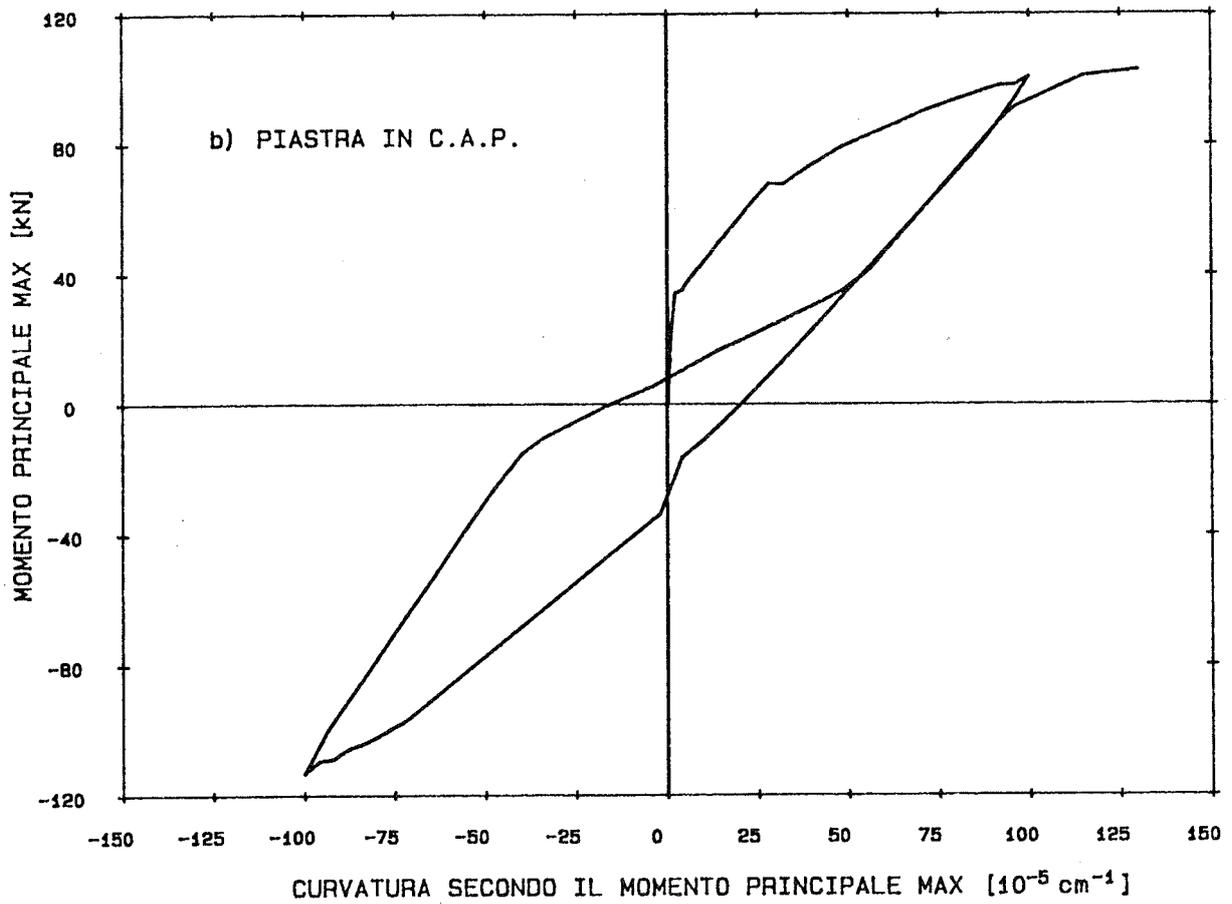
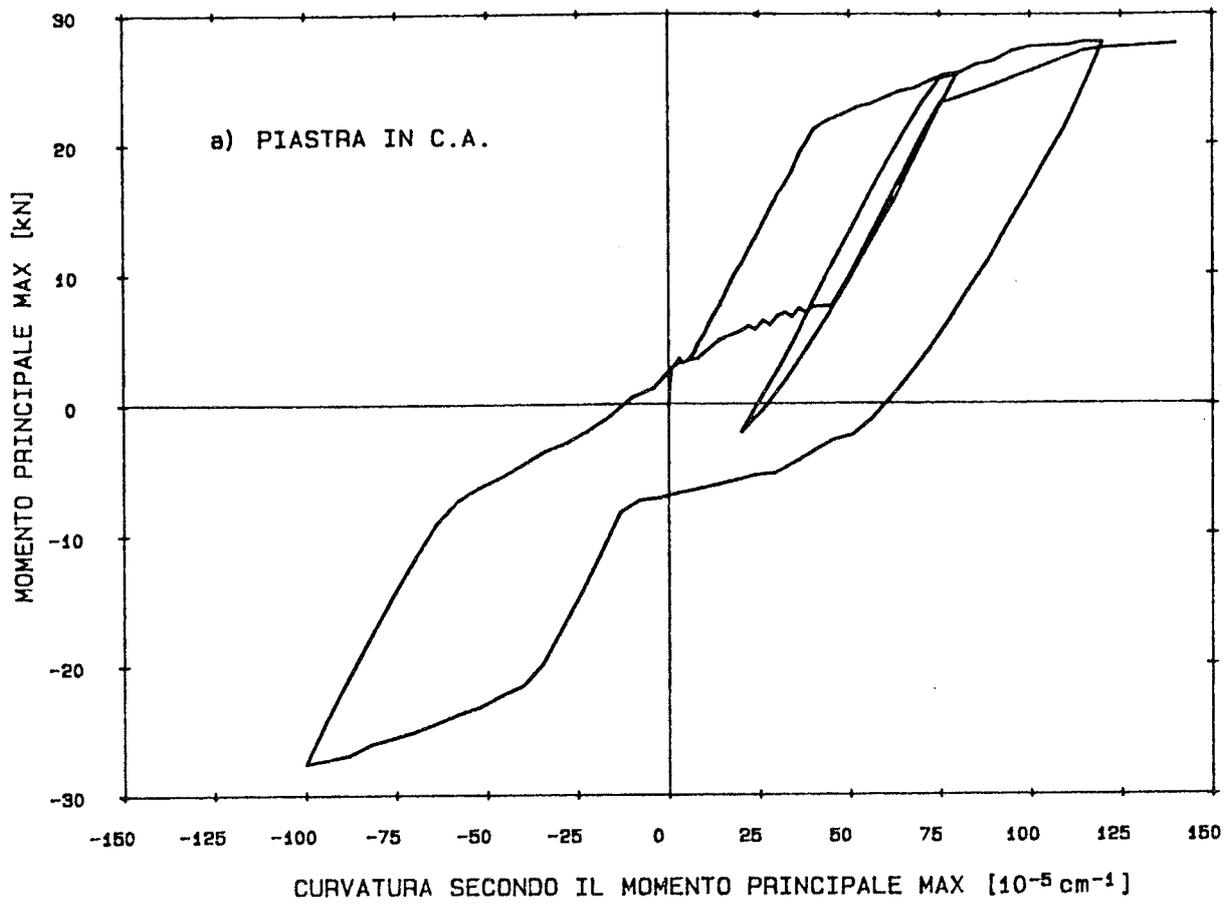


Fig. 4

Non avendo a disposizione dati sperimentali relativi a piastre in c.a. e c.a.p. sotto carichi ciclici, è stato possibile produrre in questi casi solo risultati teorici (v. Fig.4).

I dati relativi agli esempi utilizzati sono riportati in Tab.1: nella colonna intitolata "B35" quelli della piastra in c.a., nella colonna intitolata "CAP" quelli della piastra in c.a.p..

Il diagramma di Fig.4-a mostra quanto segue:

- durante lo scarico successivo alla più ampia escursione in campo plastico, le lesioni rimangono aperte a causa delle deformazioni plastiche residue dell'acciaio;
- completato lo scarico e ricaricando in senso inverso, il momento resistente è offerto dalle sole armature, e si può notare una sensibile diminuzione della rigidità flessionale;
- non appena le lesioni si chiudono, si ha un repentino incremento della rigidità; questo fenomeno è puramente teorico, in quanto in realtà il passaggio è più graduale, poiché prima ancora che le lesioni siano completamente richiuse, può avvenire un trasferimento di sforzi di compressione tra le superfici fessurate. Per tener conto di questo effetto ("local contact" (IV), (XV)), occorre valutare l'ampiezza delle lesioni (XVI), ciò che in questa analisi non è stato fatto, considerata la carenza di modelli sufficientemente generali riguardo alla fessurazione delle piastre in c.a..

Il diagramma di Fig.4-b mostra che l'andamento del legame momento-curvatura è quello caratteristico delle strutture precomprese in quanto:

- si ha un elevato momento di fessurazione, raggiunto con una forte rigidità flessionale;
- a fessurazione avvenuta, si ha un sensibile calo della rigidità flessionale;
- il ciclo di scarico denota un considerevole recupero elastico; ciò è giustificabile considerando che una diminuzione di deformazioni assiali provoca in un'armatura pretesa un calo di tensione percentualmente inferiore a quello che si ha in un'armatura ordinaria.

Quanto sopra spiega anche la minore discontinuità nei rami di ricarico, dipendente anche dal fatto che in una struttura precompressa le lesioni si richiudono con maggior facilità.

## 8. CONCLUSIONI

I pochi ma significativi confronti effettuati ed illustrati in precedenza, mostrano la buona capacità del modello utilizzato ad analizzare il comportamento non lineare delle piastre in c.a.; i risultati numerici ottenuti per piastre in c.a.p., anche se non confortati da adeguati confronti con risultati sperimentali, indicano che le previsioni teoriche sono da ritenere attendibili, potendo riconoscere nei corrispondenti diagrammi momento-curvatura comportamenti tipici di tali strutture.

Si ritiene comunque opportuno approfondire l'indagine col duplice scopo di:

- a) studiare la sensibilità del modello ad effetti, qui trascurati, quali quello biassiale sulla rigidità e resistenza del calcestruzzo, quello irrigidente del calcestruzzo teso compreso tra le lesioni, quello della perdita di aderenza tra acciaio e calcestruzzo, in particolare sotto carichi ciclici;

b) condurre una indagine parametrica per ottenere famiglie di diagrammi che mostrino la dipendenza del comportamento dalla percentuale geometrica di armatura, dal rapporto di precompressione, dal rapporto tra i momenti flettenti applicati, dall'orientamento dell'armatura rispetto alle sollecitazioni, ecc.

A P P E N D I C E I

I.1 Equazioni di equilibrio tra i momenti nelle direzioni n-t e i momenti principali

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \\ M_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi \\ \sin \psi \cos \psi & -\sin \psi \cos \psi \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

I.2 Rapporto tra i momenti nelle direzioni n e t

$$\frac{M_t}{M_n} = R_{tn} = \frac{\sin^2 \psi + \omega \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi + \omega \sin^2 \psi}$$

I.3 Momento torcente

$$M_{nt} = \frac{\sin \psi \cos \psi (1 - \omega)}{\cos^2 \psi + \omega \sin^2 \psi} \cdot M_n$$

I.4 Relazioni tra deformazioni e curvatures nelle direzioni x-y e n-t

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_n \\ k_t \\ k_{nt} \end{Bmatrix}$$

## BIBLIOGRAFIA

- I) AOYAMA, H., NOGUCHI, H.: "Mechanical Properties of Concrete under Load Cycles Idealizing Seismic Actions", AICAP-CEB Symposium, Bulletin d'Information n.131, Avril 1979, pp.31-63.
- II) BASHUR, F.K., DARWIN, D.: "Non Linear Model for Reinforced Concrete Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.104, No.ST1, January 1978, pp.157-170.
- III) BLAKELEY, R.W.G., PARK, R.: "Prestressed Concrete Sections with Cyclic Flexure", Journal of the Structural Division, ASCE, No.ST8, Vol.99, August 1973, pp.1717-1742.
- IV) BOLONG, Z., MINGSHUN, W., KUNLIAN, Z.: "A Study of Hysteretic Curve of Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading", Proceedings of the Seventh World Conference on Earthquake Engineering, September 8-13, 1980, Istanbul, Turkey, pp.509-516.
- V) CARDENAS, A.E.: "Strength Behaviour of Isotropically and Nonisotropically Reinforced Slabs Subjected to Combinations of Flexural and Torsional Moments", Thesis presented to the University of Illinois, at Urbana, Ill., in 1968.
- VI) DARWIN, D., PECKNOLD, D.A.: "Analysis of RC Shear Panels under Cyclic Loading", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.102, No.ST2, February 1976, pp.355-369.
- VII) DARWIN, D., PECKNOLD, D.A.: "Non Linear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE Vol.103, No.EM2, April 1977, pp.229-241.
- VIII) GIUFFRE', A., PINTO, P.E.: "Il comportamento del c.a. per sollecitazioni cicliche di forte intensità", Giornale del Genio Civile, n.5 1970, pp.391-408.
- IX) HAND, F.R., PECKNOLD, D.A., SCHNOBRICH, W.C.: "Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.99, No.ST7, July 1973, pp.1491-1505.
- X) HUGHES, B.P., CHAPMAN, G.P.: "The Deformation of Concrete and Microconcrete in Compression and Tension with Particular Reference to Aggregate Size", Magazine of Concrete Research, London Vol.18, No.54, March 1966, pp.19-24.
- XI) KATO, B.: "Mechanical Properties of Steel under Load Cycles Idealizing Seismic Actions", AICAP-CEB Symposium, Bulletin d'Information n.131, Avril 1979, pp.7-27.
- XII) KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H.: "Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE Vol.99, EM4, August 1973, pp.853-866.
- XIII) LENSCHOW, R.J., SOZEN, M.A.: "A Yield Criterion for Reinforced Concrete under Biaxial Moments and Forces", Civil Engineering Studies Structural Research Series No.311, University of Illinois, Urbana, Ill., July 1966, p.527.
- XIV) LIN, C.S., SCORDELIS, A.C.: "Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.101, No.ST3, March 1975, pp.523-538.

- XV) MORITA,S.,KAKU,T.,SUDO,E.: "Force-Strain Relationship of Reinforcing Bars Embedded in Concrete under Reversed Loadings", AICAP-CEB Symposium, Bulletin d'Information n.131, Avril 1979, pp.7-14.
- XVI) NAWY,E.G.,ORENSTHEIN,G.S.: "Crack Width Control in Reinforced Concrete Two-Way Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.93, No.ST3, March 1970, pp.701-821.
- XVII) NILSON,A.H.,et al.: "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", ASCE, 1982, Chapter 2, pp.52-64.
- XVIII) PARK,R.,KENT,D.C.,SAMPSON,R.A.:"Reinforced Concrete Members with Cyclic Loading", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.98, No.ST7, July 1972, pp.1341-1360.
- XIX) SCANLON,A.,MURRAY,D.W.:"An Analysis to Determine the Effects of Cracking in Reinforced Concrete Slabs", Proceedings of the Specialty Conference on Finite Element Method in Civil Engineering", Montreal, Canada, June 1-2-1972, pp.841-868.
- XX) VEBO,A.,GHALI,A.: "Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.103, No.ST3, March 1977, pp.515-531.
- XXI) WANCHOO,M.K.,MAY,G.W.:"Cracking Analysis of Reinforced Concrete Plates", Journal of the Structural Division, ASCE Vol.101, No.ST1, January 1975, pp.201-215.

# APPLICAZIONE DELLA TEORIA DELLE TRAVI ALLO STUDIO DI ELEMENTI BIDIMENSIONALI DI TRAVI IN C.A. IN REGIME FESSURATIVO

Lionello BORTOLOTTI

Assistente Ordinario, Professore Incaricato Stabilizzato  
Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria  
CAGLIARI

## SOMMARIO

Impiegando la teoria delle travi, viene data un'interpretazione analitica dello stato di sforzo conseguente alla fessurazione, per un elemento bidimensionale compreso fra due fessure contigue di una trave in c.a. inflessa. Un criterio di rottura puntuale consente di formulare, senza introdurre parametri empirici, la distanza e l'ampiezza delle fessure. Viene infine dedotta la relazione momenti-curvature medie, nella fase successiva alla fessurazione stabilizzata.

## SUMMARY

A block between two contiguous cracks of a flexurally cracked concrete beam is regarded as a two dimensional element in a bi-axial state of stress at cracking. Equations are provided which enable to calculate the components of the stress tensor in the cracked element, the spacing and width of the cracks and the moment-curvature relation.

## 1. INTRODUZIONE

Il possesso di metodi di progetto per le strutture in c.a., che siano correttamente fondati ed in grado di fornire formulazioni di rapido e facile impiego, costituisce, notoriamente, un obiettivo di importanza pratica rilevante.

Questo spiega come, in tale intento e per ogni specifico argomento, vi sia sempre un vasto e molteplice apporto da parte degli studiosi che consenta di conseguire utili indicazioni al riguardo. Uno di tali argomenti riguarda il comportamento in regime fessurativo degli elementi strutturali in c.a. variamente sollecitati e la valutazione

dei parametri geometrici caratteristici della fessurazione nonché di quelli deformativi e di spostamento.

Anche in tal caso, tuttavia, non sempre al rigore delle trattazioni corrisponde un'uguale semplicità per le applicazioni dei risultati teorici ottenuti; ovvero la carenza di dati nelle formulazioni teoriche, costringono a sopperirvi ricorrendo a parametri empirici sussidiari (I), (II), (III) che non sempre possono considerarsi sicuri e definitivi.

Il presente studio muove nell'intento di superare tali inconvenienti nell'esame del problema esposto, limitatamente al caso di un elemento in cemento armato semplicemente inflesso, analizzandone il comportamento bidimensionale in uno stato piano di sforzo instaurantesi in seguito al processo ridistributivo svolgentesi in seno ad esso all'atto della fessurazione.

## 2. TRAVE SEMPLICEMENTE INFLESSA

### 2.1. Ipotesi

Si consideri un elemento di trave in c.a. semplicemente inflessa a sezione alta e stretta in modo che si possa considerare in uno stato piano di sforzo (fig. 1). L'armatura sia distribuita in maniera continua lungo lo spessore (in pratica si considererà sufficientemente diffusa).

In una prima fase, antecedente la fessurazione, il comportamento della struttura è elastico, le sezioni si mantengono piane. Raggiunto il limite di trazione nel conglomerato si produce la prima fessura. Lo stato di sforzo si ridistribuisce all'interno del tronco in maniera non omogenea nelle diverse sezioni ed in particolare per quanto riguarda gli sforzi di trazione nel conglomerato; ciò comporta un incremento dello sforzo nell'acciaio in prossimità della lesione (con conseguente cimento dell'aderenza) ed una progressiva riduzione di esso nei punti più interni.

Al formarsi di una seconda fessura alla minima distanza compatibile dalla prima, nessun'altra lesione potrà formarsi fra le due (fessurazione stabilizzata) (IV). Sia  $L = 2l$ , la distanza fra tali due fessure.

Ipotizziamo, quindi, una ridistribuzione dello stato di sforzo in maniera biassiale nell'elemento bidimensionale di lunghezza  $L$ , con forma delle funzioni delle componenti di sforzo desumibili, utilizzando i risultati della teoria delle travi, da una schematizzazione a trave, con asse disteso secondo  $y$ , dei due semitronchi di lunghezza  $l$  dell'elemento suddetto, caricate dalle distribuzioni di sforzo agenti nelle facce estreme (fig.2) (V). Si suppone il comportamento elastico delle due sezioni estreme, l'una parzializzata e l'altra interamente reagente; si suppone inoltre il mantenimento piano di tali sezioni.

### 2.2. Componenti di sforzo

Considerazioni di equilibrio applicate ai diversi elementi di acciaio e conglomerato di uno dei semitronchi di trave in esame (fig.3)

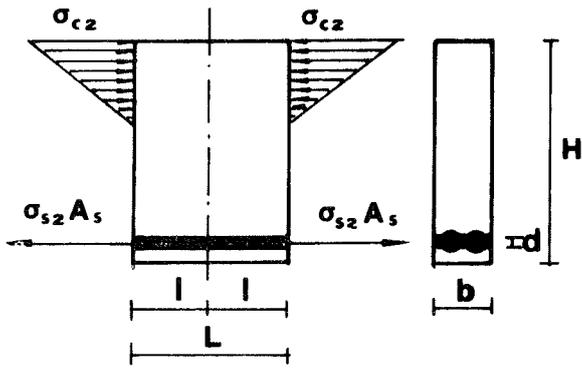


FIG. 1

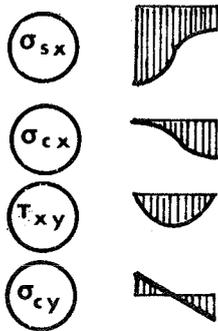
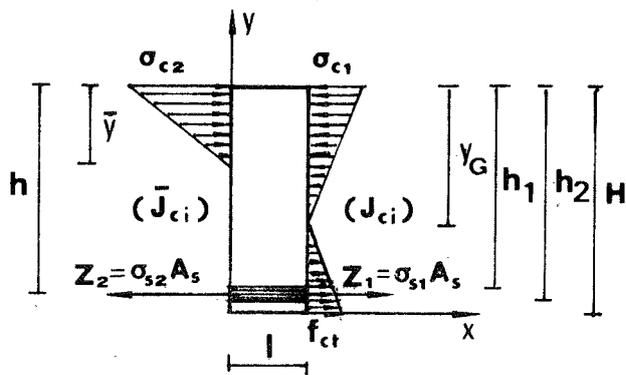


FIG. 2

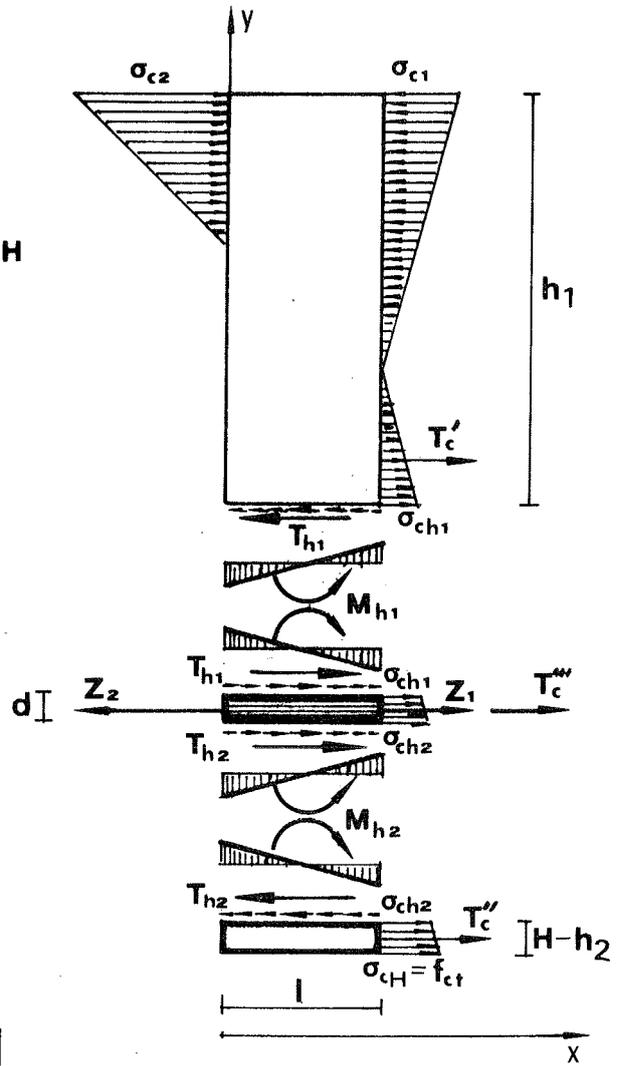


FIG. 3

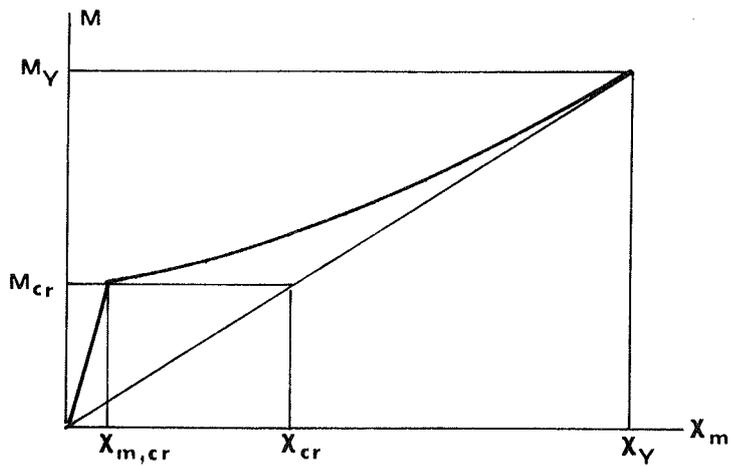


FIG. 4 -- Diagramma momenti-curvature medie.

permettono di ottenere le leggi di variazione degli sforzi nei materiali.

Il tronco di acciaio di lunghezza  $l$  risulta soggetto alle seguenti forze (fig. 3):

$$T_{h1} = Z_2 - Z_1 - T_{h2} ; \quad T_{h2} = \frac{\sigma_{ch} + \sigma_{ch2}}{2} b (H-h_2) \quad (1)$$

$$Z_1 = \sigma_{s1} A_s ; \quad Z_2 = \sigma_{s2} A_s$$

Se l'armatura non si considera continua nello spessore  $b$  avremo:

$$T_{h1} = Z_2 - Z_1 - T_c'' - T_{h2} \quad (2)$$

con  $T_c''$  risultante degli sforzi di trazione nell'interferro. Lo sforzo generico nell'acciaio all'ascissa  $x$  si ottiene considerando l'equilibrio alla traslazione del tronco di lunghezza  $x$ :

$$\sigma_{sx} A_s = \sigma_{s2} A_s - b \int_0^x \tau_{h1} dx - b \int_0^x \tau_{h2} dx \quad (3)$$

con

$$\tau_{h1} = \frac{6T_{h1}}{bl} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) ; \quad \tau_{h2} = \frac{6T_{h2}}{bl} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (4)$$

tensioni tangenziali correnti, desumibili secondo quanto detto in precedenza. Si deduce quindi:

$$\sigma_{sx} = \sigma_{s2} - \frac{T_{h1} + T_{h2}}{A_s} \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \quad (5)$$

ovvero, essendo  $T_{h1} + T_{h2} = (\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) A_s$

$$\sigma_{sx} = \sigma_{s2} - (\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \quad (6)$$

Il secondo termine del secondo membro della (5) o della (6) rappresenta il contributo del conglomerato alla riduzione della tensione nell'acciaio.

Se denominiamo area ed altezza efficace le espressioni

$$A_{c\text{eff}} = \frac{T_{h1} + T_{h2}}{f_{ct}} = (\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \frac{A_s}{f_{ct}} \quad (7)$$

$$H_{\text{eff}} = \frac{T_{h1} + T_{h2}}{b f_{ct}} = \frac{(\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) A_s}{b f_{ct}}$$

$$\text{e con } \rho_{\text{eff}} = \frac{A_{c\text{eff}}}{A_s} = \frac{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}}{f_{ct}} \quad (8)$$

la (5) o la (6) diventano:

$$\sigma_{sx} = \sigma_{s2} - \frac{f_{ct}}{\rho_{s,\text{eff}}} \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \quad (9)$$

La tensione media nell'acciaio si ottiene integrando la (9) e vale:

$$\sigma_{sm} = \sigma_{s2} \left( 1 - \frac{0.5 f_{ct}}{\rho_{s,\text{eff}} \sigma_{s2}} \right) \quad (10)$$

ovvero

$$\sigma_{sm} = \frac{\sigma_{s2} + \sigma_{s1}}{2} \quad (11)$$

Nel caso di armatura distribuita in maniera non continua nella sezione, occorrerà introdurre la quantità

$$T_{h1} + T_{h2} = Z_2 - Z_1 - T'_c \quad (12)$$

Con considerazioni analoghe alle precedenti, è facile dedurre anche la legge di variazione dello sforzo nel conglomerato. Lungo  $x$ , avremo:

$$(\sigma_{cx})_y = (\sigma_{c2})_y - [(\sigma_{c2})_y - (\sigma_{c1})_y] \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \quad (13)$$

dove l'indice  $y$  indica la quota generica in cui si valutano gli sforzi.

Lo sforzo medio, ottenibile mediante integrazione, sarà

$$(\sigma_{cm})_y = \frac{(\sigma_{c2})_y + (\sigma_{c1})_y}{2} \quad (14)$$

Per quanto riguarda lo sforzo normale in direzione  $y$ , se indichiamo in generale con  $M_y$  il momento lungo  $y$  nella schematizzazione a trave descritta in precedenza, esso sarà espresso da:

$$\sigma_{cy} = \frac{6M}{bl^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \quad (15)$$

### 2.3. Distanza fra le fessure

Se come ulteriore ipotesi si considera che all'atto della formazione della seconda lesione si raggiunga uno stato limite di sforzo nel punto più sollecitato del conglomerato avvolgente l'armatura e, per esemplificare, si impiega il criterio di Beltrami che limita il lavoro elastico specifico, avremo per lo sforzo ideale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{cx}^2 + \sigma_{cy}^2 + 2\tau_{xy}^2 - \frac{2}{m} (\sigma_{cx} \sigma_{xy} - \tau_{xy}^2)} \quad (16)$$

Impiegando il valore  $m = 5$  ed applicando la (16) nel punto più sollecitato all'ascissa  $x = \frac{l}{2}$  ed alla quota  $y = h_1$ , si ottiene l'espressione seguente per la distanza fra le fessure:

$$L = \frac{6 \sqrt{2,4} T_{h1}}{b \sqrt{4f_{ct}^2 - \sigma_{ch1}^2}} \quad (17)$$

La stessa può essere posta in via approssimata nella forma:

$$L = \frac{5 T_{h1}}{b f_{ct}} \quad (18)$$

I termini  $T_{h1}$  e  $\sigma_{ch1}$  dipendono da  $f_{ct}$ , quindi le (17) e (18) possono essere poste in forma indipendente dalla resistenza a trazione. Impiegando la (2), la (17), con le debite trasformazioni, assume la seguente forma, in funzione delle caratteristiche geometriche delle sezioni e dei diversi moduli elastici dei materiali:

$$L = \frac{6 \sqrt{2,4}}{b \sqrt{4(H-y_G)^2 - (h_1-y_G)^2}} \left\{ \frac{n}{n'} A_s \left[ \frac{J_{ci}}{J_{ci}} (h-\bar{y}) - (h-y_G) \right] - \frac{bc}{2} (H + h_2 - 2y_G) - (h-y_G) (bd - A_s) \right\} \quad (19)$$

$$\text{dove } n = \frac{E_s}{E_c}, \quad n' = \frac{E_{ct}}{E_c}, \quad c = H - h_2.$$

I tre termini tra parentesi rappresentano rispettivamente le influenze dell'armatura, del copriferro e dell'interferro.

#### 2.4. Deformazioni, apertura delle fessure, curvature e frecce

La deformazione media dell'acciaio varrà, con la (11):

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{s2} + \sigma_{s1}}{2 E_s} \quad (20)$$

ovvero tenendo conto della (12)

$$\sigma_{sm} = \frac{\sigma_{s2} + \sigma_{s1}}{2 E_s} + \frac{T''_c}{2A_s E_s} \quad (21)$$

Per quanto concerne la determinazione dell'ampiezza dell'apertura delle lesioni, nell'ipotesi che non avvengano scorrimenti fra acciaio e conglomerato, la deformazione nell'acciaio passerà dal valore  $\epsilon_{s1}$  precedente alla fessurazione al valore  $\epsilon_{sm}$  a fessurazione stabilizzata.

Il conglomerato in corrispondenza dell'acciaio subisce, nel complesso, una riduzione dello stato di sforzo di trazione, ciò che comporta una riduzione della deformazione media rispetto allo stato precedente la fessurazione.

Approssimativamente, quindi, l'ampiezza massima dell'apertura delle lesioni sarà:

$$w_{cr} = (\epsilon_{sm} - \epsilon_{s1} + 0,5 \epsilon_{s1}) L = (\epsilon_{sm} - 0,5 \epsilon_{s1}) L \quad (22)$$

La deformazione del conglomerato in corrispondenza della fibra estrema compressa e la curvatura media del tronco di trave compreso fra le due fessure varranno:

$$\epsilon_{cm} = \frac{\sigma_{cm}}{E_c} = \frac{\sigma_{c2} + \sigma_{c1}}{2 E_c} \quad (23)$$

$$\chi_{m,CR} = \frac{|\epsilon_{cm}| + |\epsilon_{sm}|}{h} \quad (24)$$

con i valori  $\epsilon_{cm}$  e  $\epsilon_{sm}$  calcolati per il valore del momento di fessurazione  $M_{CR}$ .

All'aumentare del carico oltre quello che ha provocato la fessurazione stabilizzata, la tensione media nell'acciaio aumenta come pure la curvatura media; l'aderenza viene cimentata con possibilità di scorrimento dell'acciaio per il superamento del limite di aderenza e con susseguente intervento dell'attrito per consentire l'equilibrio allo scorrimento.

Si può ulteriormente ipotizzare, superando la certamente complessa

evoluzione dello stato di sforzo e di deformazione all'interno del tronco in esame al crescere del carico esterno, che avvenga una progressiva distruzione del vincolo di aderenza con tendenza limite di acciaio nudo o di sezioni parzializzate.

Ciò si può tradurre, in termini analitici, in una legge di variazione momenti-curvature medie che, partendo dal valore della curvatura media al cracking  $\chi_{m,CR}$  conduca ad un valore finale  $\chi_Y$  corrispondente a sezioni parzializzate e tensione al limite di snervamento nell'acciaio.

La relazione analitica tra momenti e curvature sia assunta del tipo:

$$\chi_m = A + BM + CM^2 \quad (25)$$

con le seguenti condizioni al contorno

$$\text{per } M = M_{CR} \quad \chi_m = \chi_{m,CR} \quad (26)$$

$$\text{per } M = M_Y \quad \chi_m = \chi_Y = \frac{M_Y}{E_c \bar{J}_{ci}} ; \quad \frac{\partial \chi_m}{\partial M} = \frac{1}{E_c \bar{J}_{ci}}$$

L'espressione (25), diventa allora:

$$\chi_m = \chi_{m,CR} + \frac{1}{E_c \bar{J}_{ci}} (M - M_{CR}) + 2CM_Y (M - M_{CR}) + C(M^2 - M_{CR}^2) \quad (27)$$

valida nell'intervallo  $M_{CR} \div M_Y$  (v. fig. 4), con

$$C = \frac{\chi_{m,CR} - \chi_{CR}}{(M_Y - M_{CR})^2} \quad (28)$$

La (27) si adatta bene ai risultati sperimentali e concorda con le indicazioni del CEB (VI), di quelle riportate in (VII) e con i risultati di altri autori (VIII).

Forme differenti da quella quadratica non introducono differenze apprezzabili.

Così una relazione lineare del tipo

$$\chi_m = A + BM \quad (29)$$

con le condizioni al contorno

$$\chi_m = \chi_{m,CR} \quad \text{per } M = M_{CR}; \quad \chi_m = \chi_Y \quad \text{per } M = M_Y \quad (30)$$

non comporta scostamenti notevoli e conduce all'espressione

$$\chi_m = \chi_{m,CR} + \frac{\chi_y - \chi_{m,CR}}{M_y - M_{CR}} (M - M_{CR}) \quad (31)$$

Le (27) e (31) permettono, mediante le consuete integrazioni, di ottenere i valori delle frecce.

### 3. CONCLUSIONI

La trattazione esposta consente di ottenere, con l'impiego di opportune ipotesi e con il corredo della nota teoria statica delle travi, un'appropriata e semplice interpretazione analitica dello stato di sforzo che si instaura nelle travi inflesse in c.a., a seguito del processo di fessurazione.

Riguardando un tratto di trave compreso fra due fessure contigue come elemento bidimensionale e mediante l'utilizzazione di un criterio di rottura puntuale si giunge alla formulazione di un'espressione della distanza fra due fessure consecutive, senza introdurre alcun parametro sussidiario.

Tale espressione evidenzia chiaramente il ruolo delle diverse caratteristiche geometriche delle sezioni considerate e di deformabilità dei materiali, confermando l'indipendenza della distanza fra le fessure dal valore della resistenza a trazione del conglomerato. Il risultato è sostanzialmente concorde con quello di altri Autori ma non richiede l'introduzione di coefficienti correttivi o il ricorso all'esperienza per acquisire i valori di certi parametri come in altre formulazioni, ad esempio di Rüsç e Leonhardt (I) (III).

Le espressioni ottenute per le componenti di sforzo consentono inoltre di determinare in maniera semplice e rapida i parametri di deformazione e l'ampiezza delle lesioni, oltre al valore della curvatura media al cracking, necessario per stabilire la relazione momenti-curvature medie nella fase successiva alla fessurazione stabilizzata. Infine, con l'introduzione di ulteriori ipotesi semplificative, è stato possibile attribuire alla relazione momenti-curvature medie una forma analitica che ben si adatta alle risultanze sperimentali e che risulta altresì in buon accordo con i risultati proposti ad esempio da Favre-Koprna-Putallaz (VIII), con riferimento alle indicazioni FIP/CEB (VI).

Concludendo, possiamo dire che il presente lavoro giunge, con rigore e senza l'introduzione di parametri empirici di sorta, alla trattazione della fessurazione delle travi semplicemente inflesse, consentendo nel contempo rapidità e semplicità nelle applicazioni pratiche.

## BIBLIOGRAFIA

- I) RÜSCH, H.: "Conglomerato armato e precompresso". Vol. 1, Ediz. Tecniche, 1978, p. 197 e seg.
- II) PARK, R., e PAULAY, T.: "Reinforced concrete Structures". J. Wiley and Sons, Inc. 1975, New York, p. 480 e seg.
- III) LEONHARDT, F.: "Controllo delle fessurazioni nelle strutture in calcestruzzo". Atti delle giornate A.I.C.A.P. 1977, Venezia.
- IV) MIGLIACCI, A., e MOLA, F.: "Progetto agli stati limite delle strutture in c.a.". p.I., Masson Italia Editori, Milano, 1978, p. 315 e seg.
- V) BORTOLOTTI, L.: "Alcune considerazioni sul comportamento a flessione delle travi in cemento armato in regime fessurativo". Istituto di Scienza delle Costruzioni, 1981, Cagliari.
- VI) Codice-Modello CEB/FIP per le strutture in cemento armato. Edizione A.I.T.E.C., 1978, Roma.
- VII) MINISTERO dei LL.PP.: "Istruzioni relative alle norme tecniche per la esecuzione delle opere in cemento armato normale e precompresso e per le strutture metalliche", circolare n. 20244, Roma, 30 giugno 1980.
- VIII) FAVRE, R., e KOPRNA, J., e PUTALLAZ, C.: "Deformation of Concrete Structures. Theoretical Basis for the calculation". IABSE Surveys S-16/81.
- IX) MACCHI, G.: "Fessurazione delle strutture precomprese e parzialmente precomprese". Atti delle Giornate del Precompresso, Ott. 1963, Venezia, Ediz. A.I.T.E.C. Roma.

EFFETTI VISCOSI NELLE STRUTTURE IN C.A. A PARETE  
SOTTILE CON ARMATURA A RETE BIDIREZIONALE

Michele BRIGANTE - Francesco RUSSO SPENA

Istituto di Scienza delle Costruzioni  
Facoltà di Ingegneria Università di  
NAPOLI

SOMMARIO

Con riferimento ad elementi in parete sottile in conglomerato armato con rete simmetrica, si attira l'attenzione sulla rilevanza del fenomeno viscoso. Gli autori propongono un modello elementare per un'indagine qualitativa.

SUMMARY

The Authors examine the creep effects concrete beams having thin - walled cross - section whose reinforcement is a symmetrical steel net.

An elementary model for a qualitative analysis of the problem is proposed.

1. PREMESSA

L'influenza della viscosità nel comportamento specifico delle strutture è stato oggetto di ampi studi che hanno evidenziato, in modo concreto e numerico, l'incidenza delle deformazioni susseguenti sui risultati del calcolo [1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10]. La letteratura scientifica [11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18] è ricca di esemplificazioni che mostrano l'importanza delle fasi costruttive, dei tempi di getto, dell'età dei calcestruzzi e dei problemi di redistribuzione di sforzi e di variazione dello schema di calcolo. Il presente lavoro riguarda la redistribuzione degli sforzi nelle strutture in conglomerato armate con rete bidirezionale. Lo stimolo a tale tipo di indagine è fornito proprio dal tema in di

battimento alla riunione annuale 1983 dell'AICAP su "strutture bidimensionali e curve in conglomerato cementizio". E' infatti prevedibile una ripresa della diffusione di tale tipo di strutture, favorita dalla divulgazione capillare del calcolo automatico ed, in contemporanea, dalla disponibilità di tecnologie e materiali di grande perfezione. Partendo da un recente studio degli Autori 19, si considera una sezione sottile chiusa (o a cassone) di una trave da ponte in c.a.; ciascun elemento rettilineo della sezione è a spessore costante e la armatura di ciascun "foglio" è costituita da una maglia quadrata simmetrica per rotazione di  $90^\circ$  e di passo "p". Nel citato lavoro 19 si mostra come la sezione possa considerarsi omogenea e come potessero costruirsi i domini limiti nel piano  $\zeta, \eta$ .

L'omogeneizzazione della sezione permette così di procedere al calcolo, nel continuo, dello stato tensionale in un generico punto P di uno qualsiasi dei fogli della trave.

Dalla conoscenza dello stato tensionale nel punto P del foglio ed attraverso l'uso di un modello di discretizzazione, che si propone, si passa alla definizione degli "sforzi" che il calcestruzzo ed il ferro sono chiamati ad equilibrare. Tale distribuzione, legata alla geometria del modello, è usuale nella statica del cemento armato ed utilizza il radicato presupposto della individuazione di bielle di calcestruzzo ed acciaio in uno schema reticolare.

L'aspetto che si vuole mettere in rilievo è legato alla presenza di elementi compressi nel modello, ed in particolare alla variazione nel tempo degli sforzi nell'acciaio e del calcestruzzo. In questa prima fase dello studio si mostra il problema nella sua generale impostazione.

E' intenzione degli Autori proporre delle indagini numeriche al fine di valutare con precisione l'incidenza del fenomeno viscoso.

## 2. L'ANALISI DELLO STATO TENSIONALE E LA DETERMINAZIONE DEGLI SFORZI

Si consideri un elemento quadrato di lato unitario di un generico "foglio" armato con rete metallica; sia  $\delta$  lo spessore del foglio ed "a" e "b" le direzioni delle barre di armatura; si indichi con  $\alpha$  lo angolo di inclinazione di una delle due famiglie di tondini,  $a_f$  l'area di ciascun tondino e "p" il passo della rete (fig. 1).

Al fine di procedere alla verifica puntuale del "foglio", è naturalmente necessaria la conoscenza delle distribuzioni degli sforzi tra acciaio e calcestruzzo.

Si suppone perciò noto lo stato tensionale  $\zeta, \eta$  nel punto P generico; si riporta (in fig. 1.a) tale stato tensionale.

Dalle tensioni assegnate all'intorno di P si passa alla definizione dello stato tensionale che si associa alle direzioni "a" e "b", attraverso la classica costruzione del cerchio di Mohr di fig. 2.

Con grado di approssimazione accettabile ai fini applicativi, si può ritenere che i valori delle tensioni siano uniformi nell'elemento di calcestruzzo di lato p, la cui frontiera è costituita dalla rete metallica. La uniforme distribuzione è schematizzata nella stessa fig. 1.a con i valori della fig. 2.

Si considerino agenti, per comodità operativa, le tensioni  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  e, separatamente, le  $\tau_{ab}$ ; data la uniforme distribuzione prima ipotizzata, d'ora in avanti si farà riferimento alle risultanti delle tensioni normali e tangenziali sui lati dell'elemento prismatico e si diranno  $F_a$ ,  $F_b$  e  $T_{ab}$  (fig. 3) e corrispondenti valori.

$$F_a = \sigma_a \times B \times \delta$$

$$F_b = \sigma_b \times B \times \delta$$

$$T_{ab} = \tau_{ab} \times B \times \delta$$

in cui il segno della forza è dipendente da quello delle tensioni corrispondenti.

### 3. IL MODELLO PROPOSTO

La schematizzazione di fig. 3 consente di introdurre un efficace modello di studio che permetta di definire la ripartizione delle forze fra gli elementi resistenti.

L'ipotesi che si assume alla base è che, nello stretto ambito dello elemento prismatico di calcestruzzo nel modulo p della rete, possa individuarsi un traliccio reticolare che garantisca l'equilibrio degli sforzi applicati. Si utilizzerà la consueta prassi statica di affidare al solo acciaio gli sforzi di trazione, ed alla sezione composta acciaio - calcestruzzo (o al solo calcestruzzo) gli sforzi di compressione.

Lo schema reticolare che si individua per il calcolo è quello di fig. 4 (\*).

In prima approssimazione si suppone che le aree di calcestruzzo collaboranti con ciascun elemento del traliccio siano una quota parte di quella del reticolo. In particolare, per il caso delle forze di fig. 4, si assume

$$A_c = \frac{B \times \delta}{2} \quad \text{per i correnti perimetrali}$$

$$A_c = \frac{B \times \delta \times e^{-1}}{2} \quad \text{per il diagonale compresso}$$

Applicando, separatamente, prima gli sforzi  $T_{ab}$ , poi  $F_a$  ed  $F_b$  è possibile definire le forze agenti in ciascun elemento del reticolo.

In fig. 4.a è dato il caso delle  $T_{ab}$ ; i correnti sono tesi, mentre il diagonale è compresso. In fig. 4.b è dato il caso delle  $F_a, F_b$ ; per questa seconda condizione il diagonale è scarico mentre i correnti sono a due tesi e compressi.

Di seguito si esamina - tra i diversi assetti statici del traliccio il caso dei correnti compressi.

---

(\*) Il concetto delle bielle è ampiamente illustrato nella lettera tura scientifica della statica del c.a. Per esso molti Autori hanno proposto vari criteri di ripartizione delle aree, nel caso in esame si assume il criterio proposto in (20).

4. LA RIDISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI FRA CONGLOMERATO ED ARMATURE NEGLI ELEMENTI COMPRESI IN C.A.

L'elemento compresso di fig. 4.b è concettualmente identico ad un pilastro soggetto a sforzo assiale  $N$  centrato ( $N > 0$ ); la  $N$  sia costante nel tempo, ed agisca dal tempo  $t = t_c$ .

Sia  $N_b(t)$  la parte assorbita dal conglomerato,  $n - N_b(t)$  quindi quella assorbita dall'acciaio. Si trascuri la viscosità dell'acciaio; è quindi, al tempo generico  $t > t_c$ , assumendo il nucleo viscoso alla Wi thney,

$$\varepsilon_f(t) = \frac{N - N_b(t)}{E_f A_f} \quad (1)$$

$$\varepsilon_b(t) = \frac{N(t)}{E_b A_b} + \frac{\alpha}{E_b A_b} \int_{t_c}^t e^{-\beta z} N_b(z) dz$$

ove  $E_b, A_b$  ed  $E_f, A_f$  sono le grandezze elastiche e geometriche, rispettivamente, del calcestruzzo e dell'acciaio.

Dalla relazione  $\varepsilon_f(t) = \varepsilon_b(t)$ , derivando rispetto a  $t$  si ottiene

$$\frac{dN_b}{dt} + \alpha \gamma e^{-\beta t} N(t) = 0$$

avendo posto  $\gamma = \frac{\alpha}{E_b A_b}$

Si ha quindi

$$N_b(t) = C e^{\alpha \gamma / \beta \cdot e^{-\beta t}} \quad (2)$$

Per  $t = t_c$  è  $N_b(t) = N_b^*$ ; quindi

$$N_b^* = C e^{\alpha \gamma / \beta \cdot e^{-\beta t_c}}$$

e la (2) si precisa in

$$N_b(t) = N_b^* e^{\alpha \gamma / \beta \cdot (e^{-\beta t} - e^{-\beta t_c})} \quad (3)$$

ed ancora

$$N_{b\infty} = N_b^* e^{-\alpha \gamma / \beta \cdot e^{-\beta t_c}} \quad (4)$$

Inizialmente ( $t = t_c$ ) si ha

$$\frac{N^*}{E_b A_b} = \frac{N - N_b^*}{E_f A_f}$$

da cui, chiamando  $\mu$  il coefficiente di amplificazione  $\frac{E_f}{E_c}$ ,  
e  $\mu$  il rapporto  $\frac{A_f}{A_b}$ ,

$$N_b^* = \frac{N}{1+n\mu} \quad (5)$$

$$N_f^* = n\mu \frac{N}{1+n\mu} \quad (6)$$

Si ha perciò

$$\frac{N_b^*}{N_f^*} = \frac{A_b}{nA_f} = \frac{1}{n\mu} \quad (7)$$

e cioè lo sforzo  $N$  si ripartisce fra conglomerato e ferro in ragione del rapporto fra l'area  $A_b$  del conglomerato e l'area amplificata  $nA_f$  dell'acciaio.

Per  $T \rightarrow \infty$  invece è

$$N_{f\infty} = N - N_{b\infty} = N - \frac{N}{1+n\mu} e^{-\alpha\gamma/\beta \cdot e^{-\beta t_c}}$$

e ancora

$$N_{f\infty} = N_f^* \left[ 1 + \frac{1}{n\mu} \left( 1 - e^{-\alpha\gamma/\beta \cdot e^{-\beta t_c}} \right) \right] \quad (8)$$

dove

$$\gamma = \frac{n\mu}{1+n\mu} \quad (9)$$

Dalle (4) e (8) si trae

$$\frac{N_{b\infty}}{N_{f\infty}} = \frac{1}{\mu n_{\infty}},$$

dove

$$n_{\infty} = n \frac{1 + \frac{1}{n\mu} \left( 1 - e^{-\alpha\gamma/\beta \cdot e^{-\beta t_c}} \right)}{e^{-\alpha\gamma/\beta \cdot e^{-\beta t_c}}} \quad (10)$$

Dal confronto tra le (7) e (9) si trae che per  $t \rightarrow \infty$  la ripartizione di  $N$  fra conglomerato ed acciaio tende a quella che si avrebbe in regime elastico se fosse  $n = n_{\infty}$ ; per ottenere quindi  $\epsilon_f$  e  $\epsilon_c$  si può operare con le formule (5) e (6), purchè si usi il coefficiente di amplificazione fittizio fornito dalla (10). Si riportano di seguito i valori di  $n_{\infty}$  per diversi valori di  $\underline{n}$ , di  $\alpha$ , e di  $\mu$ ; e per  $t_c = 0$ . In particolare le tabelle prevedono i casi di  $n = 8$ ,  $n = 10$ ,  $n = 15$ ; per ciascun valore di  $\underline{n}$  è prevista la variazione  $\alpha = 1, 2, 3$ ; con i valori così calcolati è eseguito un esempio numerico che evidenzia il fenomeno descritto.

$$n = 8$$

$\alpha$ \ 100 $\mu$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
1	16,06	16,13	16,19	16,25	16,30	16,58
2	24,25	24,51	24,76	25,00	25,25	26,42
3	32,58	33,16	33,73	34,30	34,88	37,73

$$n = 10$$

$\alpha$ \ 100 $\mu$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
1	20,10	20,19	20,29	20,38	20,47	20,88
2	30,40	30,79	31,18	31,56	31,93	33,74
3	62,02	64,04	66,06	68,07	70,07	79,89

$$n = 15$$

$\alpha$ \ 100 $\mu$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
1	30,22	30,43	30,64	30,83	31,02	31,87
2	45,85	46,76	47,62	48,46	49,28	53,12
3	62,02	64,04	66,06	68,07	70,07	79,89

Naturalmente i suddetti valori sono i massimi, perchè ottenuti per  $t_c = 0$  e  $t = \infty$ .

Si consideri la sezione conseguente ad un passo della rete metallica di 15 cm ed il "foglio" sia di spessore  $\delta = 10$  cm. La tensione  $\sigma_b$  sia risultata pari a 70 kg/cmq. Si ha così

$$F_b = 70 \times 15 \times 10/2 = 3500 \text{ kg}$$

$$A_c = 75 \text{ cmq} ; A_f = 1,13 (4\phi 6) \text{ cmq}$$

$$\mu = \frac{1,13}{75} = 1,5 \times 10^{-2}$$

Dalle (5) e (6) si ricava

$$N_b^* = - 3125 \text{ kg} \quad \sigma_c = - 41,67 \text{ kg/cm}^2$$

$$N_f^* = - 375 \text{ kg} \quad \sigma_f = - 332 \text{ kg/cm}^2$$

Per  $\alpha = 3$  ,  $\beta = 1$  ,  $t_c = 0$  e  $t = \infty$  è

$$n_{\infty} = 36,305$$

e quindi, dalle (5) e (6)

$$N_b = - 2266 \text{ kg} \quad \sigma_c = - 30,20 \text{ kg/cm}^2$$

$$N_f = - 1234 \text{ kg} \quad \sigma_f = - 1092 \text{ kg/cm}^2$$

Se lo sforzo assiale, ad un certo tempo, si annulla, si restituisce la parte elastica delle  $\sigma$ ; resta uno stato di autotensione per cui l'acciaio è compresso ed il conglomerato è teso. Nel caso in esame, se l'annullamento di N avviene in età avanzata, è

$$\sigma_c = + 11,47 \text{ kg/cmq}$$

$$\sigma_f = - 760 \text{ kg/cmq.}$$

E' questa solo l'applicazione esemplificativa all'elemento compresso. E' chiaro che il completamento delle verifiche prevede la somma degli effetti delle tensioni insorte per la combinazione dei casi di fig. 4.a e 4.b. Per brevità di esposizione non si riporta la somma.

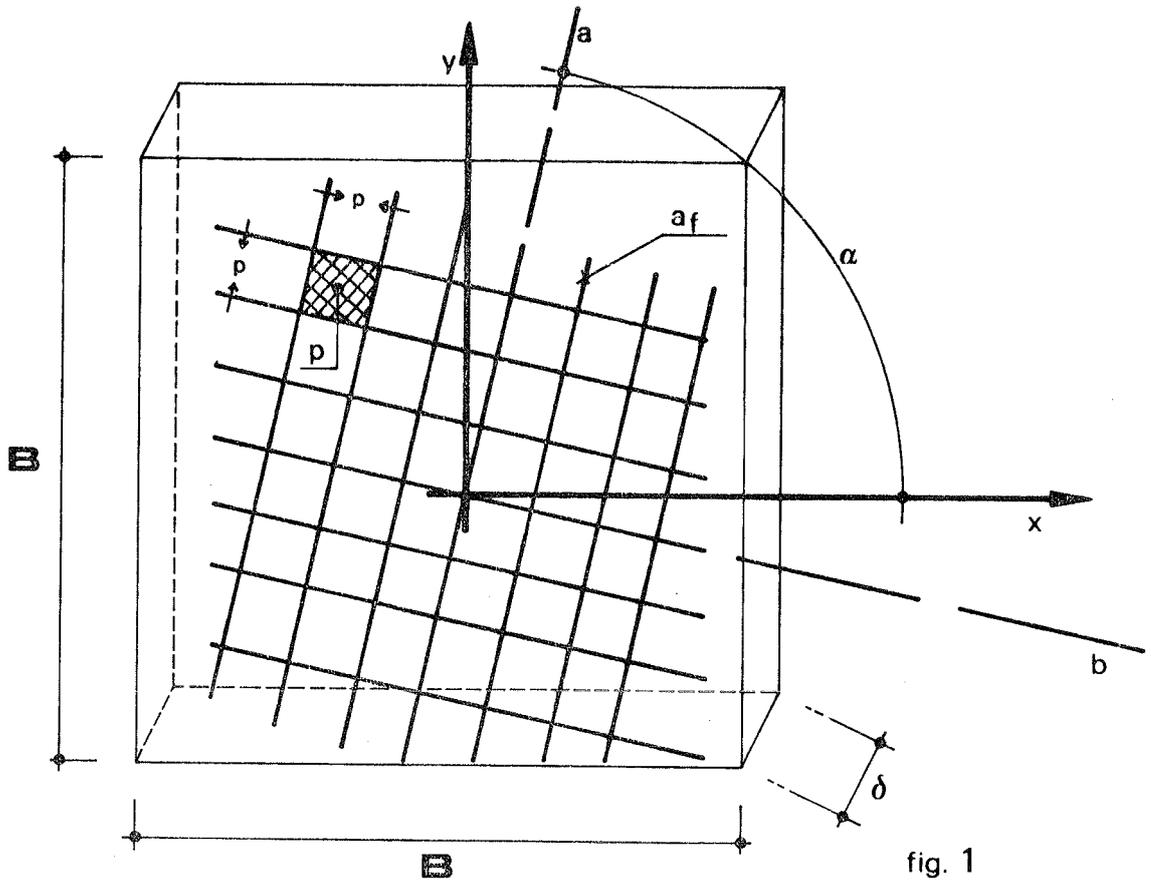


fig. 1

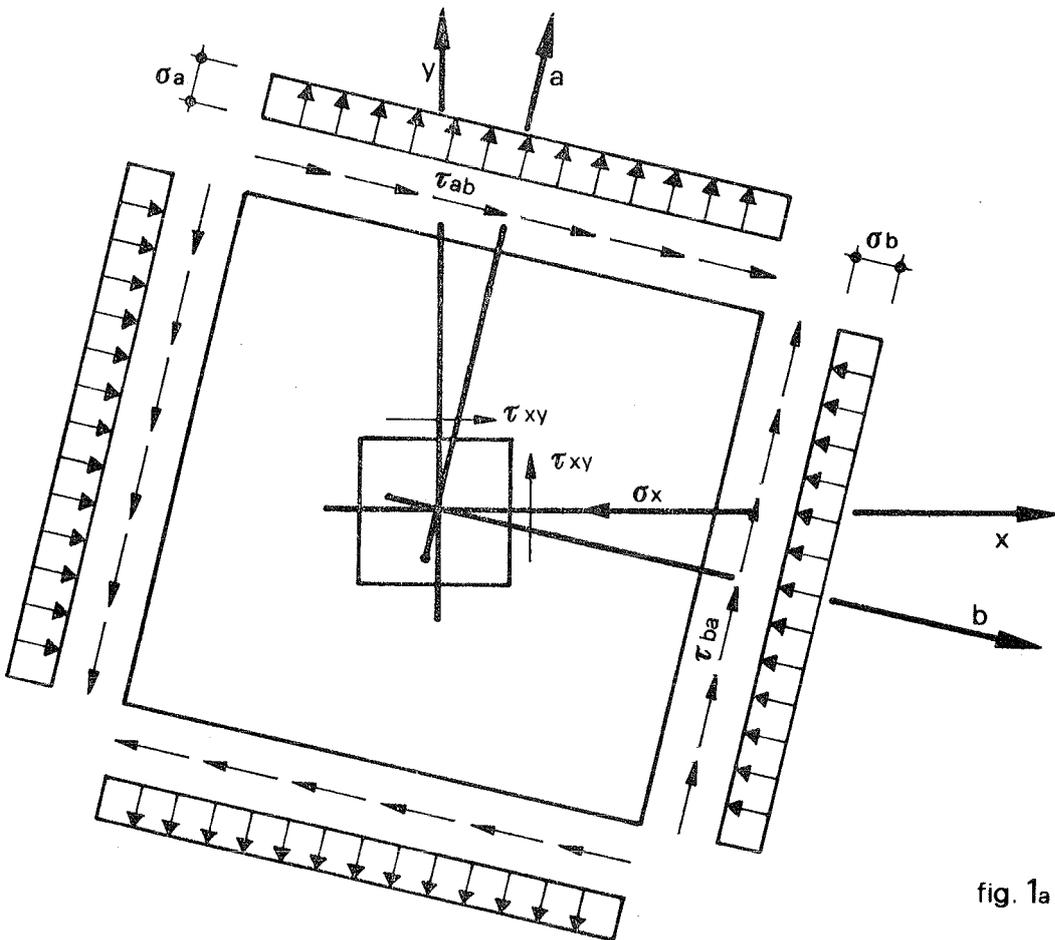


fig. 1a

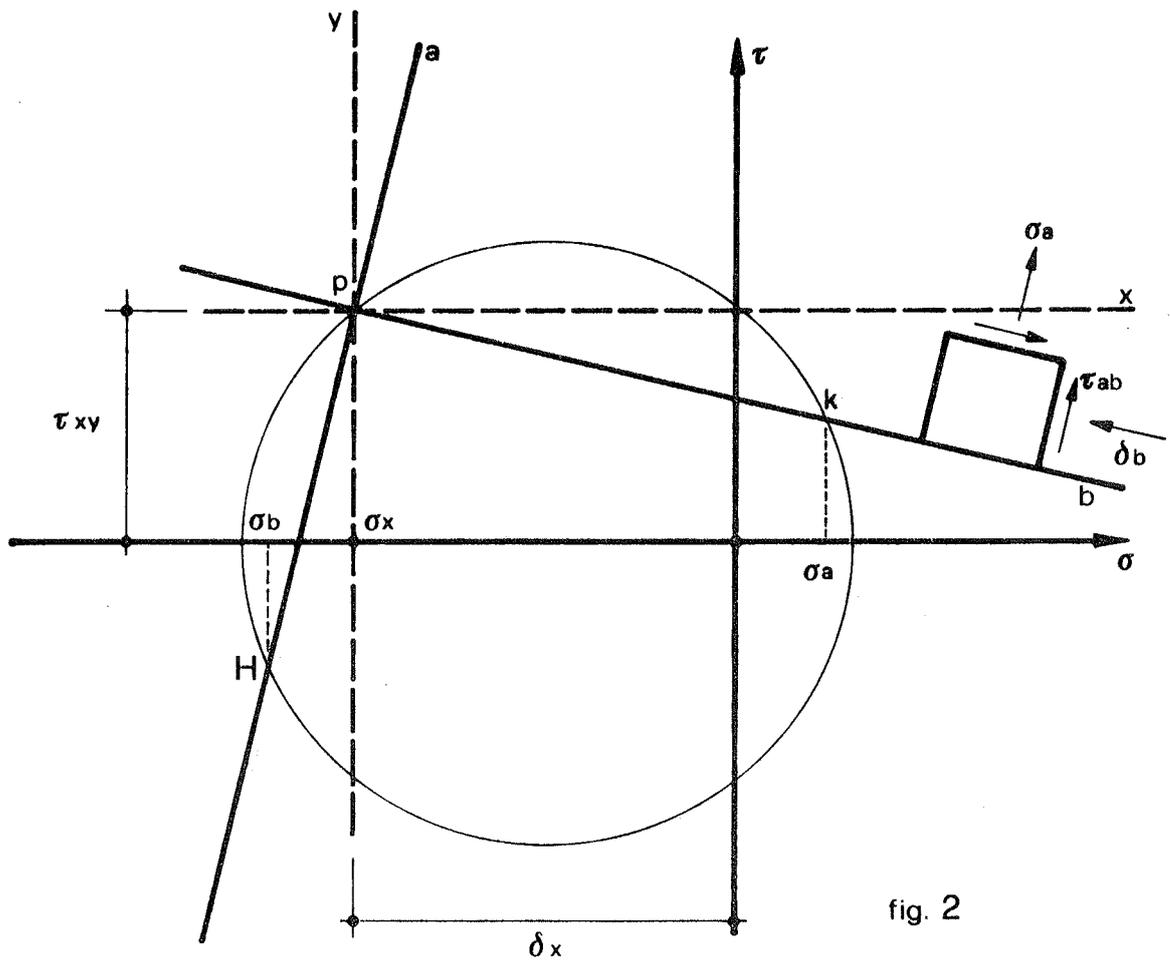


fig. 2

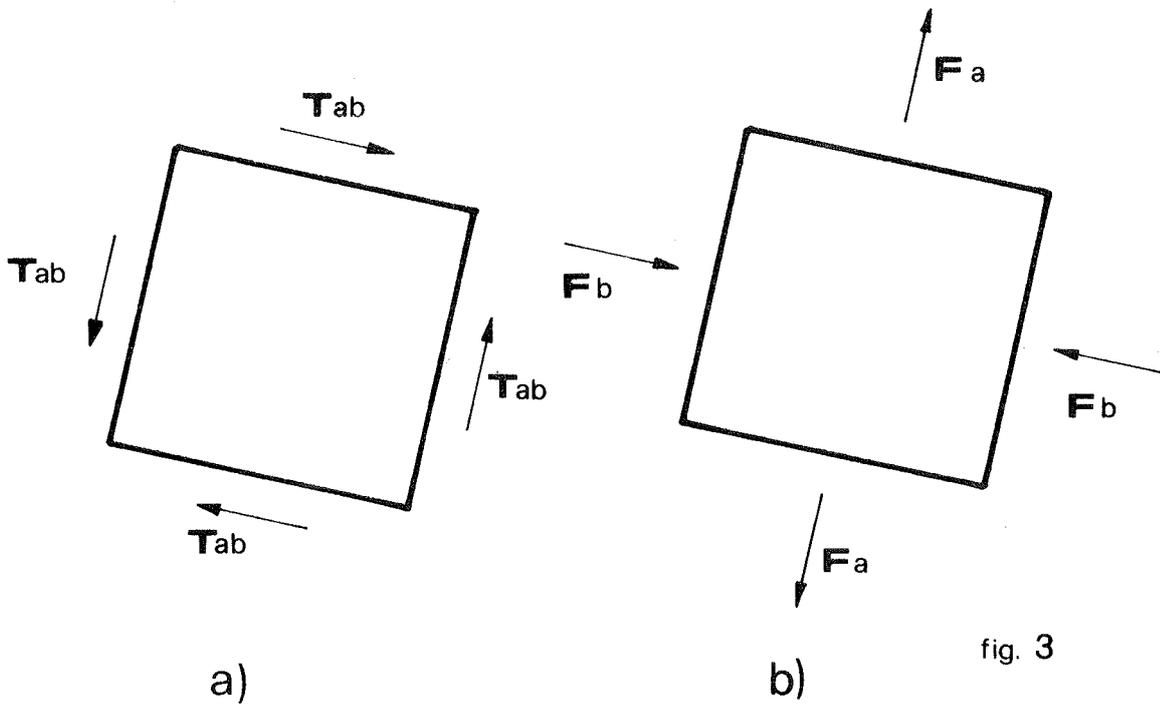


fig. 3

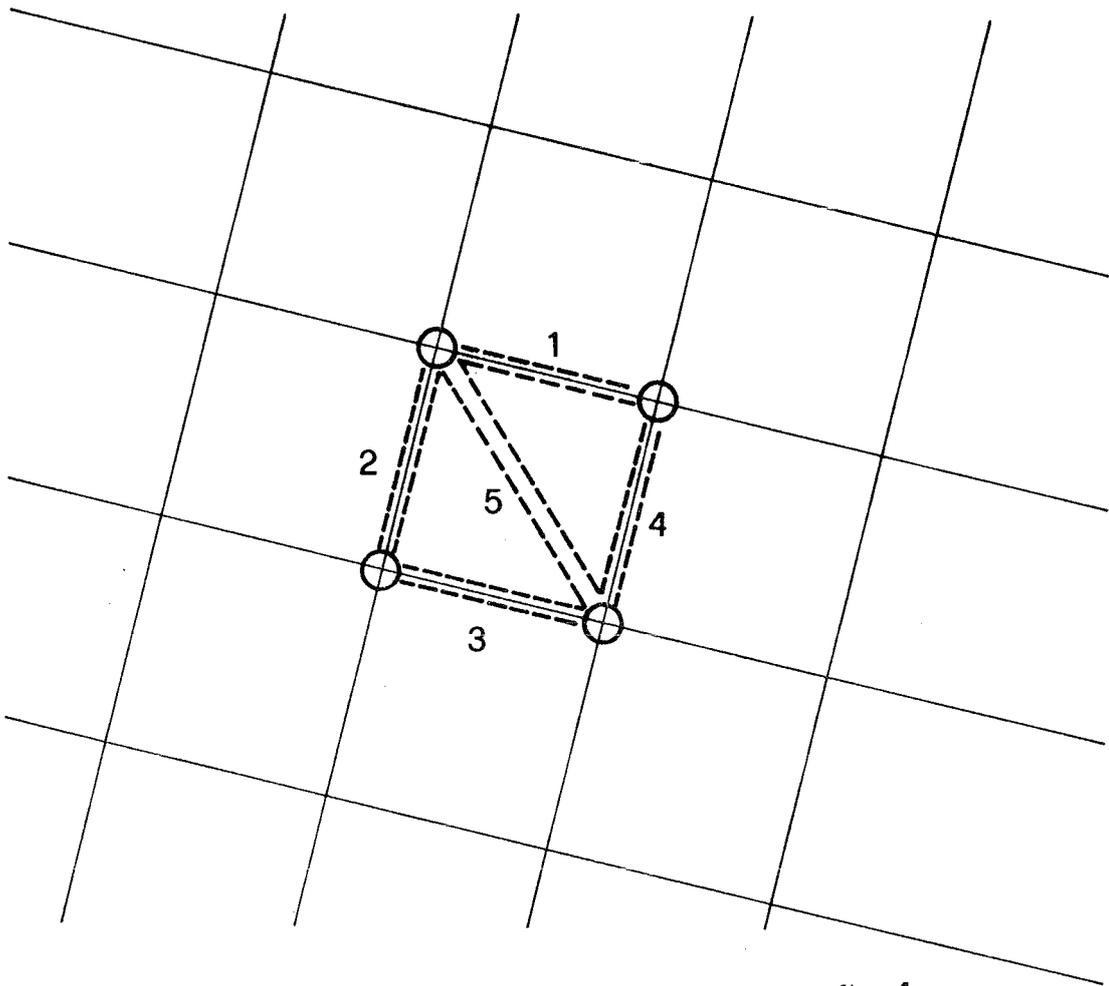


fig. 4

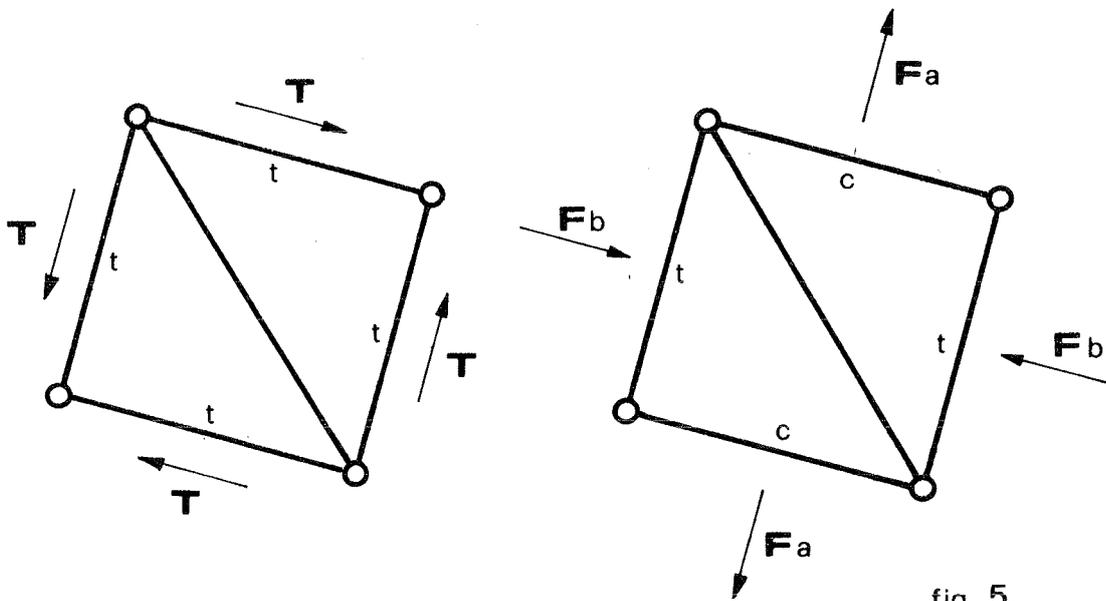


fig. 5

## B I B L I O G R A F I A

---

1. Aroutiounian - Applications de la théorie du fluage - Eyrolles - Paris - 1957
2. G.Dreux - F.Gorisse - Contribution a l'étude du fluage e de retour de fluage - Inst. Technique du batiment ed des travaux publics - Paris - 1979
3. I.Lazic - V.Lazic - Sur la fonction fluage donnée par la Code modélé CEB - FIP - Inst. Technique du batiment et des travaux publics Paris - 1980
4. V.Franciosi - Contributo allo studio delle strutture iperstatiche in regime viscoso - L'ingegnere - Milano - 1951
5. V.Franciosi - In tema di archi sottili in regime viscoso Rend. Accademia Scienze Fisiche e Matematiche - Napoli - 1951
6. V.Franciosi - Utilizzazione della viscosità dei calcestruzzi giovani per la correzione delle caratteristiche dello sforzo - Giornale del Genio Civile - Roma - 1951
7. V.Franciosi - Le aste sottili presso inflesse in regime viscoso - Rend. Accademia Scienze Fisiche e Matematiche - Napoli - 1952
8. V.Franciosi - Le deformazioni lente nei ponti tipo Risorgimento - Giornale del Genio Civile - Roma - 1955
9. V.Franciosi - An influence - Line Analysis for Suspension Bridges (discussion) A.S.C.E. - New York - 1956
10. V.Franciosi - Effet des déformations dues au fluage dans les ponts à voute préfabriquée - V° Congresso A.I.P.C. - Lisbona - 1956
11. V.Franciosi - Le deformazioni permanenti sotto carico costante nelle strutture in conglomerato cementizio - Corso di perfezionamento per le costruzioni in c.a. - Milano - 1958

12. V.Franciosi - Introduzione alla cosiddetta viscosità - Corso di perfezionamento per le costruzioni in c.a. - Milano - 1961
13. V.Franciosi - La viscosità del conglomerato in relazione al carico di punta - Ingegneri - Napoli - 1979
14. P.Belli - V.Franciosi - Coefficienti "omega" modificati per le verifiche al carico di punta in regime viscoso - Industria Italiana del Cemento - Roma - 1978
15. C.D'Onofrio - V.Franciosi - Il carico di punta in regime viscoso per travi di sezione variabile - Rend. Accademia Scienze Fisiche e Matematiche - Napoli - 1979
16. V.Franciosi - Sui nuclei ereditari - Giornale del Genio Civile - Roma - 1979
17. V.Franciosi - Appunti del Corso di Fondamenti degli equilibri non lineari (Vol. II°)
18. M. Brigante - Effetto delle deformazioni differite nelle strutture in c.a. risanate. Lavoro presentato alla riunione annuale del CNR del 1980 tenuta ad Ancona ed al corso di "Fondamenti degli equilibri non lineari" tenuto dal prof. Franciosi nell'anno accademico 1981 - 82.  
Facoltà Ingegneria - Napoli -
19. V.Franciosi - M.Brigante - Considerazioni e proposte sulla verifica agli stati limite delle travi a sezione sottile chiusa pluriconnessa in presenza di torsione.  
Industria Italia del Cemento n.° 11 - 1982.
20. G.Frunzio - Un semplice modello reticolare per lo studio qualitativo dell'effetto staffa sulla duttilità di un tronco plasticizzato di conglomerato armato -  
Rend. Accademia Scienze Fisiche e Matematiche - Napoli - 1978

# STUDIO SPERIMENTALE SUL COMPORTAMENTO CICLICO DI PANNELLI IN CONGLOMERATO CEMENTIZIO SOLLECITATI NEL PROPRIO PIANO

Ester CANTU' e Paolo ZANON

Ricercatori presso il Dipartimento di Meccanica Strutturale  
dell'Università di Pavia

## SOMMARIO

E' stata svolta un'indagine sperimentale su quattro pannelli armati orizzontalmente e verticalmente. Il carico viene applicato alternativamente nella direzione delle due diagonali. Si studia lo stato tensionale al centro dei pannelli prima della fessurazione e si registra il comportamento ciclico dell'elemento durante tutta la prova fino a collasso. Si esaminano le modalità di rottura.

## SUMMARY

The experimental analysis was performed on four elements horizontally and vertically reinforced. The specimens were loaded cyclically in diagonal compression. The stress state at the centre of the panels before cracking and the cyclic behaviour is recorded up to collapse. The failure modes are examined.

## 1. INTRODUZIONE

Nelle strutture intelaiate in cemento armato così come in quelle a setti portanti, la resistenza alle azioni orizzontali è generalmente affidata ad idonee pareti di controvento. Queste, realizzate in conglomerato cementizio, armato secondo le due direzioni verticale e orizzontale, in caso di azioni sismiche dovranno inoltre garantire un comportamento sufficientemente duttile in fase fessurata.

Molti lavori a carattere sperimentale sono stati svolti da diversi autori (I,II,III,IV,V,VI) con lo scopo di studiare la trasmissione mutua di taglio tra le due facce di una fessura singola eventualmente attraversata da armature per effetto di un aumento monotono di carico. Sono così stati proposti diversi modelli in grado di cogliere l'ingranamento delle facce della fessura, l'effetto bietta delle armature, l'effetto di contenimento dei vincoli esterni e delle armature ecc.

Altri lavori sperimentali (VII,VIII,IX,X) sono inoltre stati rivolti allo studio della trasmissione del taglio nel caso di carichi ciclici con inversione di segno.

La maggior parte di questi lavori assume come situazione iniziale quella di elementi in c.a. già fessurati secondo una o due direzioni ortogonali con fessure parallele e di apertura nota.

Nel seguito si intende esporre il risultato di un'indagine sperimentale effettuata su elementi in c.a. sottoposti a cicli di compressione diagonale.

In relazione al numero dei cicli ed all'intensità di carico raggiunta nel corso della prova si manifesta un quadro fessurativo non scelto a priori e soggetto a ciclica apertura e chiusura delle fessure stesse.

## 2. PROVE SPERIMENTALI

Sono state effettuate prove cicliche di compressione diagonale su 4 elementi piani in c.a.

Parallelamente sono stati sottoposti allo stesso tipo di prova anche degli elementi in muratura armata. Al fine di poter operare un confronto tra i risultati ottenuti dalle due serie di prove, le dimensioni e l'armatura degli elementi di calcestruzzo sono stati scelti in base al criterio illustrato nel seguito. Ritenendo particolarmente interessante il confronto, in fase elastica, tra l'elemento in muratura ed il suo corrispondente in c.a. allo scopo di controllare le varie ipotesi sullo stato tensionale dell'elemento in condizioni di compressione diagonale, si è scelto lo spessore dell'elemento in c.a. in modo da ottenere che il carico di formazione delle fessure fosse lo stesso per due elementi corrispondenti di muratura e di c.a.

Le percentuali d'armatura (in direzione verticale ed orizzontale) adottate per gli elementi in muratura armata erano modeste ma tali da conferire all'elemento, in fase successiva alla formazione delle fessure, un comportamento ciclico soddisfacente ( XI ). Per i corrispondenti elementi in c.a. sono state mantenute le stesse sezioni d'armatura verticale ed orizzontale.

I quattro elementi uguali tra loro a coppie sono caratterizzati da due diverse altezze come appare in Fig. 2.1 e Tabella 2.1.

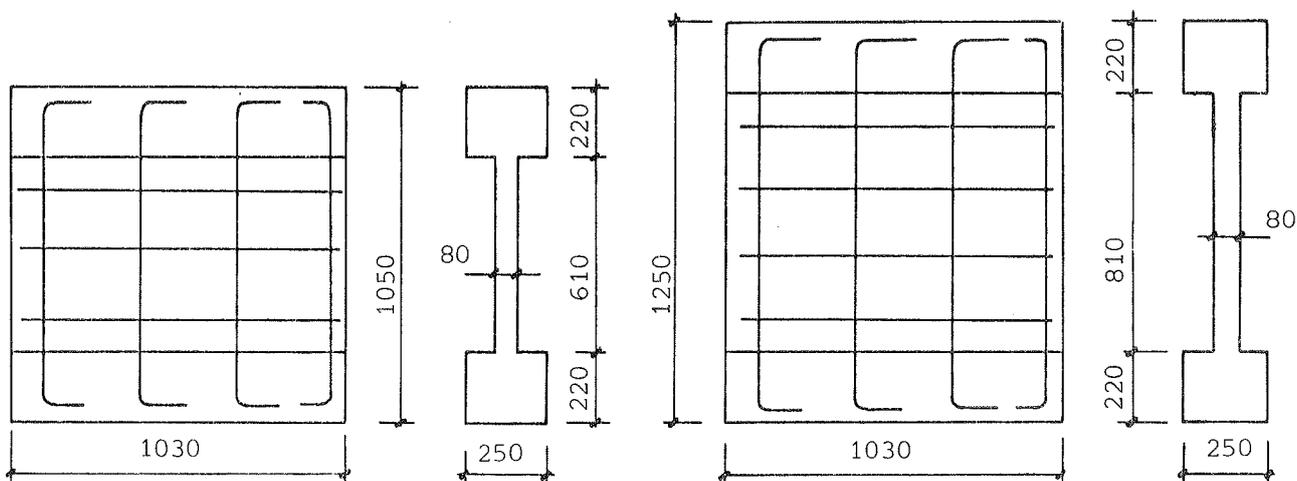


Fig. 2.1 - Dimensioni ed armatura degli elementi piani in c.a.

Elemento	Rapporto alt./larg.	Larg. mm	Alt. mm	$\rho_v$	$\rho_h$	Inclinazione della diagonale $\alpha$
TC1 e TC2	1.02	1030	1050	3.8‰	1‰	46°
TC3 e TC4	1.21	1030	1250	3.8‰	1‰	51°

Tabella 2.1 - Dimensioni degli elementi.

Il pannello, di spessore 8 cm, risulta compreso tra 2 cordoli di spessore 25 cm, aventi le stesse dimensioni dei cordoli della corrispondente serie di elementi in muratura. Le dimensioni dei cordoli in c.a. tra cui è compreso il pannello e le percentuali di armatura verticale ed orizzontale si mantengono immutate per tutti gli elementi.

Le caratteristiche delle armature e del calcestruzzo utilizzati nella confezione degli elementi, determinate da prove sperimentali, sono raccolte in Tabella 2.2.

Gli elementi sono stati sottoposti a cicli di carico comprimendoli alternativamente secondo le due diagonali con la stessa attrezzatura (Fig. 2.2) utilizzata per le prove su pannelli in muratura.

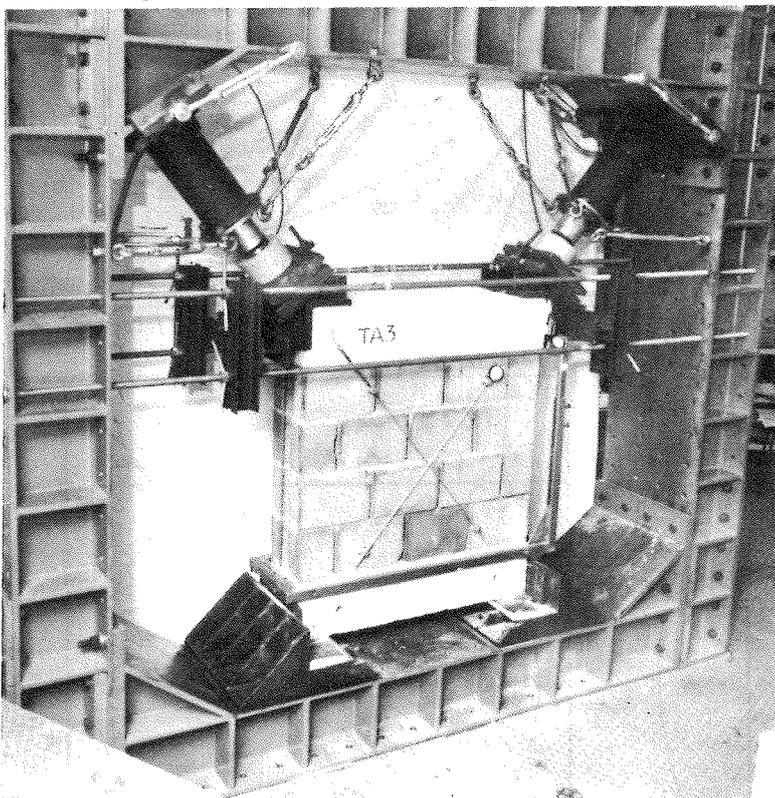


Fig. 2.2 - Attrezzatura per prove di compressione diagonale.

La disposizione delle basi di misura è stata scelta con criteri già seguiti per gli elementi in muratura armata. Supponendo i cordoli infinitamente rigidi, sono state rilevate le variazioni di lunghezza dei lati verticali e di entrambe le diagonali di ogni faccia. E' stato misurato inoltre lo scorrimento relativo tra i due cordoli (Fig. 2.3). Nel corso delle prove sono stati registrati automaticamente i diagrammi ciclici carico-spostamento orizzontale relativo, e carico-variazione di lunghezza in direzione di una diagonale. Inoltre, allo scopo di indagare sull'effettivo stato deformativo del pannello, nella zona centrale sono state disposte basi di Whittemore. Tali rilevazioni sono state effettuate sugli elementi TC3 e TC4 adottando

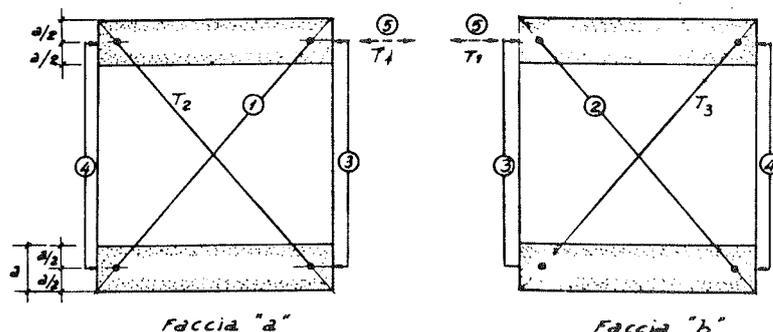


Fig. 2.3 - Strumentazione degli elementi.

TABELLA 2.2 - Caratteristiche dei materiali

<b>CALCESTRUZZO</b>		
Resistenza a compressione		30 N/mm <sup>2</sup>
Resistenza a trazione (da prova brasiliana su cilindro)		2.3 ÷ 2.5 N/mm <sup>2</sup>
<b>ARMATURA VERTICALE (barre aderenza migliorata)</b>		
Diametro equivalente	∅	10 mm
Tensione di snervamento	f <sub>y</sub>	499 N/mm <sup>2</sup>
Tensione di rottura	f <sub>r</sub>	734 N/mm <sup>2</sup>
Allungamento a rottura		24 %
<b>ARMATURA ORIZZONTALE (acciaio trafilato)</b>		
Diametro equivalente	∅	4.7 mm
Tensione di snervamento		588 N/mm <sup>2</sup>
Tensione di rottura		670 N/mm <sup>2</sup>
Allungamento a rottura		10 %

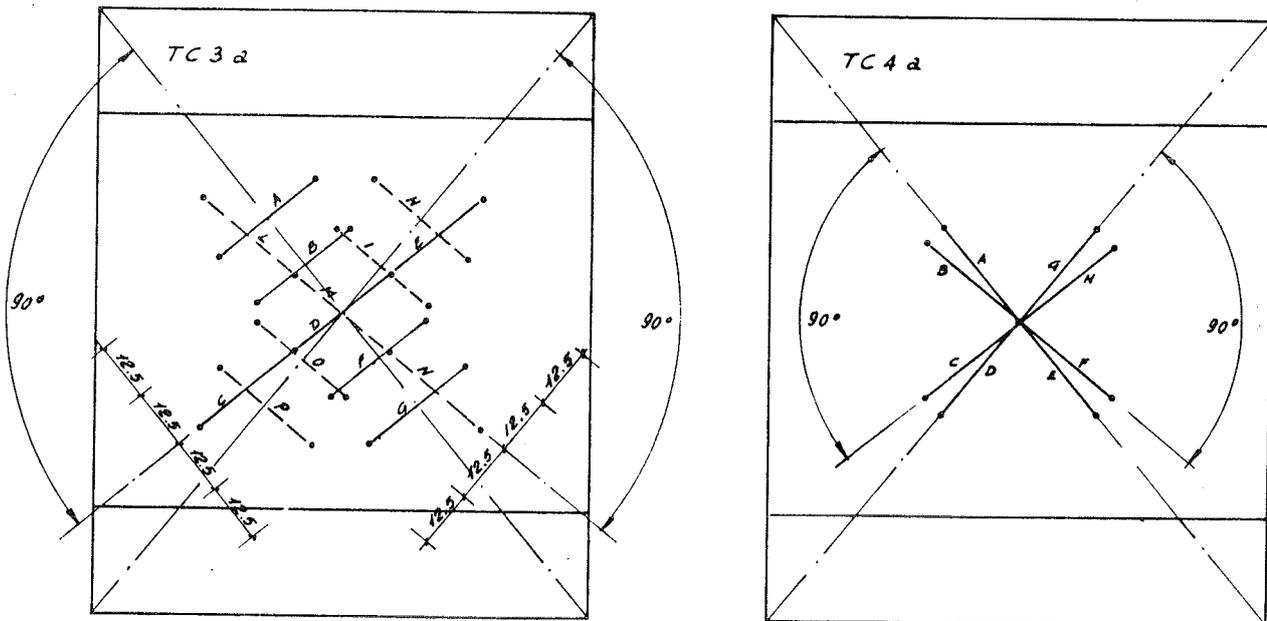


Fig. 2.4 - Disposizione delle basi di Whittemore  
 a) per l'elemento TC3  
 b) per l'elemento TC4

due diverse disposizioni dei punti di misura. In particolare, per quanto riguarda l'elemento TC3, le basi di Whittemore sono state di sposte perpendicolarmente alle due diagonali, come si vede in Fig. 2.4(a). La Fig. 2.4(b) mostra invece la disposizione delle basi di Whittemore adottata per l'elemento TC4 sulle due facce. Intorno al centro dell'elemento le basi sono state disposte secondo ognuna delle diagonali, essenzialmente al fine di verificare la validità di diverse ipotesi relative allo stato tensionale al centro dell'elemento.

### 3. DIVERSE IPOTESI RELATIVE ALLO STATO TENSIONALE IN FASE ELASTICA

Le osservazioni sperimentali condotte su elementi piani soggetti a compressione diagonale dimostrano come il punto critico per la formazione delle fessure sia al centro dell'elemento stesso. D'altra parte, assumendo come parametro indicativo per la fessurazione la tensione principale di trazione, vari autori hanno formulato diverse ipotesi circa lo stato tensionale al centro del pannello. In base ad esse è possibile determinare la tensione principale di trazione in funzione del carico diagonale agente.

Per l'elemento di forma abbastanza prossima al quadrato può essere interessante assumere per lo stato tensionale al centro del pannello i risultati ottenuti applicando la teoria dell'elasticità al caso del disco caricato secondo il diametro (XII). Tale disco risulta inscritto nel pannello come si vede in Fig. 3.1.

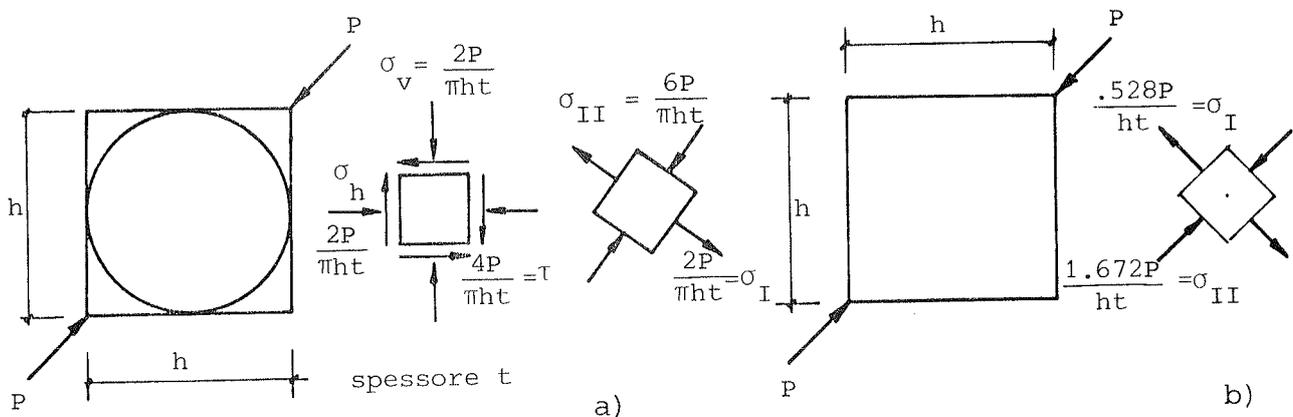


Fig. 3.1 - Stato tensionale al centro del pannello secondo la teoria dell'elasticità per il disco caricato secondo un diametro a) e per l'elemento quadrato caricato secondo la diagonale b).

Nella stessa figura sono indicati i valori delle tensioni principali. Una soluzione più accurata si può ottenere risolvendo con i metodi della teoria dell'elasticità il caso di un elemento quadrato caricato su due vertici opposti con una forza agente nella direzione della diagonale (XIII).

Lo stato tensionale che se ne ricava è indicato in Fig. 3.1(b). I valori delle tensioni principali risultano quindi poco diversi da quelli determinati assumendo l'ipotesi del disco caricato secondo un diametro.

Il caso di un elemento di forma quadrata soggetto a compressione diagonale è stato studiato anche mediante un modello ad elementi finiti in (XIV): il confronto con i risultati dell'analisi fotoelastica (XV) rivelatosi positivo ha consentito di estendere lo studio al caso in cui contemporaneamente al carico diagonale agisca un carico di

compressione uniformemente distribuito sui due lati orizzontali (vedi Fig. 3.2a) e b)). La presenza del carico verticale distribuito evidentemente riduce il valore della tensione principale di trazione e modifica l'orientamento delle tensioni principali. I risultati sono in Fig. 3.2.

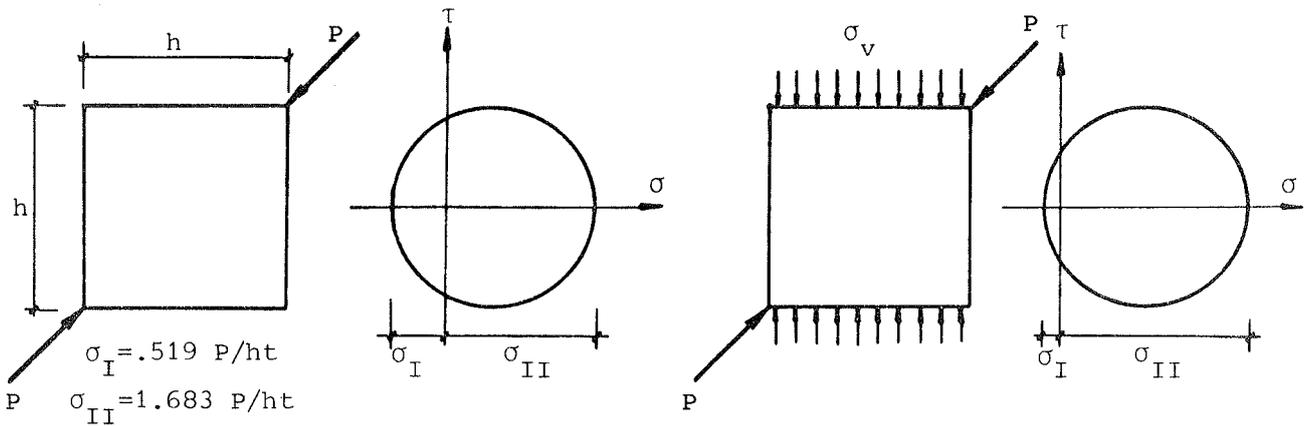


Fig. 3.2 - Stato tensionale al centro del pannello calcolato con un modello ad elementi finiti.

Le formulazioni fin qui illustrate si riferiscono ad elementi di forma quadrata: non sono quindi correttamente applicabili al caso degli elementi provati. Infatti la presenza dei cordoli individua dei pannelli rettangolari sui quali il carico non risulta applicato secondo la diagonale. La risultante delle forze esterne non agisce infatti sullo spigolo della porzione di pannello avente spessore pari a 80 mm, come appare in Fig. 3.3. Il caso di un pannello caricato in condizioni analoghe a queste è stato studiato da Turnšek e Čačovič ( XVI ) con riferimento alla Fig. 3.4.

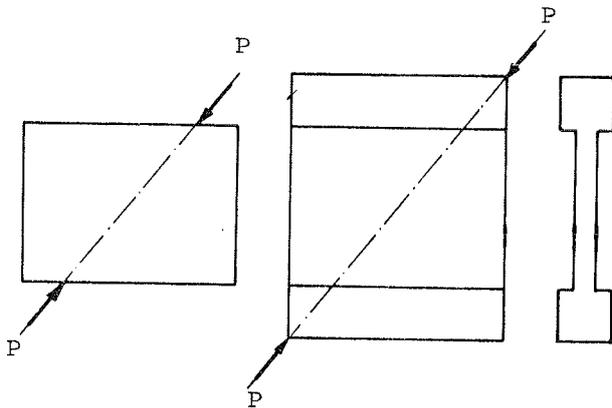
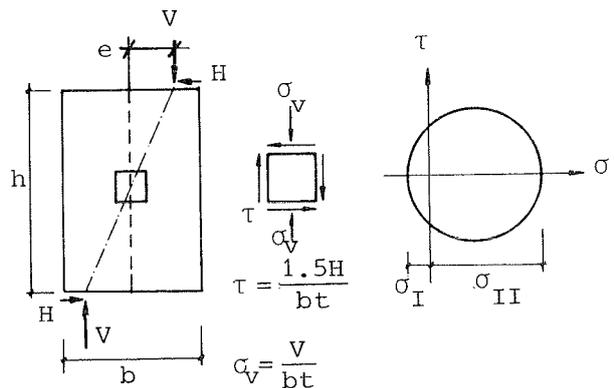


Fig. 3.3 - Direzione della risultante del carico sul pannello interno all'elemento.

Fig. 3.4 - Stato tensionale al centro del pannello secondo ( XVI )



Per valutare l'effetto di una qualsiasi combinazione di tensioni normali e tangenziali sulla resistenza del muro si determina il valore della tensione principale di trazione, che si assume come unico parametro rappresentativo. Le ipotesi relative allo stato tensionale dell'elemento infinitesimo al centro del pannello sono le seguenti:

- si prescinde dalla tensione normale orizzontale;
- sulla faccia orizzontale dell'elemento agiscono le tensioni normali e tangenziale, esprimibili in funzione delle componenti orizzontale e verticale del carico agente (vedi Fig. 3.4).

I risultati ottenuti con queste ipotesi sono confermati da analisi fotoelastiche ( XV ) purchè la forma del pannello rispetti il limite:

$$\frac{h}{b} > 1.5 .$$

Se l'eccentricità longitudinale (vedi Fig. 3.4) è:

$$e < \frac{b}{6}$$

il limite suddetto può abbassarsi a:

$$\frac{h}{b} > 0.67$$

Al di sotto del limite indicato il valore ottenuto per la tensione principale è superiore al valore reale. Può essere di qualche interesse confrontare i valori delle tensioni ottenute applicando i criteri illustrati. Tale confronto, relativo alle tensioni principali, alle tensioni normali orizzontale e verticale ed alla tensione tangenziale al centro del pannello, è oggetto della tabella 3.1 da cui appare come l'ipotesi assunta in ( XVI ) si differenzi sostanzialmente dalle altre a causa dell'assenza di tensioni normali in direzione orizzontale. Pertanto, in considerazione del fatto che l'eccentricità del carico nelle prove sperimentali supera i limiti previsti in ( XVI ) e inoltre che la presenza dei cordoli incide sullo stato tensionale e deformativo del pannello, anche l'applicazione di quest'ultimo criterio appare poco realistica.

#### 4. COMPORTAMENTO IN CAMPO ELASTICO

Le misurazioni effettuate mediante le basi di Whittemore permettono la valutazione dello stato deformativo al centro del pannello. Le rilevazioni relative all'elemento TC3 (Fig. 2.4a)) forniscono informazioni sull'andamento delle deformazioni della diagonale tesa. Dalla rielaborazione delle letture relative ad ogni semiciclo si può valutare l'intensità della tensione di trazione nel centro del pannello in direzione normale alla diagonale. In particolare volendo esprimere la tensione di trazione  $\sigma_t$  mediante una relazione del tipo:

$$\sigma_t = k_t \frac{P}{bt}$$

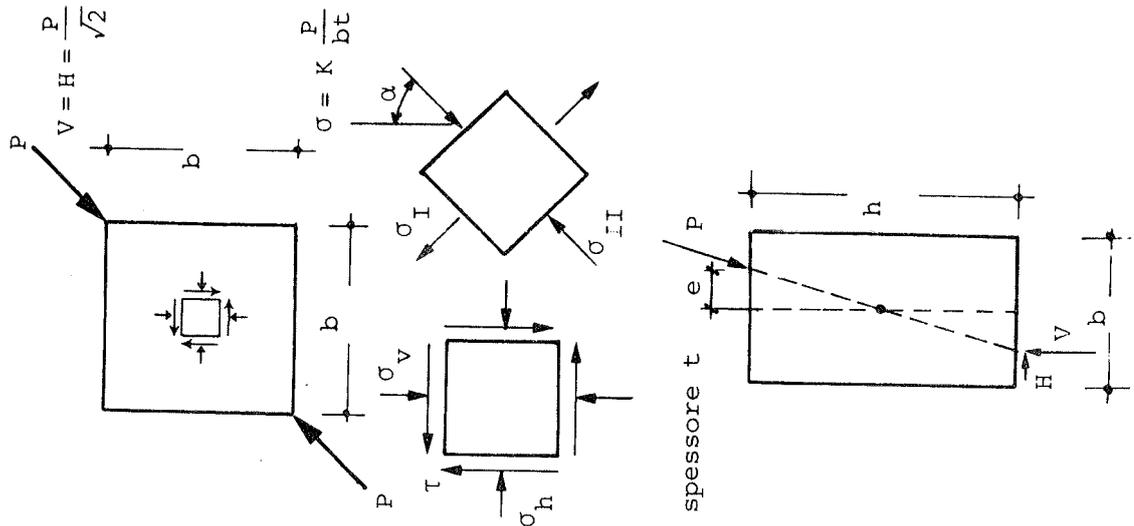
dove P è il carico diagonale applicato  
 b è la larghezza dell'elemento  
 t è lo spessore dell'elemento,  
 il valore della costante  $k_t$  ottenibile dalle letture è:

$$k_t = 0.99$$

L'analogia rielaborazione delle letture alle basi di Whittemore per l'elemento TC4 (vedi Fig. 2.4(b)) consente di determinare la costante di proporzionalità anche per la diagonale compressa ( $k_c$ ).

Tabella 3.1 - Tensioni al centro di un pannello soggetto a compressione diagonale

IPOTESI CIRCA LO STATO TENSIONALE	TENSIONI AL CENTRO DEL PANNELLO							$\alpha$
	$\sigma_v$	$\sigma_h$	$\tau$	$\sigma_I$	$\sigma_{II}$			
Disco caricato secondo il diametro (XII)	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$1.273 \frac{P}{b \cdot t}$	$0.637 \frac{P}{b \cdot t}$	$-1.910 \frac{P}{b \cdot t}$	$45^\circ$		
Quadrato caricato secondo la diagonale (XIII)	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$1.100 \frac{P}{b \cdot t}$	$0.528 \frac{P}{b \cdot t}$	$-1.672 \frac{P}{b \cdot t}$	$45^\circ$		
Elementi finiti (XIV)	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$-\frac{P}{b \cdot t}$	$1.100 \frac{P}{b \cdot t}$	$0.519 \frac{P}{b \cdot t}$	$-1.683 \frac{P}{b \cdot t}$	$45^\circ$		
Turnšek e Čačovič (XVI)	$-\frac{V}{b \cdot t}$	0	$-1.5 \frac{H}{b \cdot t}$	$+\frac{.5}{b \cdot t} [\sqrt{V^2 + 9H^2} - V]$	$-\frac{.5}{b \cdot t} [\sqrt{V^2 + 9H^2} - V]$	$\frac{1}{2} \arctg \frac{3H}{V}$		



Si ottiene rispettivamente:

$$k_t = 1.03$$

$$k_c = 1.65$$

I due valori ottenuti per  $k_t$  risultano quindi in buon accordo fra di loro.

Può essere interessante il confronto con i valori forniti in tabella 3.1. Facendo coincidere almeno in prima approssimazione, le direzioni principali al centro del pannello con le direzioni delle diagonali, il valore  $k_c$  precedentemente determinato risulta quasi coincidente con il suo corrispondente in tabella 3.1 assumendo il criterio di (XIII).

Il valore del coefficiente  $k_t$  ottenuto sperimentalmente appare invece assai maggiore di quanto previsto in via approssimata con i calcoli di tabella 3.1. Questo fatto imputabile alla forma degli elementi provati evidenzia come l'effetto dei cordoli sia sostanzialmente quello di esaltare la deformazione a taglio del pannello. Sulla scorta dello stato tensionale rilevato in fase elastica è quindi possibile prevedere il valore del carico per il quale la tensione di trazione raggiunge la resistenza del conglomerato. Si ottiene così un carico  $P = 190 \div 200$  kN in perfetto accordo con i valori del carico di fessurazione ottenuti sperimentalmente.

## 5. OSSERVAZIONI SUL COMPORTAMENTO CICLICO

Successivamente alla fase elastica, gli elementi sono stati sottoposti a cicli di carico in modo da raggiungere la fessurazione e la rottura.

In proposito il programma sperimentale prevedeva di effettuare due tipi di prova, sottoponendo gli elementi gemelli di ogni coppia, uno a cicli a deformazione imposta, l'altro a cicli a carico massimo. Il comportamento degli elementi provati e le modalità di rottura sono schematicamente sintetizzati in Tabella 5.1.

### 5.1. Prove cicliche a spostamento imposto

Gli elementi TC2 e TC3 sono stati sottoposti a diverse serie di cicli di carico. Ognuna di queste serie era caratterizzata da un valore prefissato del massimo spostamento orizzontale relativo. Lo scopo di questa procedura è stato quello di verificare l'idoneità degli elementi a sopportare cicli a spostamento costante in relazione al loro degrado intrinseco e l'influenza di questo sul valore del carico a rottura.

Allo scopo sono stati registrati i cicli di cui alle Figg. 5.1a e b che rappresentano il valore dello spostamento orizzontale relativo in funzione del carico diagonale applicato.

All'elemento TC2 sono state imposte due serie di cicli con scorrimento massimo rispettivamente pari a 0.5 mm e 2 mm mentre per l'elemento TC3 si sono scelti limiti pari a 1 mm e 2 mm.

Il comportamento dei due elementi è qualitativamente simile.

Dai diagrammi di Fig. 5.1a e b si rileva che il primo ciclo, dopo un tratto rettilineo evidenzia, in corrispondenza dell'apertura delle fessure, un brusco aumento di deformazione con successiva diminuzione di rigidità. Questo permette comunque una ulteriore ripresa del carico. I cicli seguenti, a parità di spostamento massimo, presentano una moderata degradazione della capacità portante accompagnata però da una decrescente energia dissipata. L'area sottesa da ogni semiciclo risulta infatti diminuire al crescere del numero dei cicli.

Per entrambi gli elementi, il passaggio alla serie successiva (2 mm

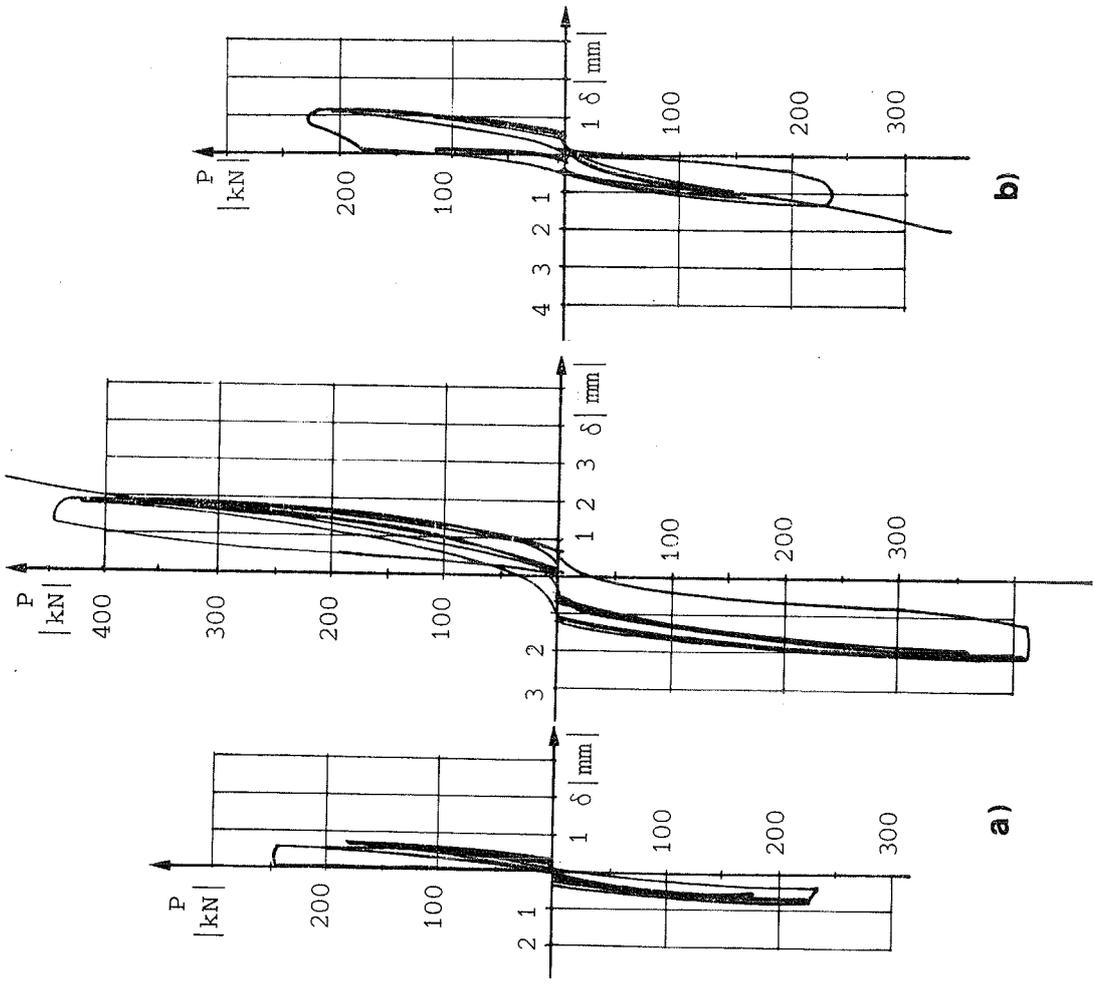
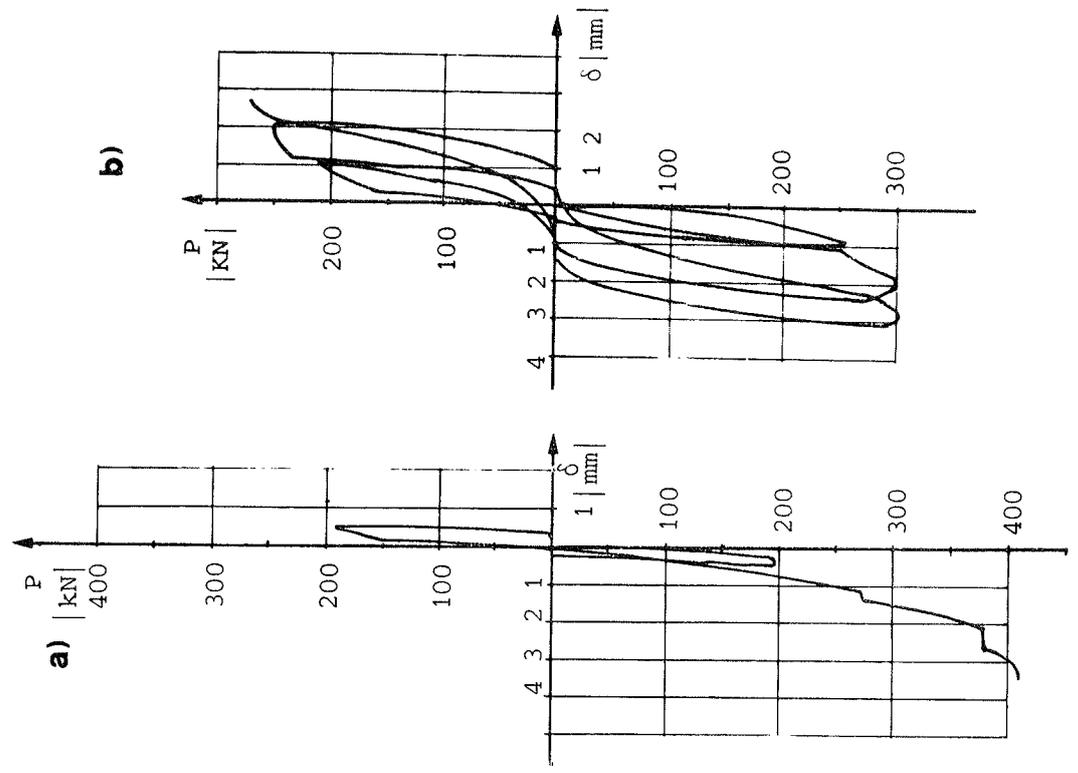


Fig. 5.1 - Cicli carico-spostamento a distorsione imposta:  
 a) elemento TC2  
 b) elemento TC3

Fig. 5.2 - Cicli carico-spostamento a carico imposto:  
 a) elemento TC1  
 b) elemento TC4



ELEM.	PROVA	CARICO FESS.NE kN	CARICO ULTIMO kN	DISTORSIONE ULT.REGISTR.	MODALITA' DI ROTTURA
TC1	Carico max. imposto	195	410	0.0049	Rottura di tutte le barre orizzontali
TC2	Distorsione imposta	245	500	0.0046	Rottura di tutte le barre orizzontali
TC3	Distorsione imposta	195	340	0.0025	Rottura del calcestruzzo per taglio sulle sezioni di contatto con i cordoli e successiva rottura di una barra orizzontale.
TC4	Carico max imposto	200	270	0.0043	Rottura di una barra orizzontale

Tabella 5.1 - Modalità di rottura osservate

per elemento TC3 e 3 mm. per l'elemento TC4) è caratterizzato dalla rottura.

## 5.2. Prove cicliche a carico massimo

Le prove sugli elementi TC1 e TC4 sono state effettuate assumendo come parametro di controllo in ogni semiciclo il valore del carico. In particolare l'elemento TC1 è stato sottoposto ad un ciclo completo, raggiungendo in ogni semiciclo il carico di formazione delle fessure. A questo è seguito un incremento di carico fino a rottura (Fig. 5.2a).

Per l'elemento TC4, invece, ogni semiciclo è stato effettuato raggiungendo il carico di formazione di una nuova fessura (Fig. 5.2b). L'esame della Fig. 5.2a consente di individuare i livelli di carico ai quali corrisponde l'apertura delle fessure evidenziata da un brusco aumento di deformazione.

L'analisi della Fig. 5.2b mette in evidenza ad ogni semiciclo un ramo di carico caratterizzato dalla diminuzione di rigidità all'aumentare del numero dei cicli. Il carico raggiunto in ogni semiciclo risulta crescente fino alla rottura.

Il comportamento sotto carichi alterni e le modalità di collasso sono strettamente connesse all'armatura adottata per i pannelli. Non si individua infatti un funzionamento sufficientemente duttile. La scarsa deformabilità degli elementi, che appare dai diagrammi registrati (Fig. 5.1 e 5.2) è imputabile essenzialmente alla ridotta quantità di armatura orizzontale ed al suo modesto allungamento a rottura. Essenziale nel definire le condizioni di rottura appare il tipo di sollecitazione ciclica imposta all'elemento. Questa causa la formazione di un numero limitato di fessure nelle quali l'armatura è chiamata a

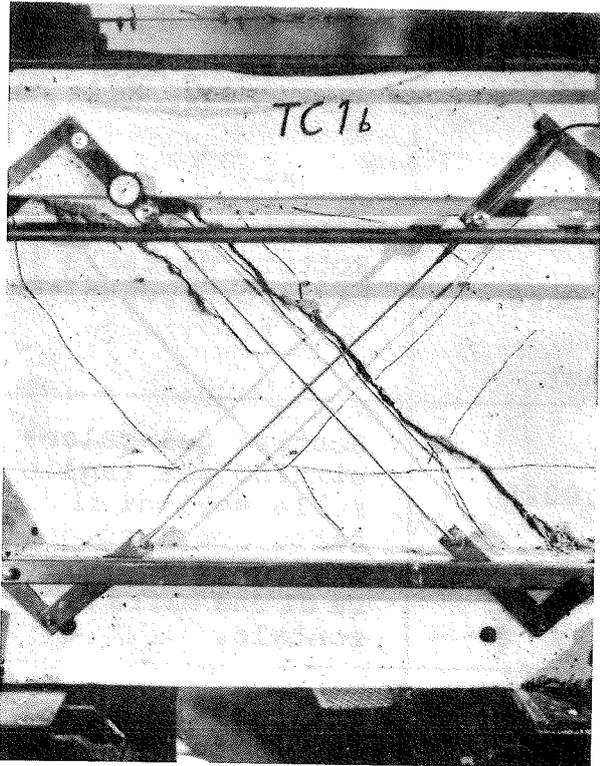


Fig. 6.1 - Meccanismo di rottura dell'elemento TC1

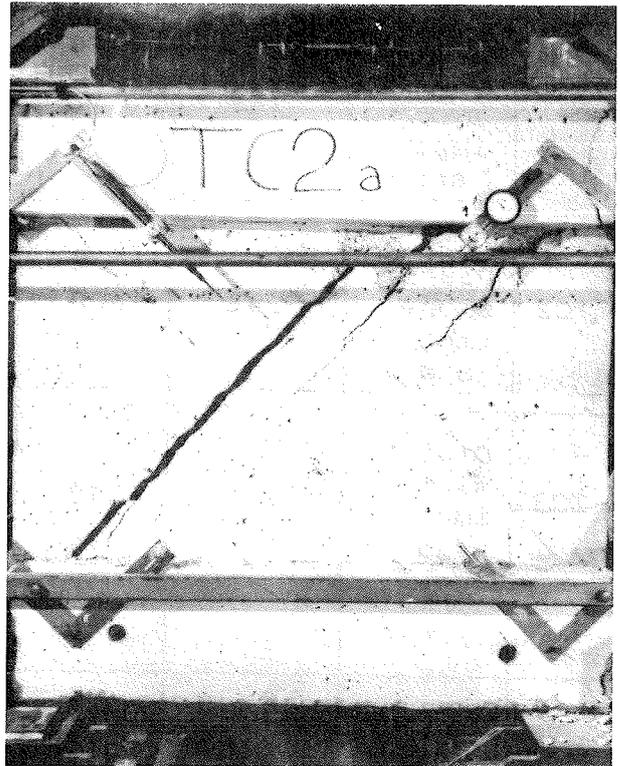


Fig. 6.2 - Meccanismo di rottura dell'elemento TC2

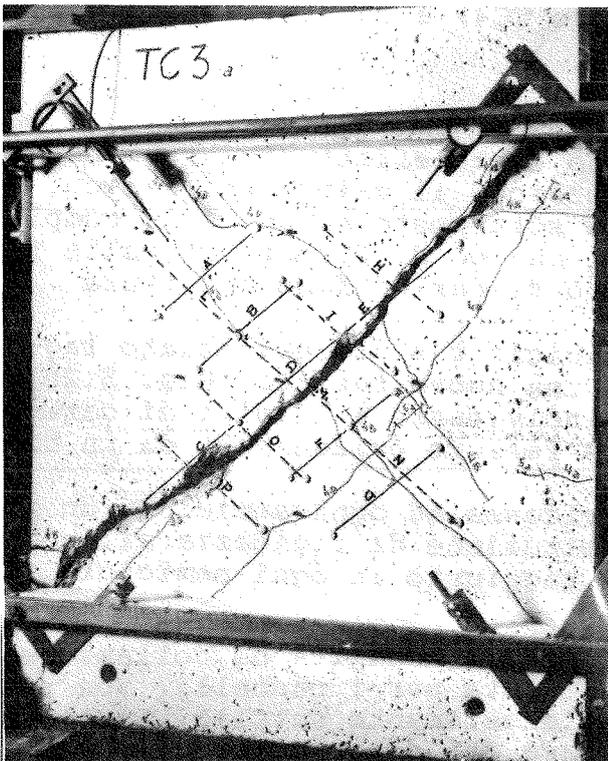


Fig. 6.3 - Meccanismo di rottura dell'elemento TC3

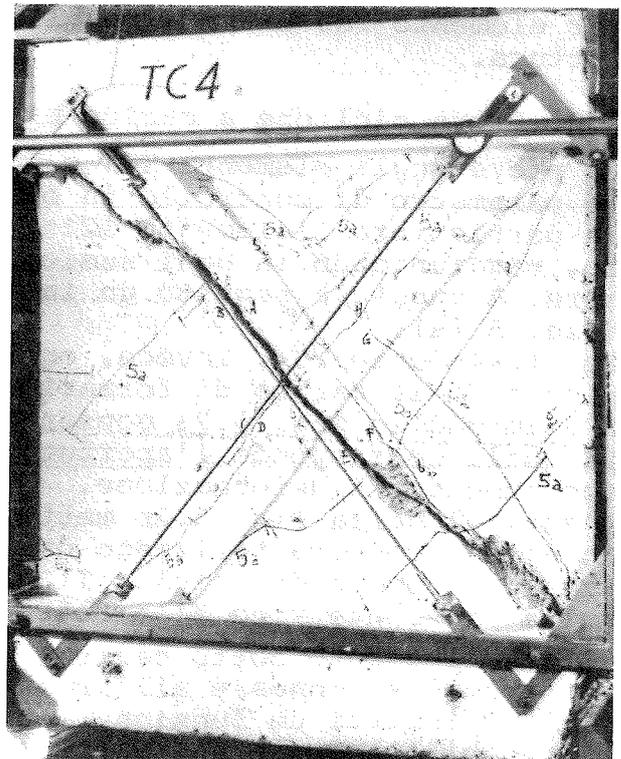


Fig. 6.4 - Meccanismo di rottura dell'elemento TC4

contribuire in modo determinante per l'equilibrio. L'aderenza tra acciaio e conglomerato limita la lunghezza di barra su cui si concentrano gli sforzi. In queste condizioni lo snervamento interessa un breve tratto di barra in corrispondenza della fessura e si osservano quindi modesti allungamenti plastici totali prima della rottura.

## 6. MODALITA' DI ROTTURA

Le osservazioni sperimentali permettono di rilevare la formazione in ogni elemento di una o più fessure inclinate a  $45^\circ$  indipendentemente dal rapporto tra i lati. Ciò appare abbastanza chiaramente dall'osservazione degli elementi a rottura avvenuta (vedi Figg. 6.1, 6.2, 6.3, 6.4). Inoltre si osserva anche che in corrispondenza del carico ultimo



Fig. 6.5 - Stato dell'armatura al momento del collasso.

mo si manifesta la rottura di una o più barre orizzontali e la deformazione delle barre verticali a causa del funzionamento a bietta (vedi Fig. 6.5).

In base alle osservazioni precedenti si può ritenere che la fessura (o le fessure) si formi nella zona centrale del pannello e da lì si estenda successivamente in direzione dei vertici all'aumentare del carico, fino a raggiungere i cordoli orizzontali. In tali condizioni si può ipotizzare che su ognuna delle due parti in cui può pensarsi suddiviso il pan-

nello agiscano le componenti orizzontale (H) e verticale (V) del carico esterno e le forze agenti sul piano di rottura.

In generale queste possono essere:

- azioni tangenziali ( $T_1$  e  $T_2$ ) e normali ( $N_1$  e  $N_2$ ) sulle sezioni di contatto con il cordolo;
- azioni tangenziali ( $T_i$ ) lungo la fessura dovute ad ingranamento degli inerti ed effetto bietta dell'armatura verticale;
- azioni orizzontali ( $H_i$ ) dovute all'armatura orizzontale.

Lo schema illustrato è stato applicato al caso degli elementi TC3 e TC4.

Le misurazioni sperimentali e le modalità di rottura evidenziano che al momento del collasso le due porzioni dell'elemento si separano con un movimento di traslazione orizzontale. Ciò consente di trascurare il contributo delle azioni tangenziali derivanti dall'ingranamento degli inerti lungo i lembi della fessura.

In queste condizioni le due porzioni dell'elemento risultano collegate dalle armature e dal calcestruzzo ancora integro nella parte estrema delle sezioni di innesto tra pannello e cordoli. A rottura si ipotizza il cedimento del calcestruzzo in tali sezioni per il raggiungimento della resistenza alle tensioni tangenziali seguito dalla rottura delle barre orizzontali. Le precedenti assunzioni sulle modalità di rottura si basano sulle osservazioni sperimentali.

Lo schema relativo alle forze agenti su metà pannello (Fig. 6.6) a rottura è stato applicato ai casi sperimentali.

Si verifica che la rottura dell'elemento TC3 avviene per raggiungimento della tensione tangenziale limite del calcestruzzo lungo i tratti orizzontali della linea di rottura di Fig.6.6, all'innesto tra pannello e cordoli. La rottura del calcestruzzo è seguita da quella delle barre orizzontali. Per l'elemento TC4, sottoposto ad una serie di cicli a carico imposto, con conseguente formazione di un numero più elevato di fessure, si manifesta un accumulo di deformazioni residue causate dall'incuneamento di particelle sciolte tra le facce della fessura. Tale accumulo conduce al raggiungimento di una deformazione tale da comportare la rottura delle barre orizzontali.

L'applicazione dello schema già illustrato si rivela in accordo con il meccanismo di collasso osservato sperimentalmente. Questo coinvolge la rottura di due barre orizzontali e la successiva crisi delle sezioni di conglomerato a contatto con i cordoli

Analogo comportamento è stato osservato per gli elementi TC1 e TC2, nei quali si è manifestata la rottura di tutte le barre orizzontali per raggiungimento della deformazione limite dell'acciaio. La rottura avviene in corrispondenza di carichi maggiori, rispetto agli elementi precedenti, in conseguenza della forma, tale per cui la diagonale geometrica degli elementi coincide con la direzione di applicazione del carico.

## 7. CONCLUSIONI

Le osservazioni sperimentali precedentemente illustrate richiamano l'attenzione su alcune caratteristiche del comportamento dei pannelli.

In fase elastica non è possibile la semplice utilizzazione dei risultati derivati dall'applicazione dei metodi della teoria dell'elasticità. Infatti, nei casi esaminati, hanno fondamentale importanza la presenza dei cordoli orizzontali rigidi e le modalità con cui questi trasferiscono il carico esterno al pannello avente spessore inferiore rispetto ai cordoli.

Il comportamento ciclico successivo alla deformazione delle fessure è condizionato in modo fondamentale sia dalle modalità di prova, sia soprattutto dall'armatura (disposizione e quantità).

Non si individua un comportamento sufficientemente duttile, a causa della rottura delle barre orizzontali, caratterizzate da modesto allungamento a rottura.

Alla luce di quest'ultima considerazione, si impone un'estensione del programma sperimentale, tesa a valutare l'influenza della diversa duttilità dell'armatura sul comportamento dei pannelli.

*Il presente lavoro è stato svolto con il finanziamento del MPI, (40% dei fondi per la ricerca scientifica).*

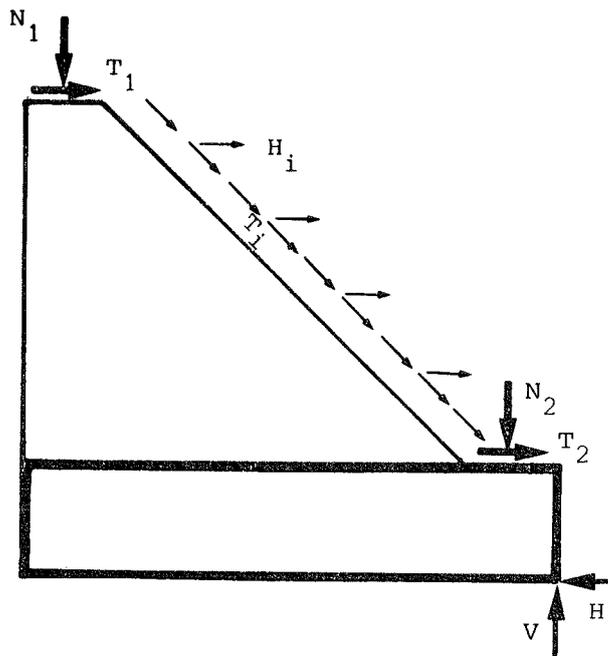


Fig.6.6 - Componenti di sollecitazione sul piano della fessura.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- I) White, R.N., Holley, M.J.: Experimental Studies of Membrane Shear Transfer, J. Struct. Div. ASCE, Agosto 1972, pp. 1835-1852
- II) Mattock, A.H.: Shear Transfer in Concrete Having Reinforcement at an Angle to the Shear Plane, SP-42 ACI, 1974, pp.17-42
- III) White, R.N., Gergely, P.: Shear Transfer in Thick Walled Reinforced Concrete Structures under Seismic Loading, Dept. of Struct. Eng., Cornell Univ., Rep. N. 75-10, 1975
- IV) Laible, J.P., White, R.N., Gergely, P.: Experimental Investigation of Shear Transfer Across Cracks in Concrete Nuclear Containment Vessels, SP-53, ACI, 1977, pp.203-226
- V) Jimenez-Perez, R., Gergely, P., White, R.N.: Shear Transfer Across Cracks in Reinforced Concrete, Report 78-4, Dept. of Struct. Eng., Cornell Univ., 1978
- VI) Bazant, Z.P., Gambarova, P.: Rough Cracks in Reinforced Concrete, J. Struct. Div., ASCE, Aprile 1980, pp. 819-842.
- VII) Mattock, A.H.: Shear Transfer under Cyclically Reversing Loading Across an Interface Between Concretes Cast at Different Times, Civil Eng. Report 77-1, Univ. of Washington, Giugno 1977
- VIII) Leombruni, P., Buyukozturk, O., Connor, J.J.: Analysis of Shear Transfer in Reinforced Concrete with Application to Containment Wall Specimens, MIT Preparato per la U.S. Nuclear Regulatory Commission, Ottobre 1979
- IX) Oesterle, R.G., Russell, H.G.: Shear Transfer in Large Scale Reinforced Concrete Containment Elements, Report N.1, Construction Technology Laboratory, Portland Cement Association, Dicembre 1979
- X) Tseng, T.M., Calvo J.: Behavioral Model for R.C. Panels under Cyclic Shear, M.I.T. Dept. of Civil Eng., Research Rep.R81-12, Novembre 1981
- XI) Cantù, E., Zanon, P.: Combined Cyclic Testing Procedures in Diagonal Compression on Hollow Clay Block Reinforced Masonry, 6th Int. Brick Masonry Conf., Roma 1982, pp.1007-1020
- XII) Timošenko, S.: Theory of Elasticity, New York, 1934
- XIII) Cinquini, C.: Some Analytical Solutions for Rectangular Disks, Rapporto Interno del Dipartimento di Meccanica Strutturale dell'Univ. di Pavia, 1983
- XIV) Yokel, F.Y., Fattal, S.G.: Failure Hypothesis for Masonry Shear Walls - Journal Struct.Div. ASCE, Marzo 1975
- XV) Frocht, M.M.: Photoelasticity, Wiley, New York, 1948
- XVI) Turnšek, V., Čačovič, F.: Some Experimental Results on the Strength of Brick Masonry Walls - Second Int. Brick Masonry Conf. Stoke-on-Trent, 1970, pp.149-156.

- XVII) Cantù, E.: Proposta di un tipo di prova di compressione diagonale su elementi in muratura, L'Industria Italiana dei Laterizi, N.6, 1978
- XVIII) Cantù, E., Macchi, G.: Strength and Ductility Tests for the Design of Reinforced Brickwork Shear Walls, Proc. of the Fifth Int. Brick Masonry Conf., Washington, October 1979

# I RAPPORTI DI SNELLEZZA LIMITE DELLE PIASTRE IN C.A. ALLA LUCE DELL'ANALISI NON LINEARE

Aldo CAUVIN

Professore Incaricato di Progetti di Strutture  
Dipartimento di Meccanica Strutturale  
Università di Pavia

## SOMMARIO

Nel presente lavoro viene presentato uno studio parametrico su piastre in C.A. soggette a diverse condizioni di vincolo, effettuato utilizzando un programma di calcolo non lineare che assimila il continuo bidimensionale a un graticcio di travi equivalenti, allo scopo di determinare a quali valori di deformazione relativa corrispondono; nei casi più sfavorevoli, i rapporti di snellezza limite fissata dalla Normativa Italiana e dal Model Code del CEB.

## SUMMARY

A parametric study on R.C. slabs is presented, performed using a non linear program, in which the slab is modelled as an "equivalent grid", with the aim of determining the deformations corresponding, in the most unfavourable cases, to the slenderness limits prescribed by the Italian and CEB Codes.

## 1. INTRODUZIONE

Nella progettazione delle piastre in C.A. assume particolare importanza la verifica delle frecce in condizione di esercizio; da tale verifica dipende assai di frequente la scelta dello spessore della piastra considerata; d'altra parte l'esperienza accumulata nell'utilizzazione di questo tipo di struttura, rivela che molto spesso si verificano danni prodotti da una deformazione eccessiva; tali danni non sono dovuti, in molti casi, ad applicazione di sovraccarichi superiori a quelli previsti in sede di progetto, ma semplicemente al fatto che non si è dedicata sufficiente attenzione alla verifica dello stato limite di deformazione.

D'altra parte il calcolo lineare elastico, mentre può essere utilizzato in modo efficace per determinare la capacità portante di una piastra, si rivela del tutto inadeguato ai fini di una precisa determinazione delle deformazioni.

Per ottenere tale risultato è necessario tenere conto dei fenomeni fessurativi che si instaurano nel calcestruzzo, delle deformazioni viscosi e della non linearità della legge costitutiva del calcestruzzo.

Per simulare tali fenomeni un calcolo di tipo non lineare diventa necessario. D'altra parte un tale tipo di calcolo richiede l'uso di programmi complessi e una accurata taratura dei dati che definiscono il comportamento dei materiali. Ciò non è sempre pratico nè possibile in sede di progettazione.

Per tale motivo sono state formulate recentemente alcune proposte per una determinazione approssimata delle frecce in esercizio (V) (VIII), sulla cui validità sono tuttora in corso verifiche e controlli.

Inoltre le varie normative (VI) (VII) (XI) e, in particolare quella Italiana hanno fissato dei limiti di "snellezza al disotto dei quali la verifica della freccia in esercizio può essere omessa.

Tali limiti dovrebbero essere, come è facile immaginare, cautelativi. Tuttavia, poichè la deformazione accettabile varia a seconda dell'uso cui è destinata la struttura, è bene che il progettista conosca a quali frecce relative corrispondano, nei casi più sfavorevoli, i limiti di snellezza visti.

Si è pertanto effettuato uno studio parametrico su piastre quadrate, utilizzando un programma per l'analisi non lineare, che assimila il continuo bidimensionale a un graticcio di travi equivalenti.

La validità del procedimento e la taratura dei coefficienti usati, sulla base di confronti con prove sperimentali, sono stati ampiamente illustrati in uno studio precedente (XII).

Lo studio parametrico visto, opportunamente completato e ampliato, consente inoltre il tracciamento di grafici per la determinazione di retta delle frecce in esercizio.

## 2. IL METODO DEL "GRATICCIO EQUIVALENTE" PER L'ANALISI NON LINEARE DI PIASTRE IN C.A.

Tale metodo è illustrato in dettaglio in (XII) (III).

Vengono qui di seguito riassunte le caratteristiche fondamentali del procedimento, omettendo le sue possibili varianti (XIII).

- La piastra in esame viene suddivisa idealmente in 2 serie di strisce ortogonali parallele ai lati (Fig.1).
- Si suppone che ogni striscia si comporti come una trave (tenendo però conto dell'effetto di Poisson).
- Il "graticcio" risultante viene calcolato mediante un programma non lineare incrementale, che tiene conto della fessurazione delle travi equivalenti, dell'effetto irrigidente del calcestruzzo teso fra le fessure ("Tension Stiffening"), del comportamento plastico dei materiali e, infine, della viscosità del calcestruzzo.

Esaminiamo ora, con maggior dettaglio, alcuni di questi punti.

Per quanto riguarda la fessurazione e il "tension stiffening", essi vengono simulati utilizzando il procedimento illustrato in (II), che viene pertanto esteso alle travi del graticcio equivalente.

La fessurazione viene introdotta quando, in un determinato elemento del graticcio verifica la condizione seguente

$$M_{\text{princ}} > M_{\text{CR}}$$

essendo  $M_{\text{CR}}$  il momento di fessurazione della trave equivalente e  $M_{\text{princ}}$  il momento principale massimo nella piastra equivalente al graticcio in quel punto; si fa infatti l'ipotesi semplificativa che, in tale piastra, le fessure si formino secondo le linee isostatiche. Nel caso particolare di piastre quadrate il momento principale è dato da

$$M_{\text{princ}} = M_X + M_{\text{TX}}$$

essendo  $M_X$  ed  $M_{\text{TX}}$  rispettivamente il momento flettente e torcente agenti nella trave equivalente.

Per quanto riguarda il comportamento elasto-plastico dei materiali, si introduce come già ripetutamente fatto in programmi di questo tipo, il concetto astratto di modulo elastico equivalente del calcestruzzo armato.

$$E_{\text{cor}} = E_{\text{tg}} - (E_{\text{tg}} - E_{\text{pl}}) \left( \frac{M_{\text{princ}}}{M_{\text{yu}}} \right)^n$$

dove è:

$E_{tg}$  = modulo elastico tangente del calcestruzzo

$E_{pl}$  = modulo elastico residuo dell'elemento dopo la plasticizzazione della sezione

$M_{yu}$  = momento di plasticizzazione della sezione della trave equivalente

$n$  = coefficiente empirico derivante da confronti con prove sperimentali (è stato assunto pari a 1.80; vedi (XII)).

Per quanto riguarda la legge di applicazione dei carichi è stato adottato il seguente criterio che simula in modo ragionevole la situazione reale (Fig.2).

- I carichi permanenti e semipermanenti sono stati applicati nei primi 5 passi di carico.

- Nei passi da 6 a 9 è stato simulato il comportamento viscoso, mantenendo costante il carico e ricalcolando ad ogni passo la struttura, utilizzando diagrammi momento-curvatura traslati di una quantità  $K\phi(t_0, t)$  dove  $K$  è la curvatura istantanea,  $\phi(t_0, t)$  il coefficiente di viscosità.

Tali passi corrispondono pertanto non ad un incremento di carico, ma bensì a incrementi costanti di tempo a partire dal tempo di carico  $t_0$  fino a giungere al tempo  $t_{\infty}$  in cui il fenomeno viscoso può essere considerato esaurito. Dettagli sul procedimento di simulazione della viscosità possono essere trovati in (II).

- Nei passi da 10 a 14 è stato applicato il carico variabile  $q$  fino al raggiungimento del carico di esercizio.

L'evoluzione della freccia in mezzera in un caso tipico, in funzione dell'incremento dei carichi e del trascorrere del tempo è rappresentato sulla Fig.3, per diversi valori di  $f_{ck}$ .

### 3. LIMITI DI SNELLEZZA DELLE PIASTRE SECONDO LE NORMATIVE ITALIANE E CEB

Nella tabella 1 sono riportati i limiti di snellezza al di sotto dei quali può essere omessa la verifica dello stato limite di deformazione delle piastre. Sono riportati i limiti relativi alla normativa Italiana e quelli relativi al "Model Code" del CEB.

	PIASTRE APPOGGIATE	PIASTRE INCASTRATE
REG. ITALIANO	$l/h \leq 20$ ( $l \leq 10m$ )	$l/h \leq 26$
MODEL CODE CEB	$l/h \leq 30$ ( $l \leq 5m$ )	$l/h \leq 50$

Tabella 1 - Limiti di snellezza  $l/h$

Come risulta da tale tabella, il Regolamento Italiano ammette l'omissione del calcolo della freccia per piastre fino a 10 m. di luce, mentre il Model Code del CEB limita tale semplificazione a piastre fino a 5 m. di luce (con snellezza limite tuttavia sensibilmente superiore).

La situazione più sfavorevole, per quanto riguarda la freccia relativa  $f/l$ , si verifica per le luci maggiori.

E' vero infatti che, ragionando secondo l'ottica del calcolo lineare, l'incremento della freccia, mantenendo costante la snellezza, è proporzionale alla 4<sup>A</sup> potenza della luce, mentre la rigidezza  $EJ$  lo è alla terza potenza dello spessore) e quindi la freccia relativa  $f/l$  non dovrebbe mutare all'aumentare della luce per un determinato carico totale; d'altra parte però all'aumentare dello spessore aumen

ta proporzionalmente il peso proprio della struttura; pertanto per un determinato carico variabile applicato (e quindi a parità di condizioni di utilizzazione)  $f/l$  aumenta aumentando la luce.

#### 4. STUDIO PARAMETRICO EFFETTUATO

Per quanto detto al paragrafo precedente, e visti gli scopi della presente ricerca, limitati alla verifica dei limiti di snellezza delle normative citate, si è effettuato lo studio parametrico seguente:

- a) Si sono considerate piastre quadrate uniformemente caricate aventi luci di 10 m. e di 5 m., con snellezze  $s$  pari a 20 (in entrambi i casi) a 30 e 50 (solo per  $l = 5$  m.).
- b) Si sono considerate due condizioni di vincolo: piastre appoggiate e incastrate lungo tutto il contorno.
- c) I carichi permanenti e semipermanenti non sono stati assunti come variabili indipendenti, in quanto per ogni caso sono stati calcolati mediante la formula seguente:

$$g = \gamma_m h \cdot 1.20$$

essendo  $h$  lo spessore della piastra,  $\gamma_m (= 25 \text{ kN/m}^3)$  il peso specifico del calcestruzzo armato.

Il coefficiente di maggiorazione 1.20 tiene conto dei carichi permanenti e semipermanenti non facenti parte del peso proprio della struttura.

d) Si sono considerati valori della resistenza caratteristica del calcestruzzo varianti da 15 a 40 MPa, con un unico valore della resistenza snervamento dell'acciaio  $f_{sy} = 400$  MPa

e) Si sono considerati carichi variabili  $q$ , varianti da 0 a 30 kN/mq.

f) La progettazione delle armature è stata effettuata con il metodo elastico, allo stato limite ultimo utilizzando le prescrizioni del Regolamento Italiano (XI).

g) Per ogni caso è stata effettuata un'analisi non lineare evolutiva, adottando la storia di carico descritta precedentemente, simulando le deformazioni viscosse e adottando un valore del coefficiente di viscosità pari a  $\phi = 2.2$ .

Riassumendo, le variabili indipendenti assunte nello studio parametrico effettuato, sono le seguenti:

VARIABILE INDIPENDENTE	N° VALORI CONSIDERATI
Luce piastra	2
Snellezza	4
Carico variabile	7
Resistenza $f_{ck}$	5
Coefficiente $\phi$	1

Tabella 2 - Variabili indipendenti dello studio parametrico.

Sulle figure da 4 a 8 sono stati riportati i diagrammi delle frecce relative in funzione dei carichi variabili per i vari casi che sono stati considerati. La freccia corrispondente a  $q=0$  rappresenta la deformazione dovuta ai carichi permanenti a deformazioni viscosse esaurite.

Si noti che ad ogni punto dei diagrammi citati corrisponde un'analisi non lineare effettuata su uno specifico progetto delle armature; tali curve non rappresentano pertanto l'evoluzione della freccia

al crescere del carico per uno specifico caso <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>.

Per tale motivo esse possono essere utilizzate per una diretta, e assai precisa, determinazione delle frecce in esercizio per piastre quadrate progettate secondo la teoria lineare.

## 5. OSSERVAZIONE SUI RISULTATI OTTENUTI - CONCLUSIONI

I risultati ottenuti relativi a una limitata, ma significativa serie di casi, consentono di affermare che, almeno per quanto riguarda le piastre quadrate in C.A., i limiti di snellezza prescritti dalla normativa Italiana sono ampiamente cautelativi e applicabili quindi in piena sicurezza. Per quanto riguarda i limiti prescritti dal CEB, si sono invece ottenuti, in alcuni casi limite, valori delle frecce che devono essere considerati elevati e non sempre accettabili. Si veda ad esempio il caso di piastra appoggiata con luce  $L = 5$  m., snellezza 30 e  $f_{ck} = 15$  MPa (Fig.7).

Nei casi più sfavorevoli si sono ottenuti i valori massimi della freccia relativa indicata nella tabella seguente:

P I A S T R A	L(m)	L/h	$f/L_{MAX}$	
Appoggiata	10	20	1/783	LIMITI R.I.
Incastrata	10	26	1/1600	
Appoggiata	5	20	1/1138	
Appoggiata	5	30	1/340	LIMITI MODEL CODE
Incastrata	5	50	1/427	CEB

Tabella 3 - Valori massimi delle frecce relative (per  $Q = 30$  kN/m<sup>2</sup>)

Sarebbe quindi possibile e anzi opportuno elevare i limiti del Regolamento Italiano, almeno per le situazioni più comuni e verificabili. L'estensione dello studio effettuato e l'adozione di diagrammi analoghi a quelli riportati permetterebbero inoltre di ottenere direttamente i valori della freccia in esercizio in numerosi casi, evitando così le difficoltà e le incertezze connesse a un calcolo di questo tipo.

Si noti inoltre che i diagrammi presentati si riferiscono a piastre progettate secondo la teoria lineare, come del resto prescritto dal Regolamento Italiano ai fini della validità dei limiti di snellezza visti.

Qualora il progetto delle armature venisse eseguito secondo la teoria della plasticità, il problema della verifica delle frecce in esercizio assumerebbe un'importanza ancora maggiore; sarà oggetto per tanto di uno studio successivo l'approntamento di uno studio parametrico relativo a questo caso.

Si noti da ultimo che, essendo il comportamento non lineare delle strutture in C.A. in esercizio dovuto essenzialmente al fenomeno della fessurazione, tale comportamento si accentua assai rapidamente al diminuire della qualità del calcestruzzo.

<sup>(1)</sup> Quest'ultima situazione è invece rappresentata dai diagrammi di Fig.3

<sup>(2)</sup> Le curve così tracciate possono in alcuni casi (Fig.7,8) assumere un andamento con la convessità verso l'alto (per grandi snellezze e quindi alte percentuali d'armatura)

## 6. BIBLIOGRAFIA

- (I) Cauvin A. - Analisi non lineare di telai piani in C.A. - Giornale del Genio Civile 1978
- (II) Cauvin A. - Lectures 8,9,10 of CEB Course "Non linear analysis and design of R.C. and prestressed structures", CEB Course, Pavia, 1981
- (III) Cauvin A. - Analisi non lineare di graticci piani in Cemento armato - Atti dell'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Pavia, 1982
- (IV) Absi E. - La théorie des equivalences et ses applications à l'étude des ouvrages d'art, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 1982
- (V) Favre R., Jaccoud J.P. - Flèche des structures en béton armé; verification experimentelle d'une méthode de calcul, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1982
- (VI) FIP-CEB - Model Code for Concrete Structures, CEB Bull. N. 124/125
- (VII) ACI Committee 318 - Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-77) ACI, Detroit, 1977
- (VIII) Creazza G., Siviero E. - Approximate Theory for the deformational study of R.C. Bidimensional Continuous: Application to Simply Supported Uniformly Loaded Square Slabs, CEB Commission II Meeting, Pavia, October 1981
- (IX) Johansen K.W. - Yield Line Theory-Cement and Concrete Association, London 1952
- (X) Levi F. - Contrôle des conditions de fissuration et deformation des dalles dimensionnées à l'état limite ultime, CEB Bull. N.50, 1965
- (XI) Norme tecnica per l'esecuzione delle opere in C.A. e C.A.P. D.M.26/3/80
- (XII) Cauvin A. - Non linear analysis of R.C. slabs by an "equivalent grid" method - Rapporto di Ricerca N.113 - Istituto di Scienza e Tecnica, Univ. Pavia - Dic. 1982
- (XIII) CEB Manual - Cracking and deformations, Lausanne, Dec.1982

## 7. RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia il Prof. Giorgio Macchi per i suggerimenti all'origine del presente lavoro e il costante appoggio e il Sig. Ugo Castellotti che ha eseguito le analisi numeriche.

Il presente lavoro è stato parzialmente finanziato con i fondi del C.N.R. e del Ministero della Pubblica Istruzione.

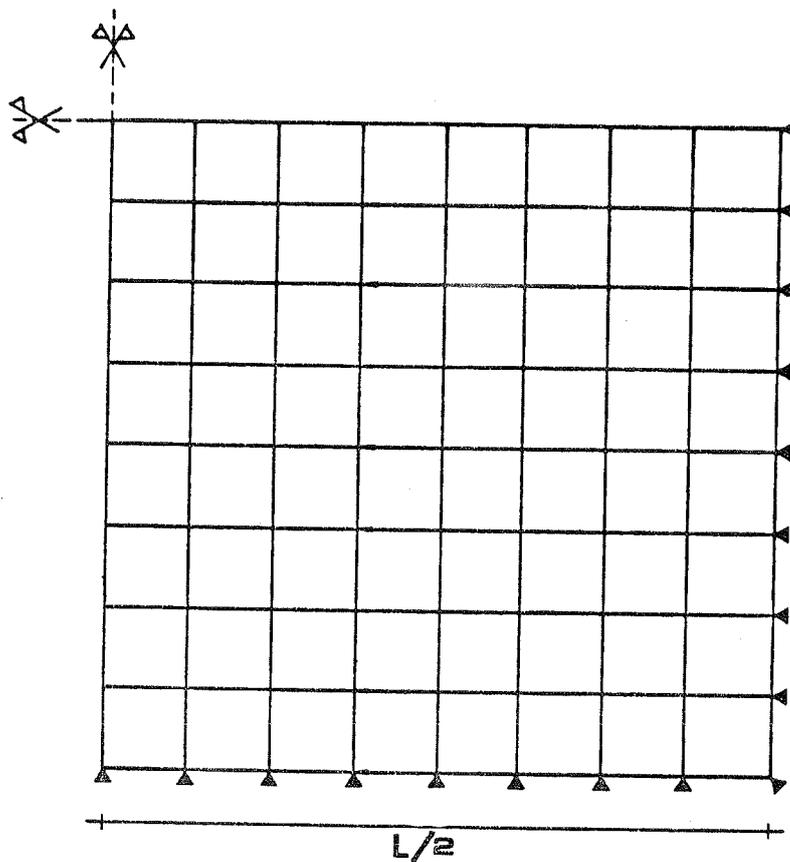


Fig. 1 - Schematizzazione a graticcio

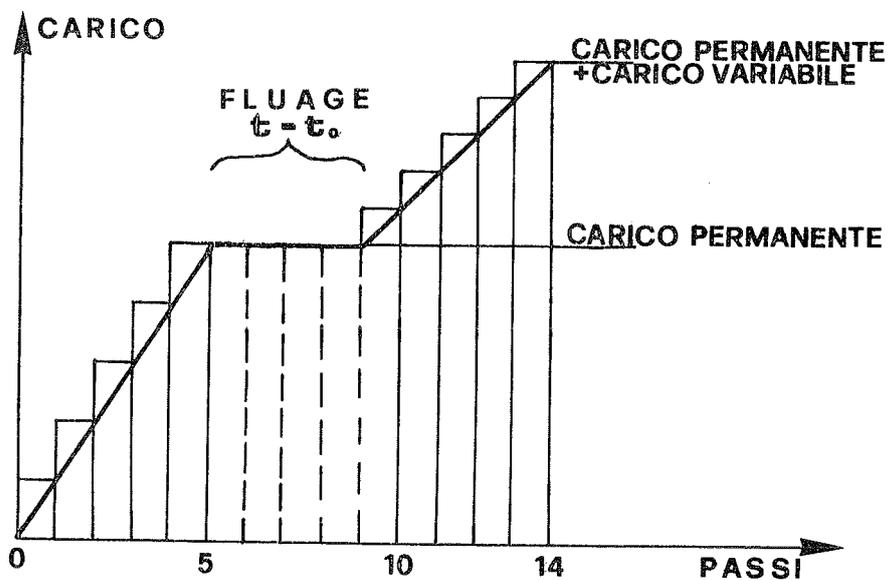


Fig. 2 - Legge di applicazione dei carichi

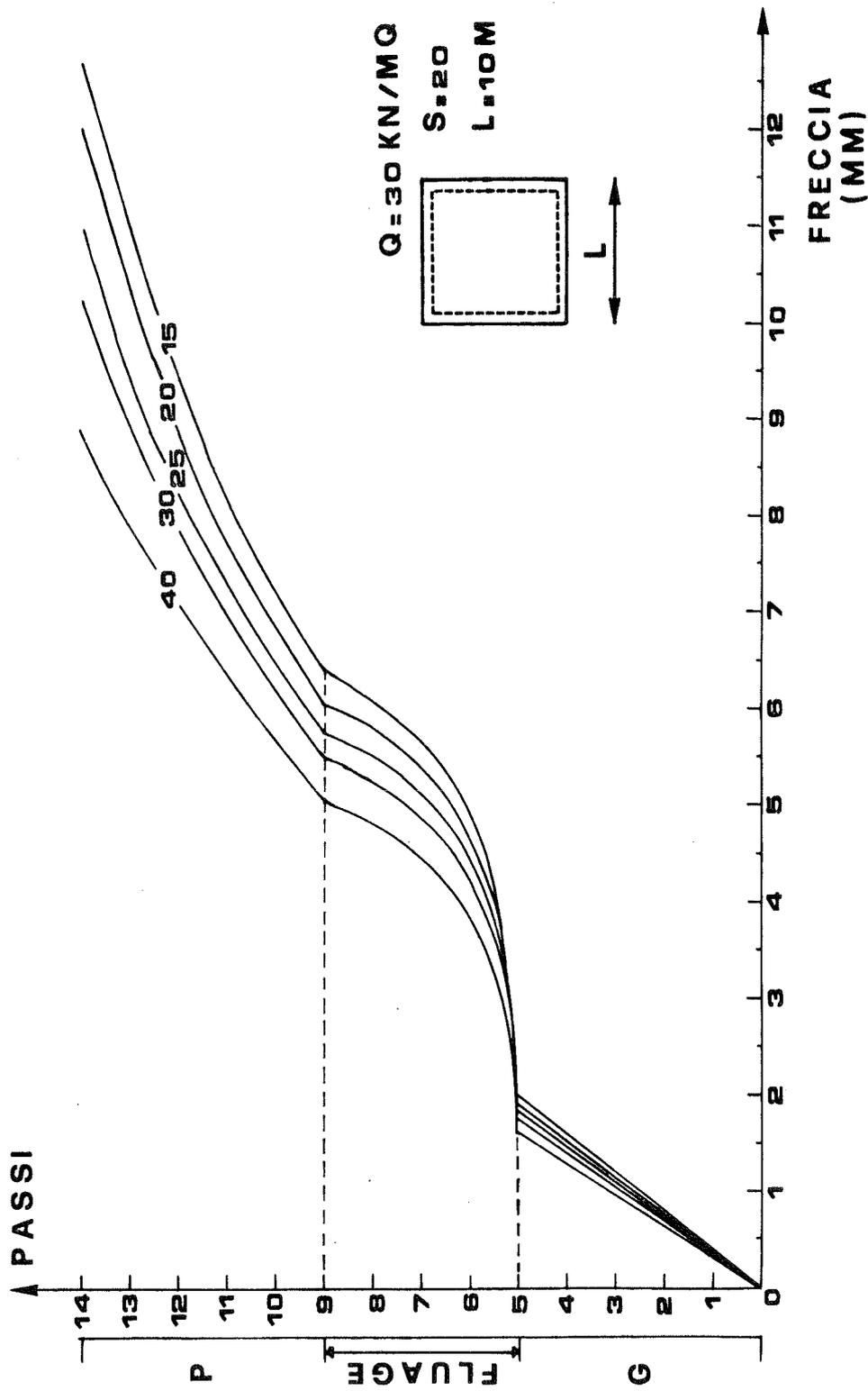


Fig. 3 - Evoluzione della freccia in mezzeria - Piastra appoggiata.  $s = 20$  -  $Q = 30$  kN/mq

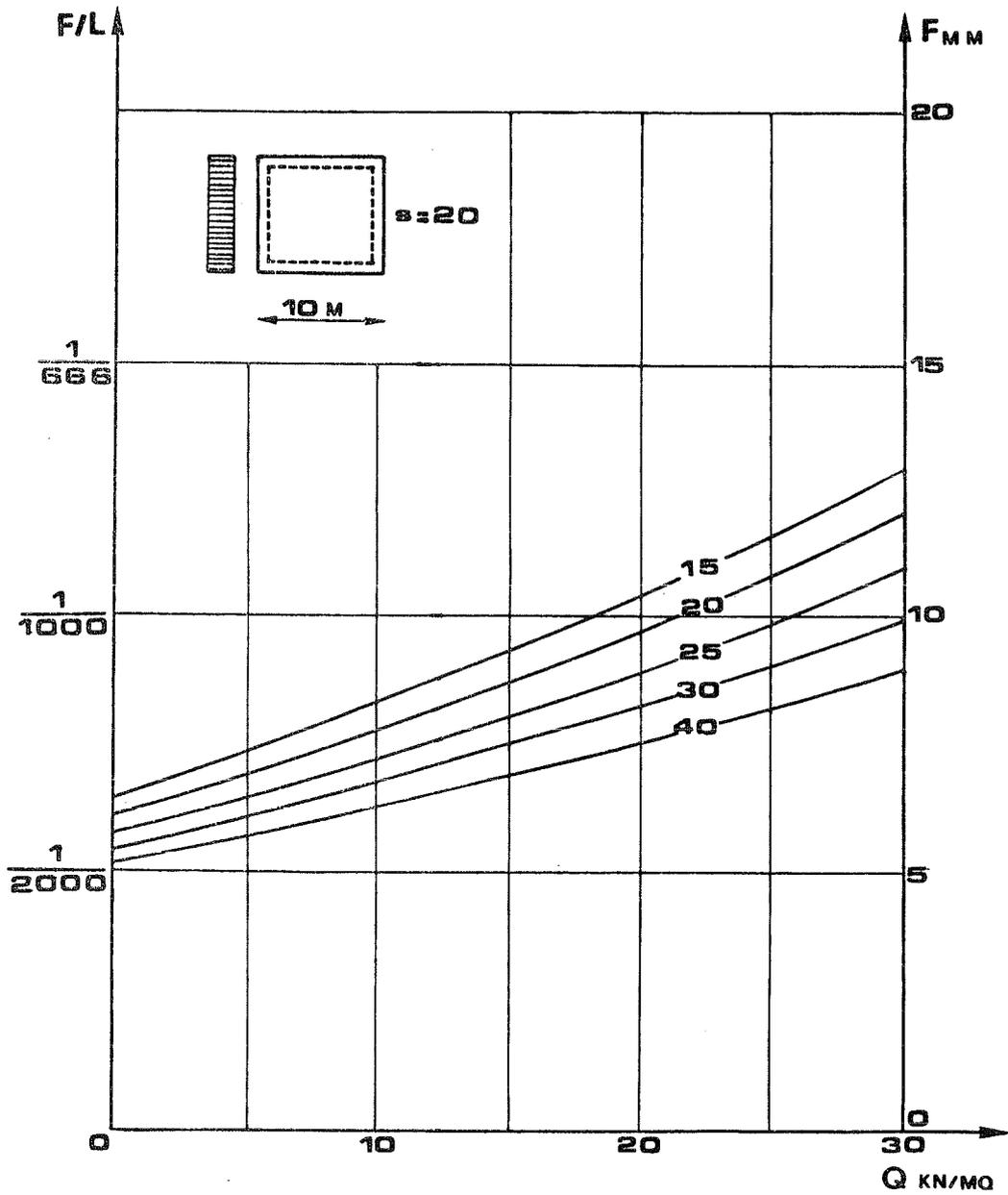


Fig. 4 - Frecche massime a viscosità esaurita; piastre appoggiate;  
 $s = 20$      $L = 10 \text{ m}$ .

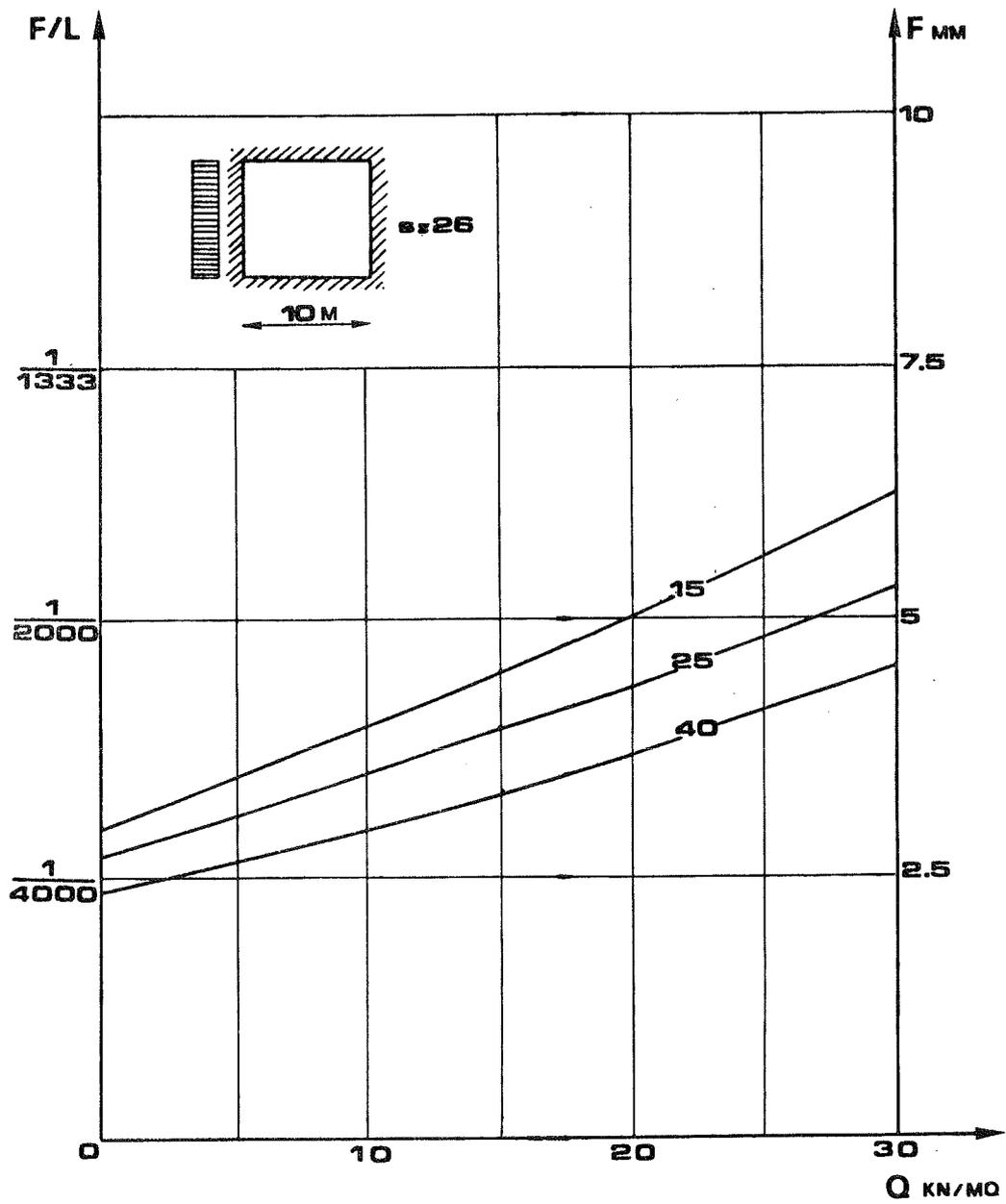


Fig. 5 - Frecche massime; piastra incastrata;  $s = 26$ ;  $L = 10$  m.

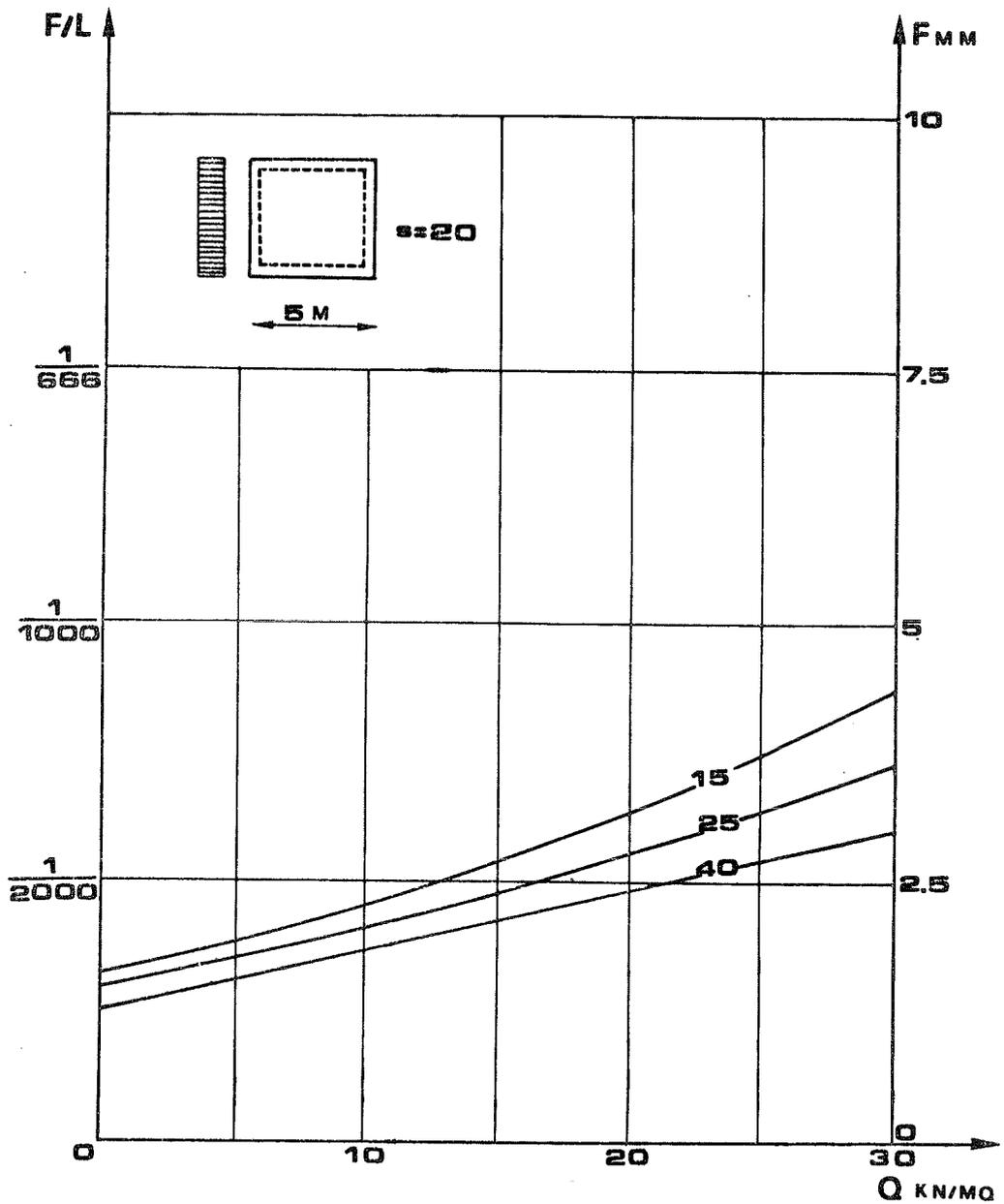


Fig. 6 - Frecche massime; piastre appoggiate;  $s = 20$ ;  $L = 5$  m.

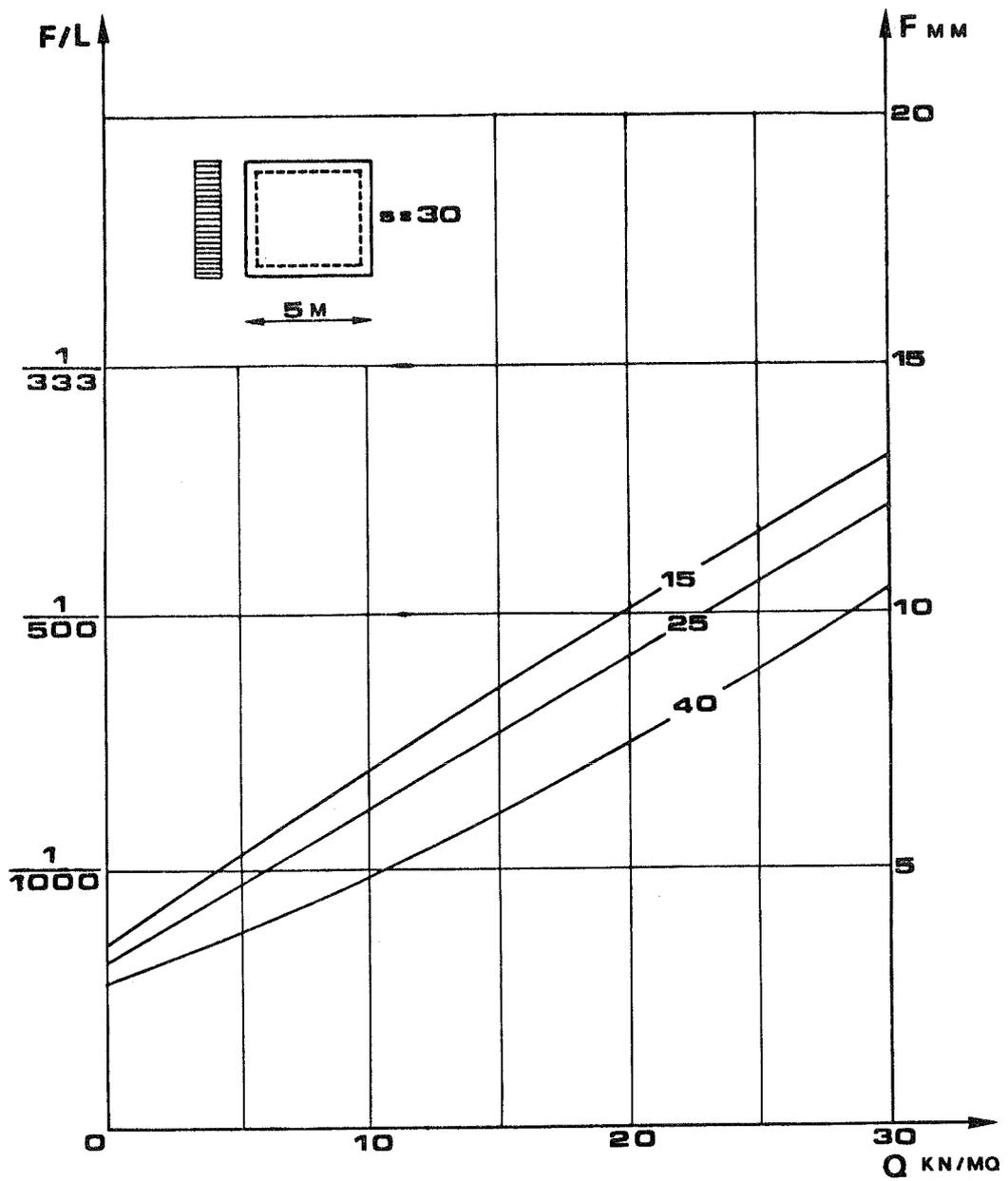


Fig. 7 - Frecche massime; piastra appoggiata;  $s = 30$ ;  $L = 5\text{ m}$ .

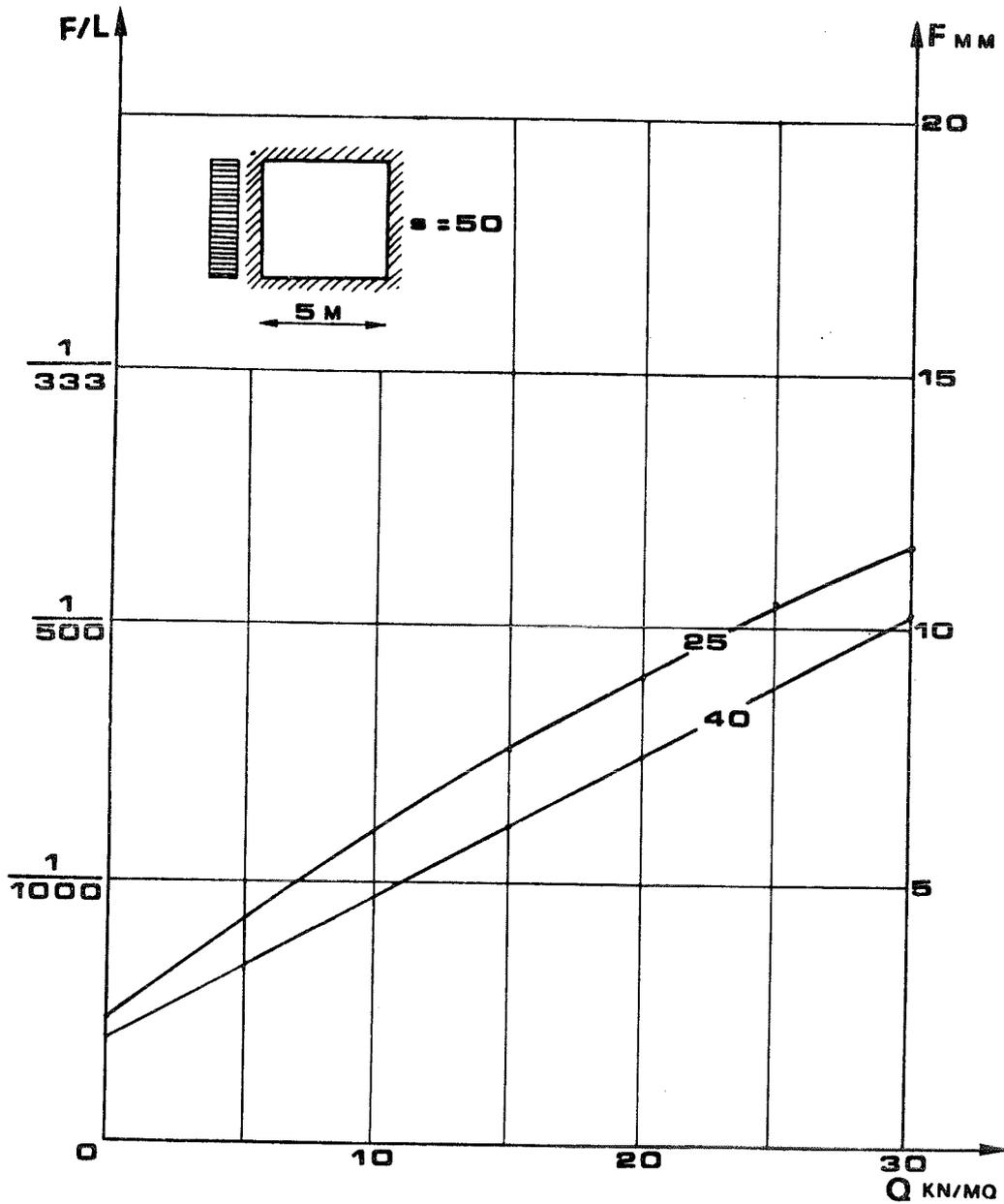


Fig. 8 - Frecce massime; piastre incastrate;  $s = 50$ ;  $L = 5$  m.

INSTABILITA' FLESSOTORSIONALE A COLLASSO  
DI ELEMENTI PREFABBRICATI IN C.A. E C.A.P. (1) A) PROFILO APERTO IN  
PARETE SOTTILE

Gian Michele Cocchi

Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni  
dell'Università di Ancona

SOMMARIO

Viene analizzato il comportamento precritico, postcritico ed a collasso di elementi prefabbricati in parete sottile a profilo aperto in regime non lineare mediante curve caratteristiche carico-spostamento ricavate con un procedimento iterativo incrementale alle differenze finite.

SUMMARY

The author analyses the nonlinear behaviour of precast thin walled elements under prebuckling, postbuckling and collapse loads by means of typical load-displacements curves obtained with an incremental iterative finite difference method.

1. PREMESSA

Nelle costruzioni prefabbricate è frequente l'impiego di elementi in parete sottile, con sezioni aperte, per la realizzazione di impalcati e coperture di edifici civili e industriali. La forma delle sezioni deriva da necessità costruttive, ad esempio per predisporre sulle travi principali l'appoggio delle strutture secondarie e da necessità statiche, per incrementare il rendimento della sezione a parità di peso mediante spessori molto esigui e inerzie elevate. La progettazione di questi elementi comporta lo studio di svariati e complessi fenomeni, alcuni già trattati. Nell'analisi della sicurezza degli elementi in titolo non è possibile prescindere dalla mutua interferenza dei fenomeni di instabilità con quelli relativi al comportamento non lineare del materiale. Infatti in esercizio, ma soprattutto durante il trasporto e il montaggio, l'elemento, soggetto ad azioni elevate e non previste ed in presenza di resistenze del calcestruzzo e grado di vincolo ridotti, può subire un collasso improvviso o deformazioni irreversibili, così come è stato osservato. Si vuole dunque affrontare il problema della previsione del comportamento limitando l'indagine ad elementi di sezione costante. Si vuole evidenziare l'influenza della deformabilità trasversale della sezione e del modo di applicazione dei carichi, poiché durante le fasi transitorie si hanno configurazioni di carico dissimetriche come ad esempio durante il montaggio di elementi secondari su altri a forma di  $\Lambda$  o  $\Gamma$ . Inoltre non può essere trascurata l'influenza dell'armatura longitudinale e della precompressione essendosi notato che questa può essere favorevole o sfavorevole in alcuni casi. In quanto segue si suppone trascurabile l'influenza dei fenomeni viscosi, avendo sup-

(1) Ricerca svolta con il contributo del C.N.R.

posto che la situazione di collasso sia provocata dall'incremento istantaneo dei carichi e che eventuali deformazioni differite non influiscano sul fenomeno dello sbandamento laterale. Quest'ultima ipotesi è verificata sia in esercizio, in quanto l'elemento è spesso vincolato lateralmente da altri formanti impalcato di copertura, sia nelle fasi transitorie, in quanto i carichi agenti non sono di lunga durata.

## 2. ANALISI DEL PROBLEMA

L'analisi statica di elementi in parete sottile è stata affrontata ipotizzando il materiale il-limitatamente elastico lineare, spostamenti infinitesimi, deformazioni di scorrimento tra generatrici e direttrici del profilo trascurabili e parziale o totale indeformabilità trasversale (III). Per le ultime due ipotesi la deformata dell'elemento risulta completamente individuata dalle componenti di spostamento  $v(x), w(x), \varphi(x)$  (fig. 1b) della generica sezione. Per la prima l'energia di deformazione dipende da costanti elasto-geometriche, ma non dal valore dei carichi. Le equazioni differenziali di equilibrio nella configurazione deformata, individuata dalle funzioni spostamento suddette <sup>(2)</sup>, in presenza di un'azione assiale costante  $P$  applicata nel baricentro (fig. 1a) e di azioni flettenti costanti agenti nei piani  $zx$  e  $yx$  risultano (X):

$$E J_y w^{IV}(x) + P w''(x) + (P y_o - M_z) \varphi''(x) = 0$$

$$1) E J_z v^{IV}(x) + P v''(x) - (P z_o - M_y) \varphi''(x) = 0$$

$$B_w \varphi''(x) - \left[ K - \frac{J_z + J_y}{A} P - M_z \beta_z - M_y \beta_y \right] \varphi''(x) + (P y_o - M_z) w''(x) - (P z_o - M_y) v''(x) = 0$$

con le condizioni ai limiti (X) dove per la sezione di ascissa  $x$  si è indicato con  $J_z, J_y$  rispettivamente i momenti d'inerzia baricentrici attorno agli assi  $z$  e  $y$ ,  $A$  l'area,  $B$  la rigidezza di ingobbamento,  $K$  la rigidezza torsionale e con:

$$2) \beta_z = \frac{1}{J_z} \left( \int_A y^3 dA + \int_A z^2 y dA \right) - 2 y_o$$

$$\beta_y = \frac{1}{J_y} \left( \int_A z y^2 dA + \int_A z^3 dA \right) - 2 z_o$$

FIG. 1.

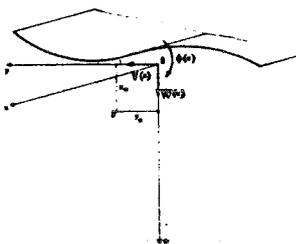
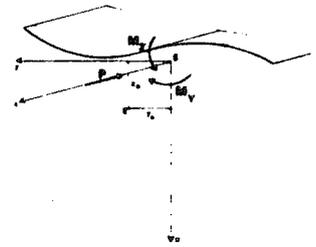
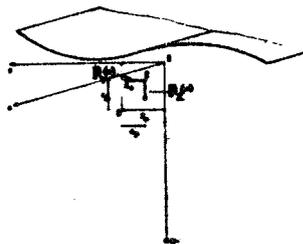


FIG. 1.



Dalle precedenti, sempre soddisfatte dalla soluzione banale relativa alla configurazione indeformata, sono stati ricavati i valori critici di  $P$  o delle azioni  $M_z, M_y$  per le quali esiste una soluzione non banale relativa ad una configurazione deformata poco discosta dalla precedente. Si è osservato che la forma della deformata critica e  $P_{cr}$ , per  $M_z = M_y = 0$ , dipendono dai mutui rapporti fra le rigidezze flessionali, torsionali, di ingobbamento, e dai valori  $z_o, y_o$ , cioè dal grado di simmetria e dalla conformazione del profilo. In particolare quando questo è doppiamente simme-

FIG. 1.



trico, si ha instabilità torsionale o flessionale se le rigidezze torsionali e di ingobbamento sono rispettivamente molto minori o maggiori di quelle flessionali. Nel caso di profilo dissimmetrico si hanno valori critici minori di quelli ottenibili nel caso precedente per l'accoppiamento della torsione con la flessione. Si è osservato che quando  $M_z$  e  $M_y$  sono diversi da zero, con  $P=0$  e la sezione è simmetrica o dissimmetrica, può aversi instabilità per piccoli valori delle azioni flettenti se il valore di una rigidezza flessionale è molto maggiore del valore dell'altra e quando le rigidezze torsionali e d'ingobbamento sono piccole, come accade per le travi alte con sezione rettangolare o a T; mentre se  $EJ_x$  e  $EJ_y$  sono dello stesso ordine di grandezza può aversi

instabilità per valori limitati delle azioni flettenti soltanto se  $K$  e  $B_w$  sono molto piccoli, come accade per le sezioni a croce a L, V etc. Nel caso di valori non piccoli delle rigidezze torsionali e di ingobbamento si hanno elevati momenti critici. Se invece  $P \neq 0, M_z \neq 0, M_y \neq 0$ , come quando l'elemento è sollevato mediante cavi inclinati rispetto all'asse longitudinale, si hanno valori tanto minori di  $P_{cr}$  quanto più il centro di pressione è distante dal centro  $O$  a causa dell'accoppiamento della flessione con la torsione. Quanto precede deve però essere modificato in presenza di componenti di carico  $p_z(x), p_y(x)$  (fig. 1c). Risultata:

$$\begin{aligned}
 & EJ_y w^{IV}(x) + Pw''(x) - M'_z(x)\psi'(x) + [Py_o - M_z(x)]\psi''(x) = p_z(x) \\
 & EJ_z v^{IV}(x) + Pv''(x) - M'_y(x)\psi'(x) + [Pz_o - M_y(x)]\psi''(x) = p_y(x) \\
 3) & B_w \psi''(x) - \left[ K - \frac{J_z + J_y}{A} P - M'_z(x)\beta_z - M'_y(x)\beta_y \right] \psi''(x) - \left[ M'_z(x)\beta_z + M'_y(x)\beta_y \right] \psi'(x) - \\
 & - M'_z(x)w'(x) - M'_y(x)v'(x) - [Py_o - M_z(x)]w''(x) - [Pz_o - M_y(x)]v''(x) = \\
 & = p_z(x)e_y - p_y(x)e_z + p_z(x)e_z\psi(x) + p_y(x)e_y\psi(x)
 \end{aligned}$$

In questo caso per la presenza di  $p_z(x), p_y(x)$  le (3) non sono più soddisfatte da valori nulli delle funzioni spostamento e quindi la generica configurazione di equilibrio è deformata. Questa situazione è tipica delle fasi di montaggio di elementi principali a profilo simmetrico, ma caricati solo da un lato da elementi secondari costituenti impalcato o della fase di esercizio quando i primi sono elementi di bordo e infine quando hanno profili dissimmetrici. Non è possibile quindi applicare il criterio precedente per determinare il carico critico, se non nel caso di profili a T o doppio T di considerevole altezza per i quali, come è noto, si può ricavare il carico critico verticale trascurando l'effetto degli spostamenti  $w(x)$  e supponendo che  $e_x = e_y = 0$  (XIII). Nel caso più generale di profili con dimensioni trasversali dello stesso ordine di grandezza e con  $e_x, e_y \neq 0$  si possono ottenere utili indica-

(2) La componente in direzione  $x$ , trascurando l'effetto dell'azione assiale, risulta:  $u(x, y, z) = -zw'(x) - yv'(x) - \omega(z, y)\psi'(x)$  con  $\omega(z, y)$  coordinata settoriale del generico punto della sezione.

zioni, ad esempio nel caso di vincoli a cerniera alle estremità longitudinali per la flessione nei piani  $zx, yx$  e di incastro per la torsione, sviluppando le funzioni spostamento e carico in serie sinusoidali:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \sin(i\pi x/L) \quad , \quad v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \sin(i\pi x/L) \quad , \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \sin(i\pi x/L)$$

$$4) p_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{zi} \sin(i\pi x/L) \quad , \quad p_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{yi} \sin(i\pi x/L) \quad ,$$

$$M_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M_{zi} \sin(i\pi x/L) \quad , \quad M_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M_{yi} \sin(i\pi x/L) \quad .$$

nelle quali  $p_{zi}, p_{yi}, M_{zi}, M_{yi}$  sono opportuni valori che dipendono dalla distribuzione dei carichi. Dalle precedenti, integrando tra 0 e L, risolvendo, ad esempio per il primo termine della serie si ottiene:

$$w_1 = \frac{1}{P_y - P} (p_{z1} L^2 / \pi^2 + D\varphi_1) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{P_z - P} (p_{y1} L^2 / \pi^2 + B\varphi_1) \quad ,$$

5)

$$\varphi_1 = \frac{L}{\pi} \frac{-2(-p_{z1} e_y + p_{y1} e_z)(P_y - P)(P_z - P) + p_{z1} D(P_z - P) + p_{y1} B(P_y - P)}{(P_y - P)(P_z - P) \left[ \frac{2\pi(J_z + J_y)}{L} (P_z - P) - \frac{\pi}{L} (M_{z1} \beta_z + M_{y1} \beta_y) + \frac{L}{2} C + \frac{\pi}{2L} D^2 (P_z - P) + B^2 (P_y - P) \right]}$$

dove si sono indicati con:

$$6) P_z = \pi^2 EJ_z / L^2, P_y = \pi^2 EJ_y / L^2, P_\varphi = \frac{A}{J_z + J_y} (K - B \pi^2 / L^2), D = -2P y_0 + \pi M_{z1},$$

$$B = -2P z_0 + \pi M_{y1}, C = p_{z1} e_z + p_{y1} e_y,$$

rispettivamente i carichi critici euleriani per sola flessione laterale nei piani  $xz, xy$ , e per sola deformazione torsionale, e coefficienti numerici. Se si pone  $M_{z1} = p_{y1} = 0$ , come quando l'elemento è caricato da sole forze agenti nel piano  $xy$ , risulta:

$$w_1 = \text{idem} \quad , \quad v_1 = \frac{1}{P_y - P} (-2P z_0 \varphi_1) \quad ,$$

7)

$$\varphi_1 = \frac{L}{\pi} \frac{-2p_{z1} e_y (P_z - P) + p_{z1} D(P_z - P)}{(P_z - P) \left[ \frac{2\pi(J_z + J_y)}{L} (P_z - P) - \frac{\pi}{L} M_{z1} \beta_z + L/2 p_{z1} e_z + \frac{\pi}{2L} (-2P z_0)^2 + D^2 \frac{P_z - P}{P_y - P} \right]}$$

mentre se l'azione assiale P ha valore nullo si ha:

$$w_1 = \frac{1}{P_y} (p_{z1} L^2 / \pi^2 + \pi M_{z1} \varphi_1) \quad , \quad v_1 = 0 \quad ,$$

8)

$$\varphi_1 = \frac{(-2p_{z1} e_y + M_{z1}) L^2}{\frac{2\pi(J_z + J_y)}{L} P_z - M_{z1} \beta_z + L^2 / 2 p_{z1} e_z + \pi^3 / (2P_y) M_{z1}^2}$$

I valori  $w_1, v_1, \varphi_1$ , per le (4), sono spostamenti della sezione di mezza-ria dell'elemento. Dalle (8) si nota che questi ultimi si incrementano al variare del carico e tendono a diventare infinitamente grandi se:

$$9) \pi^3 M_{z1}^2 / 2 - \pi P_y \beta_z M_{z1} + 2\pi P_y \frac{J_z + J_y}{L} P + L^2 p_{z1} e_z P_y / 2 = 0$$

e cioè per il valore critico dell'azione flettente dato da:

$$10) M_{z1cr} = \left[ P_y \beta_z / 2 + \left( P_y^2 - \frac{4\pi^3 P_y}{L} (J_z + J_y) + \pi P_y L^2 p_{z1} e_z \right)^{1/2} \right] / \pi^2$$

La precedente è simile a quella relativa al caso di azione flettente

costante ( $\bar{X}$ ) e quindi si possono estendere le considerazioni sull'influenza delle rigidzze di cui sopra. Occorre notare però che si hanno valori reali di  $M_{z1cr}$  se risulta:

$$11) P_y \beta_z^2 - \frac{4\pi^2 P_\phi}{A} (J_z + J_y) - \pi L^2 p_{z1} e_z \gg 0$$

da cui, in conformità a quanto mostrato nella (XIV) per le travi a doppio T dissimetriche, si nota che gli spostamenti diventano infinitamente grandi quando il carico critico per instabilità puramente torsionale  $P_\phi$  è piccolo rispetto a quello per sola flessione laterale  $P_y$ : questo corrisponde ad una situazione di equilibrio instabile. Se invece risulta  $P_\phi \gg P_y$  gli spostamenti si incrementano in modo finito al variare di  $M_{z1}$  e si ha una situazione di equilibrio stabile. In entrambi i casi può aversi collasso per rottura per effetto di spostamenti elevati, ma nel primo, per  $M_{z1}$  prossimo a  $M_{z1cr}$  il collasso può avvenire in modo improvviso. L'effetto del punto di applicazione del carico, rappresentato dall'ultimo termine della (11), tanto più marcato quanto più elevata è la luce dell'elemento e la distanza dal centro di taglio  $e_z$ , per un piccolo valore del carico critico  $P_\phi$ , è quello di provocare una situazione di equilibrio stabile o instabile a seconda del segno di  $e_z$ , a conferma di quanto mostrato nella (XIV) per le travi a doppio T dissimetriche. Le azioni torcenti, dovute a valori non nulli di  $e_z$ , non hanno influenza sulla 'natura dell'equilibrio' poichè i termini ad esse relativi di cui alle (3) non compaiono nelle (11) ma, per le (8), possono incrementare gli spostamenti per uguali valori di  $p_{z1}$ , provocando un collasso anticipato dell'elemento. Per la (7) l'azione assiale  $P$  può provocare spostamenti infinitamente grandi quando  $P = P_o$  o  $P = P_y$  in presenza di piccoli valori delle azioni flettenti, oppure quando  $P < P_o$  o  $P < P_y$  se risulta:

$$12) (P_y - P)(P_z - P)(P_\phi - P) \frac{2\pi(J_z + J_y)}{A L} + \frac{2\pi}{L} P_z^2 (P_y - P) + (P_z - P) \left( -\frac{\pi}{L} M_{z1} \beta_z + L p_{z1} e_z / 2 \right) (P_y - P) + \frac{\pi}{2L} (-2P y_o + M_{z1})^2 (P_z - P) = 0$$

e cioè per il valore critico dell'azione flettente dato da:

$$13) M_{z1cr} = \frac{(P_y - P) \beta_z}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \left[ (P_y - P)^2 \beta_z^2 - 4\pi^2 (P_y - P)(P_\phi - P) \frac{J_z + J_y}{A} - \pi L^2 (P_y - P) p_{z1} \cdot e_z - 4\pi^2 P^2 \left[ \left( z_o \frac{P_y - P}{P - P} + y_o \right)^2 \right] \right]^{1/2}$$

che risulta reale se:

$$14) \left( \frac{P_y}{P} - 1 \right) \beta_z^2 - 4\pi^2 \left( \frac{P_\phi}{P} - 1 \right) \frac{J_z + J_y}{A} + \frac{\pi L^2}{P} p_{z1} e_z - 4\pi^2 \left[ \frac{z_o^2}{\frac{P_z}{P} - 1} + \frac{y_o^2}{\frac{P_y}{P} - 1} \right] \gg 0$$

per  $P_y > P > 0$ .

Si ha dunque instabilità in relazione al valore e al segno dei vari termini che compaiono nella precedente. In particolare l'ultimo termine, relativo all'effetto delle azioni flettenti dovute all'eccentricità di  $P$  da 0, è positivo per  $P < P_o$  e  $P < P_y$  ed è tanto maggiore quanto maggiore è la eccentricità e quanto più  $P$  si avvicina a  $P_o$  o a  $P_y$ . L'effetto del punto di applicazione del carico risulta tanto più elevato quanto più piccolo è il valore di  $P$ . Si può dunque affermare che per valori di  $P$  minori di  $P_o$  o  $P_y$ , e dello stesso ordine di grandezza, si ha instabilità come nel caso della (11), ma con  $M_{z1}$  inferiore, a parità di condizioni, se

$P > P_0$  e  $z_0, y_0$  sono piccole in rapporto ai raggi giratori d'inerzia lungo  $z$  e  $y$ . Nel caso di  $P_0$  elevato si ha invece un comportamento stabile per  $P < P_0$  e  $P < P_0$  sia per piccoli sia per grandi valori di  $z$  e  $y$ . L'azione  $P^z$  è dunque instabilizzante quando le rigidezze torsionali e di ingobbamento sono piccole e quanto più  $P$  è prossima a  $P_0$  o  $P_0^z$ ; in caso contrario si hanno azioni flessionali in aggiunta a quelle dovute ai carichi  $p_{y1}, p_{z1}$  tanto più elevate quanto più la sezione è dissimmetrica. Le considerazioni suddette sono valide nei limiti delle ipotesi fatte e nel caso che sia la distribuzione di carico, sia le funzioni spostamento siano rappresentabili con le (4) essendo  $i=1$ , come può ipotizzarsi nel caso di simmetria geometrica e di carico rispetto alla mezzeria. Non si hanno sostanziali variazioni di comportamento in presenza di precompressione a cavi aderenti. È stato dimostrato infatti che la precompressione ha un benefico effetto irrigidente alla torsione quando i cavi sono distribuiti nella sezione, mentre può aversi pericolo di instabilità torsionale in presenza di un solo cavo baricentrico, quando il rapporto fra le rigidezze torsionali e di ingobbamento e le rigidezze flessionali è piccolo, in accordo con quanto precedentemente esposto. Lo effetto combinato della precompressione e dei carichi può essere evidenziato, nel caso di un solo cavo o se si considera un cavo risultante, tenendo conto nell'ultima delle (3), del contributo torcente ad esso relativo, essendo nullo il contributo tagliante nelle altre due. Questo risulta dato dallo stesso termine di cui alla (3), se si assume al posto della rigidezza torsionale effettiva quella fittizia:

$$15) K^* = K - \left( \frac{J_z + J_y}{A} + e_z^* \beta_y^* + e_y^* \beta_z^* - e_z^{*2} - e_y^{*2} \right) N_p$$

avendo indicato con  $e_z^*, e_y^*$ , rispettivamente l'eccentricità del cavo rispetto al baricentro lungo  $z$  e  $y$ ,  $N_p$  l'azione di precompressione e:

$$16) \beta_y^* = \frac{1}{J_y} \left[ \int_A z^3 dA + \int_A zy^2 dA \right] = \beta_y + 2y_0, \quad \beta_z^* = \frac{1}{J_z} \left[ \int_A y^3 dA + \int_A z^2 y dA \right] = \beta_z + 2z_0$$

Le (7) possono fornire quindi i valori degli spostamenti anche in presenza di precompressione e carichi trasversali se si sostituisce l'effettiva rigidezza torsionale con quella fittizia. L'effetto della precompressione è dunque quello di incrementare o diminuire la rigidezza torsionale effettiva in rapporto ai valori delle eccentricità del cavo, della forma del profilo e di  $N_p$ . In particolare nel caso di cavo baricentrico la rigidezza torsionale  $K^*$  risulta tanto minore di  $K$  quanto maggiore è l'azione di precompressione e i raggi giratori d'inerzia lungo  $z, y$  e cioè quanto più le inerzie sono elevate e la sezione è dissimmetrica, mentre nel caso di cavo non baricentrico è tanto maggiore di  $K$  quanto più la sezione è simmetrica e quanto maggiore è l'eccentricità del cavo dal baricentro. Si è così evidenziato come la forma del profilo e i rapporti fra i valori delle rigidezze flessionali, torsionali e di ingobbamento influenzino il comportamento in presenza di fenomeni di instabilità. Tuttavia occorre notare che l'ipotesi di sezioni trasversalmente indeformabili è realistica solo in presenza di diaframmi rigidi e ravvicinati, difficilmente realizzabili in pratica. In base a questa le deformazioni relative a variazioni di spostamento lungo  $z$  e  $y$ , eccetto quelle longitudinali, sono nulle e quindi i fenomeni di instabilità sono schematizzati secondo canali di deformazione preordinati e non sempre realistici e inoltre si trascura l'influenza di alcune com-

ponenti di tensione sugli stati di rottura dell'elemento. Alcuni autori ( $\overline{XV}$ ) hanno mostrato, per profili del tipo  $a\pi$ , che a seguito delle distorsioni trasversali dovute alla deformabilità del profilo, la distribuzione delle azioni flettenti e torcenti è diversa da quella calcolabile nel caso di sezioni rigide e si riscontrano stati tensionali trasversali di entità non trascurabile. Il problema dell'analisi può essere risolto, in regime elastico lineare, con usuali metodi di discretizzazione alle strisce finite o agli elementi finiti. Tuttavia il comportamento non lineare del calcestruzzo e la fessurazione comporta una ridefinizione iterativa delle matrici di rigidezza dell'elemento discretizzato con inevitabili approssimazioni ed onere computazionale molto gravoso. Si propone quindi un procedimento adatto all'analisi di stabilità fino a collasso degli elementi in titolo in grado di fornire curve caratteristiche carico-spostamento, situazione deformativa e tensionale, in presenza dei fenomeni suddetti.

### 3. METODO PROPOSTO

Lo spostamento del generico punto sia individuato dalle componenti  $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$  secondo gli assi di fig. 1, funzioni del valore dei carichi. Si hanno le note relazioni:

$$\begin{aligned} \lambda(x,y,z) + \mu(x,y,z) \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x} + \mu(x,y,z) \Delta u(x,y,z) + X(x,y,z) &= 0 \\ 17) \lambda(x,y,z) + \mu(x,y,z) \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial y} + \mu(x,y,z) \Delta v(x,y,z) + Y(x,y,z) &= 0 \\ \lambda(x,y,z) + \mu(x,y,z) \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z} + \mu(x,y,z) \Delta w(x,y,z) + Z(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

nelle quali si è indicato con  $X, Y, Z$ , le componenti delle azioni per unità di volume e con:

$$18) \theta(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z}, \quad \Delta(\ ) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

degli operatori matematici, con  $\lambda(x,y,z)$  e  $\mu(x,y,z)$  dei coefficienti di elasticità, funzioni del modulo elastico  $E$  e del modulo di Poisson tramite le relazioni:

$$19) \lambda(x,y,z) = \frac{E(x,y,z) \nu(x,y,z)}{[1+\nu(x,y,z)][1-2\nu(x,y,z)]}, \quad \mu(x,y,z) = \frac{E(x,y,z)}{2[1+\nu(x,y,z)]}$$

Le (17) derivano, come è noto, dalle equazioni indefinite di equilibrio dell'elementino infinitesimo di volume e dal legame costitutivo del materiale, avendo supposto che siano trascurabili i valori delle derivate parziali di  $\lambda$  e  $\mu$  rispetto a  $x, y, z$ . La formulazione precedente, tipica del metodo degli spostamenti, è applicabile all'analisi dei fenomeni già accennati se si schematizza il comportamento del calcestruzzo come quello di un materiale isotropo, non omogeneo, e se si suppone che pur in presenza di spostamenti elevati, come quelli a collasso, le deformazioni siano comunque piccole. La soluzione del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali a coefficienti variabili (17), tenendo conto delle condizioni al contorno relative agli spostamenti sul bordo, non è agevole per via analitica sia per le discontinuità delle funzioni di carico sia perchè i coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  dipendono dallo stato tensionale per la non linearità del legame costitutivo del calcestruzzo. Si può convenientemente utilizzare il metodo alle differenze finite estenden-

do il procedimento numerico di cui alla (VIII). Sull'elemento viene individuato un reticolo spaziale mediante una serie di linee ortogonali poste ad interasse variabile  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , lungo lo sviluppo del profilo trasversale (fig. 2a) e  $\Delta x$  costante lungo lo sviluppo longitudinale (fig. 2b). Il reticolo trasversale è identico per tutte le sezioni poste ad interasse  $\Delta x$  e conformato in modo tale che il bordo del profilo contenga i punti di intersezione delle linee del bordo del reticolo. Con tale suddivisione, ad interasse variabile in senso trasversale, si possono facilmente discretizzare sezioni di forma qualsiasi e si può infittire la maglia del reticolo nelle zone dove è prevedibile una più elevata concentrazione di sforzi e dove si vuole ottenere una migliore valutazione degli spostamenti e delle deformazioni. Le (17) vengono ridotte in forma alle differenze finite nei punti di intersezione delle linee suddette ricavando opportune espressioni delle derivate parziali delle grandezze che vi compaiono. Ad esempio per alcune derivate parziali di  $u(x, y, z)$  nel generico punto  $i, j$  si ha:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta z \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta z}{\Delta z_1}\right)} \left[ -u(i, k_1) - (\Delta z^2 / \Delta z_1^2 - 1)u(i, j) + \Delta z^2 / \Delta z_1^2 u(i, k_2) \right]$$

$$20) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta x} \left[ -u(i-1, j) + u(i+1, j) \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{2}{\Delta y \Delta y_1 (1 + \Delta y / \Delta y_1)} \left[ u(i, j_1) - (\Delta y / \Delta y_1 + 1)u(i, j) + \Delta y / \Delta y_1 u(i, j_2) \right]$$

avendo indicato (fig. 3) con  $\Delta y, \Delta y_1, \Delta z, \Delta z_1$  le dimensioni della maglia a destra e a sinistra del generico punto  $i, j$ , rispettivamente in direzione  $y$  e  $z$ , con  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, j_1, j_2$  gli indici relativi ai punti limitrofi del punto  $i, j$ , con  $i$  l'indice della generica sezione. Le (20) e le analoghe derivate parziali delle funzioni  $v$  e  $w$  tengono conto della variabilità delle dimensioni della maglia e allo stesso tempo permettono di ottenere valori numerici con limitati errori, per la presenza di un numero di termini maggiore di quelli usualmente adottati, di modo che la precisione del procedimento adottato, più avanti esposto, sia accettabile per l'analisi. Gli indici dei punti limitrofi a quello generico  $i, j$  possono essere facilmente individuati, e in modo automatico, mediante la costruzione di una matrice topologica  $T$ , uguale per tutte le sezioni, tale che i termini della generica riga  $j$ , corrispondenti al generico punto  $j$ , siano ordinatamente uguali agli indici dei punti a destra, sinistra, inferiori, superiori del

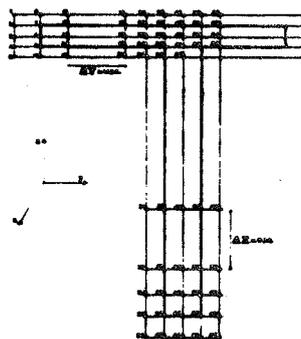


FIG. 2 .

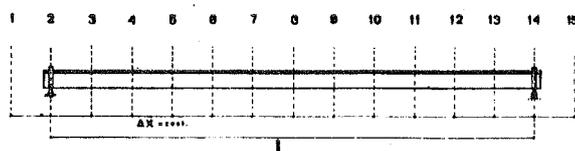


FIG. 2 .

punto suddetto. Poichè dunque la posizione di ciascun punto del reticolo viene individuata dall'indice  $i$  della sezione, uguale per tutti i punti della stessa, dall'indice  $j$  e dai termini di  $T$ , si può effettuare una numerazione dei punti del tutto arbitraria e indipendente dalla

FIG.4

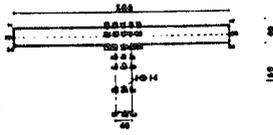
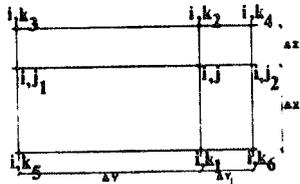


FIG.3



forma della sezione: questo facilita notevolmente l'operazione di discretizzazione anche per forme complesse. Le (17), espresse in forma alle differenze finite tramite le (20) ed altre simili espressioni delle derivate, tralasciate per brevità, si trasformano in un sistema di equazioni algebriche non lineari negli spostamenti incogniti  $u(i, j), v(i, j), w(i, j)$  del generico punto supponendo per i casi in esame che sia  $X(x, y, z) = Y(x, y, z) = 0$ . Affinchè il precedente sistema contenga le equazioni dei punti sui bordi occorre definire gli spostamenti di punti fittizi all'esterno di questi (fig. 2a) tramite le condizioni al contorno in termini di spostamenti, per i bordi paralleli all'asse  $y$ :

$$\lambda(x, y, z)\theta(x, y, z) + 2\mu(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial z} = +p_z(x, y, z)$$

$$21) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = +p_x(x, y, z)/\mu(x, y, z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = +p_y(x, y, z)/\mu(x, y, z)$$

e per i bordi paralleli all'asse  $z$ :

$$\lambda(x, y, z)\theta(x, y, z) + 2\mu(x, y, z)\frac{\partial v}{\partial y} = +p_y(x, y, z)$$

$$22) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = +p_z(x, y, z)/\mu(x, y, z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = +p_x(x, y, z)/\mu(x, y, z)$$

essendo  $p_z, p_y, p_x$  le componenti dei carichi superficiali lungo gli assi nel generico punto, da considerarsi positive o negative in relazione alla posizione dei bordi e alle convenzioni di segno. Le precedenti vengono espresse in forma alle differenze finite e da queste risultano definiti gli spostamenti dei punti fittizi. Analogamente affinché il sistema contenga le equazioni dei punti delle sezioni di estremità occorre definire gli spostamenti di punti di sezioni fittizie all'esterno dell'elemento (fig. 2b). Se ad esempio sono presenti vincoli a cerniera per la flessione nei piani  $zx, yx$  e di incastro per la torsione e diaframmi rigidi nel piano verticale ed infinitamente flessibili in direzione normale a detto piano, risulta:

$$w(0, y, z) = v(0, y, z) = w(L, y, z) = v(L, y, z) = 0, \sigma_x(0, y, z) = \sigma_x(L, y, z) = 0$$

$$23) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=L} = \left(\frac{\partial v}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0$$

ed in forma alle differenze finite, per le (20), tenendo presente che per le precedenti sono nulle le derivate di  $w$  e  $v$  rispetto a  $y$  e  $z$ , per  $x=0$  e  $x=L$ , si ha ( $j=1 \dots m$ )

$$24) \begin{cases} w(2, j) = w(n, j) = v(2, j) = v(n, j) = 0, & u(1, j) = u(3, j), & w(1, j) = -w(3, j), \\ u(n, j) = u(n-2, j), & w(n, j) = -w(n-2, j), & v(1, j) = -v(3, j), & v(n, j) = -v(n-2, j) \end{cases}$$

essendo  $m$  il numero totale di punti di ogni sezione ed  $n$  il numero di

sezioni. I valori degli spostamenti dei punti esterni in corrispondenza degli angoli del reticolo possono essere determinati mediante interpolazione lineare fra quelli dei punti limitrofi. Se ad esempio il punto  $i, j$  (fig. 3) è un punto coincidente con uno spigolo della sezione per il punto esterno  $i, k_3$  si ha:

$$25) \begin{aligned} v(i, k_3) &= v(i, k_2) + v(i, j_1) - v(i, j); & w(i, k_3) &= w(i, k_2) + w(i, k_1) - w(i, j); \\ u(i, k_3) &= u(i, k_2) + u(i, k_1) - u(i, j) \end{aligned}$$

Occorre notare che, poichè i valori di  $\lambda(i, j)$  e  $\mu(i, j)$  dipendono, tramite le (19) dalle tensioni e quindi dagli spostamenti incogniti, il sistema precedente può essere risolto solo per via iterativa. Inoltre poichè le (21) e (22) esprimono l'eguaglianza fra le componenti di tensione sui bordi e le componenti dei carichi, in corrispondenza dei punti del reticolo, è necessario ricondurre l'effettiva distribuzione di carico ad uno schema equivalente di forze concentrate nei punti  $i, j$  per tenere in conto l'effetto delle zone di carico fra le linee del reticolo. Questo tipo di schematizzazione comporta errori che si sommano a quelli delle espressioni alle differenze finite (20), questi ultimi proporzionali, come è noto, al cubo degli intervalli di suddivisione e alle derivate degli spostamenti di ordine elevato. Le soluzioni fornite dal presente metodo sono quindi tanto più realistiche quanto più il reticolo di suddivisione è fitto ed in presenza di variazioni delle funzioni spostamento non troppo elevate da un punto all'altro del reticolo. Poichè la risoluzione del sistema, formato di solito da un grande numero di equazioni, comporta problemi di memorizzazione anche per elaboratori di grandi dimensioni, si può adottare utilmente un procedimento iterativo incrementale del tipo di quello della (VIII), facilmente programmabile a cui necessita un numero limitato di spazi di memoria. Nel caso in esame il suddetto procedimento consiste nei seguenti passi fondamentali:

a) vengono calcolati gli spostamenti nei vari punti del reticolo assumendo valori iniziali dei carichi sufficientemente piccoli, tali da poter ipotizzare un comportamento elastico lineare per il materiale. I valori di  $\lambda$  e  $\mu$  si ricavano dalla (19) essendo  $E$  e  $\nu$  i valori elastici caratteristici all'origine. Gli spostamenti vengono calcolati con le equazioni alle differenze finite applicate iterativamente in ogni punto  $i, j$  fino ad ottenere valori poco discosti fra loro in due passi iterativi successivi;

b) in base a questi ultimi valori degli spostamenti si calcolano le deformazioni e le tensioni in ogni punto  $i, j$  tramite le relazioni di congruenza in forma alle differenze finite. Si calcolano i valori attuali di  $\lambda(i, j)$ ,  $\mu(i, j)$  con le (19) valutando  $E$  e  $\nu$  mediante le espressioni del legame costitutivo del calcestruzzo in funzione delle tensioni e deformazioni ottaedrali ( $\mathbb{I}$ ):

$$26) E = \frac{9G_s K_s}{3K_s + G_s}, \quad \nu = \frac{3K_s - 2G_s}{3K_s + G_s}$$

Si ripercorre quindi il passo a) con i valori  $\lambda(i, j)$ ,  $\mu(i, j)$  suddetti per un ulteriore incremento di carico, o di spostamento, e si procede poi come al punto b) <sub>(3)</sub> fino a quando si raggiunge la rottura in qualche punto dell'elemento. Si ottengono valori degli spostamenti tanto più reali-

stici quanto più piccoli sono gli incrementi di carico, poichè le caratteristiche elastiche di cui alla (19) corrispondono allo stato tensionale del passo iterativo precedente; piccoli incrementi di carico sono opportuni anche per rispettare le ipotesi di invariabilità delle derivate di  $\lambda$  e  $\mu$  rispetto a  $x, y, z$ , fatte precedentemente.

E' possibile poi tener conto dell'armatura longitudinale infittendo il reticolo nella zona armata e facendo coincidere i punti di questo con le barre d'armatura. I valori di cui alle (26) possono essere calcolati in funzione delle tensioni sia mediante un legame costitutivo dell'acciaio di tipo monoassiale sia mediante legami costitutivi più aderenti alla realtà che tengano conto dell'interazione calcestruzzo-armatura in fase fessurata. Con il procedimento proposto si trascura in prima approssimazione l'influenza di eventuale staffatura trasversale nella sezione in quanto tale influenza è particolarmente marcata solo in prossimità delle sezioni di estremità dell'elemento. L'effetto delle azioni di precompressione, supposte con buona approssimazione preesistenti all'applicazione dei carichi e calcolabile in regime elastico lineare, è tenuto in conto mediante sovrapposizione dello stato tensionale dovuto a queste con quello calcolato nella fase b. Si possono quindi individuare le curve caratteristiche carico-spostamento fino a collasso in presenza di fenomeni di instabilità senza alcuna ipotesi limitativa sulla distribuzione degli spostamenti e sul comportamento del materiale. Le equazioni in forma alle differenze finite, di equilibrio dell'elemento di volume nella configurazione deformata, sono valide per qualsiasi valore degli spostamenti se le deformazioni sono piccole mentre le (21) e (22) sono valide se gli spostamenti non alterano l'orientamento delle facce dell'elemento di volume in prossimità della superficie, come senz'altro può supporre nei casi in esame. Il legame costitutivo di cui alle (26) e (19) permette poi di calcolare i valori totali delle tensioni in funzione dei valori totali delle deformazioni, per qualsiasi valore del carico, mentre il particolare metodo di discretizzazione adottato permette di tener conto di un gran numero di gradi di libertà e quindi di 'canali' di deformazione connessi ai fenomeni di instabilità flessotorsionale. Poichè però gli infiniti gradi di libertà della struttura reale vengono ricondotti ad un numero finito, uguale a quello dei nodi del reticolo adottato, i possibili canali di deformazione che individuano, come è noto, il passaggio da una configurazione di equilibrio ad un'altra, sono tanto più realistici quanto più numerosi sono i punti e cioè le componenti di spostamento. Per poter analizzare il comportamento dell'elemento si considera una sola curva caratteristica carico-spostamento, una volta note quelle relative ai vari punti  $i, j$ , adottando il parametro di spostamento globale:

$$27) \eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}^x u(i,j) + \alpha_{i,j}^y v(i,j) + \alpha_{i,j}^z w(i,j)$$

ed il parametro di carico globale tale che:

$$28) \alpha_{i,j}^x = p_x(i,j)/P, \quad \alpha_{i,j}^y = p_y(i,j)/P, \quad \alpha_{i,j}^z = p_z(i,j)/P$$

(3) Ad esempio si può adottare il criterio di rottura di Mills e Zimmerman in termini di tensioni ottaedrali calcolabili in base alle tensioni totali dell'iesimo incremento di carico ( $\mu$ ).

espressioni ricavate dall'eguaglianza fra il lavoro  $P\eta$  e quello delle componenti dei carichi superficiali per le corrispondenti componenti di spostamento. Le precedenti sono valide se i carichi vengono incrementati con i loro mutui rapporti inalterati, come si può senz'altro supporre con ottima approssimazione nella situazione reale.

#### 4. INDAGINE NUMERICA

Del procedimento proposto è stato approntato un programma di calcolo per l'elaboratore elettronico<sup>(4)</sup> per l'analisi di elementi con profilo di varia forma, costituito da tratti rettilinei ortogonali<sup>(5)</sup>, con il quale, a scopo esemplificativo, si esamina l'elemento di fig. 4 in c.a. di luce  $L=5,8\text{m}$ , armatura corrente  $1\Phi 14$ , di produzione usuale per la formazione di impalcati di copertura di edifici industriali. Il calcestruzzo, ha le seguenti caratteristiche:  $E_b=2,8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $R_b=2,94 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0,2$ ; mentre l'acciaio:  $E_a=2,06 \cdot 10^{11} \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{yk}=44 \text{ N/mm}^2$ . La generica sezione è discretizzata con il reticolo di suddivisione di fig. 4 del quale, per semplicità, sono indicati solo i punti interni e di bordo e quello relativo al baricentro dell'armatura corrente. Si considerano cinque sezioni longitudinali, comprese quelle fittizie esterne, e le cinque condizioni di carico di tabella 1 formate da forze concentrate nei nodi del reticolo in corrispondenza del bordo superiore dell'ala, relative ai casi di flessione semplice, pressoflessione e flessotorsione nel piano  $zx$ , combinate fra loro.<sup>(6)</sup> Si ottengono le curve carico-spostamento di fig. 5a, b e, per il primo incremento di carico i diagrammi degli spostamenti di fig. 6a, b, c, quelli delle tensioni normali di fig. 7 a, b, c, quelli delle tensioni tangenziali di fig. 7d, e, rispettivamente nelle sezioni di mezzera e di estremità. Si nota che l'andamento delle curve carico-spostamento per le condizioni di carico 1 e 3 è lineare per i primi incrementi di carico, in buon accordo

FIG. 5.

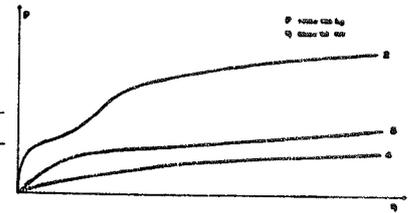
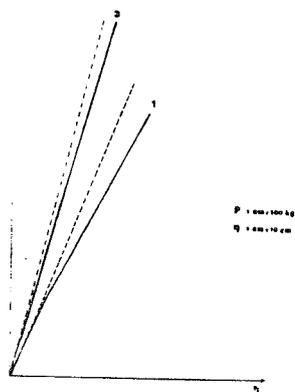


FIG. 5.



con quanto risulta dalla (8). Si osserva però una distribuzione di spostamenti trasversali e longitudinali non uniforme nella sezione per effetto della deformabilità del profilo in direzione  $y$ , mentre, in direzione  $z$ , si ha una distribuzione uniforme e quindi indeformabilità del profilo. All'aumentare del carico insorgono fessurazioni nel calcestruzzo dovute anche al campo di tensioni trasversali e si ha una diminuzione di rigidità globale, come si può osservare dalla variazione di pendenza della curva caratteristica di figura 5a. In questo caso è evidente l'utilità di una appropriata staffatura trasversale, in grado di limitare e ritardare la fessurazione dovuta al

(4) In linguaggio Fortran per calcolatore PDP RT11 Digital disponibile presso l'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni di Ancona.

(5) L'analisi di profili curvilinei o rettilinei non ortogonali è affrontabile con il programma suddetto, in via approssimata con opportuna disposizione del reticolo di suddivisione.

FIG.6.

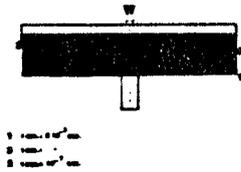


FIG.7.



FIG.6.

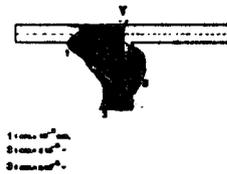


FIG.7.

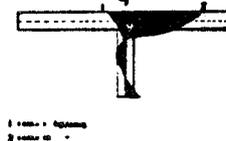


FIG.6.

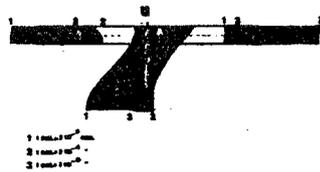


FIG.7.

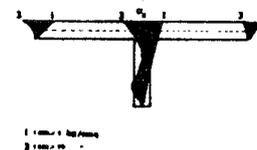


FIG.7.

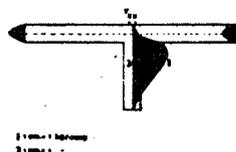
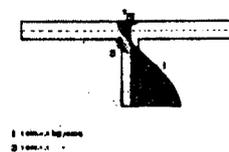


FIG.7.



(6) Poichè le condizioni al contorno di cui alle equazioni (21), (22) non tengono conto di eventuali spostamenti rigidi dei punti di bordo, per alcuna delle condizioni di carico della tabella 1 occorre assegnare i valori di detti spostamenti per il 1° incremento di carico, calcolati in regime elastico con i metodi usuali.

Tabella 1

carico	punto	11	12	13	14	15	16	17
1	$\alpha_{ij}^y$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^z$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^{\phi}$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	$\alpha_{ij}^y$	1	1	1	1	1	1	1
	$\alpha_{ij}^z$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^{\phi}$	0	0	0	0	0	0	0
3	$\alpha_{ij}^y$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^z$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^{\phi}$	-1	-1	-1	-1	0	0	0
4	$\alpha_{ij}^y$	1	1	1	1	1	1	1
	$\alpha_{ij}^z$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^{\phi}$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	$\alpha_{ij}^y$	1	1	1	1	1	1	1
	$\alpha_{ij}^z$	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_{ij}^{\phi}$	-1	-1	-1	-1	0	0	0

al campo di tensioni suddette. Conformemente a quanto osservato per la (10), a causa dell'elevato valore dei carichi critici puramente flessionali e torsionali  $P_y$  e  $P_z$ , essendo  $P_y \gg P_z$ , le configurazioni di equilibrio risultano stabili anche in campo non lineare. Nella condizione di carico 3 (fig. 5a) l'effetto della contemporaneità delle azioni torcenti e flettenti non modifica sostanzialmente la natura delle configurazioni, secondo quanto già osservato, ma si ha una accentuazione della deformazione trasversale del profilo con incremento delle tensioni per valori minori del carico. Poichè in questo caso il collasso può avvenire per un valore del carico inferiore a quello della con-

dizione 1 è a maggior ragione confermata l'utilità di apposita armatura o staffatura trasversale come detto sopra. Nella condizione di carico 2, in presenza di azioni assiali prevalenti su quelle flessionali, si nota un andamento non lineare della curva caratteristica, anche per piccoli incrementi di carico, tipico di un comportamento biforcuto stabile. La presenza delle azioni flettenti provoca scostamenti della curva dall'asse verticale a causa di spostamenti trasversali di entità non trascurabile, assimilabili dunque ad imperfezioni iniziali di tipo geometrico della configurazione di equilibrio o ad eccentricità iniziali dell'azione assiale. Quest'ultima provoca una non linearità precritica, di natura geometrica, tanto maggiore quanto più elevato è l'effetto delle azioni flettenti suddette. Se queste ultime tendono a zero è possibile individuare un punto di biforcazione a cui corrisponde un valore critico di tipo 'euleriano' dell'azione assiale. All'aumentare del carico si notano fessurazioni e rotture del calcestruzzo dovute alle azioni taglianti, a seguito di elevate deformazioni torsionali del profilo che provocano variazioni di rigidità dell'elemento. Per effetto del comportamento non lineare del calcestruzzo si ha dunque un comportamento post-critico instabile di tipo asintotico, riscontrabile anche per le rimanenti condizioni di carico 4 e 5, in modo accentuato, per la presenza di elevati valori delle azioni flettenti e torcenti. In particolare si nota che essendo trascurabile il valore della rigidità torsionale e nulla quella d'ingobbamento, il carico di collasso diminuisce all'aumentare delle suddette azioni e corrisponde al contemporaneo insorgere di fessurazioni e fenomeni di sbandamento laterale, in regime di grandi spostamenti, ed in presenza di elevati valori delle tensioni tangenziali. Occorre notare che per il profilo in esame, essendo  $\beta_z = 0$  ed  $e_z = 0$  per la condizione di carico 4, la (12) non può essere soddisfatta per alcun valore reale di  $P$  e quindi il carico critico 'euleriano' risulta uguale a  $P < P_z < P_{\phi}$ : cioè per  $P < P_z$  dalle (6) e (7) si ottengono valori finiti degli spostamenti e il comportamento risulta stabile, mentre, nella realtà come osservato in precedenza, è di tipo asintotico instabile. Si può dunque affermare dal confronto dei risultati della formulazione in campo elastico lineare con quelli della formulazione in campo non lineare che i fenomeni di non linearità, fessurazione e de-

formazione del profilo possono ridurre la capacità portante dell'elemento in modo tanto più accentuato quanto maggiore è il valore delle azioni flettenti in rapporto a quello dell'azione assiale. Le azioni torcenti, pur non modificando lo stato di equilibrio della generica configurazione deformata, possono ridurre ulteriormente detta capacità portante poichè provocano distorsioni flessotorsionali del profilo con conseguente accentuazione dei fenomeni menzionati. Si è poi analizzato, con il metodo proposto, il comportamento dell'elemento in presenza di azioni di precompressione tali da provocare un campo di tensioni longitudinali costanti nelle sezioni, per le condizioni di carico di tabella 1. Si è notato, anche in questo caso ed in conformità alla (VIII) che per valori limitati della precompressione si ha fessurazione per valori del carico superiori rispetto al caso di elementi in c.a., mentre per valori elevati si hanno rotture locali del calcestruzzo. Non si riscontra invece alcuna influenza sul fenomeno dello sbandamento laterale a causa dell'elevata rigidità flessionale in direzione z e y, al contrario di quanto risulta per le travi a doppio T di piccolo spessore e altezza elevata.

## 5. CONCLUSIONI

E' stato mostrato che il comportamento fino a collasso di elementi prefabbricati in c.a. o c.a.p. a profilo aperto in parete sottile dipende da numerosi fattori quali la forma della sezione, il modo di applicazione dei carichi, l'entità e la distribuzione delle azioni di precompressione, i mutui rapporti fra le rigidità flessionali, torsionali, di ingobbamento. Sono stati confrontati e analizzati i risultati forniti dai metodi in campo elastico lineare con quelli forniti da un procedimento iterativo incrementale alle differenze finite, in campo non lineare, evidenziando inoltre l'influenza di ipotesi semplificative sullo stato deformazionale usualmente adottate, per un caso particolarmente significativo. Si è mostrato che la determinazione degli stati critici e/o ultimi può essere affrontata con gli usuali procedimenti solo in presenza di piccoli valori degli spostamenti della configurazione iniziale, o delle imperfezioni geometriche a questi assimilabili, mentre l'influenza di non linearità geometriche connesse a fenomeni di instabilità o al comportamento del calcestruzzo è determinante in fase precritica e postcritica in presenza di elevate azioni flessionali, torsionali e assiali contemporanee e della stessa entità. Si è notato in ogni caso che si hanno valori elevati dei carichi critici nel caso di elevate rigidità torsionali e di ingobbamento, sezioni trasversalmente indeformabili, forme dei profili e distribuzioni dei carichi di tipo simmetrico. Si è mostrato come questo sia ottenibile con particolari accorgimenti come l'adozione di sezioni adeguate, diaframmi alle estremità ed intermedi rigidi nel loro piano, armature e staffature trasversali, opportuna distribuzione delle azioni di precompressione oppure mediante controventature laterali sia nelle fasi transitorie che in esercizio.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- I ) A. MIGLIACCI-F. MOLA-T. GADDI: Analisi teorica di elementi in c.a. a pareti sottili e profilo aperto in presenza di leggi costitu-

tive dei materiali non lineari, Atti del Congresso C.T.E. 1980 Ferrara.

- II ) L.CEDOLIN-Y.R.J.CRUTZEN-S.DEI POLI: Triaxial stress-strain relationship for concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division, June 1977.
- III ) V.Z.VLASOV: Pieces longues en voiles minces, Eyrolles Paris.
- IV ) A.MIGLIACCI: Teoria tecnica delle travi a profilo aperto con pareti di piccolo spessore, Tamburini 1972 Milano.
- V ) A.MIGLIACCI: Problemi attuali sulla prefabbricazione di strutture industriali in calcestruzzo, Riunione A.I.C.A.P. Milano 1971.
- VI ) G.AUGUSTI: Svergolamento a collasso di elementi strutturali in campo inelastico, Ingegneria Civile Roma 1964.
- VII ) G.AUGUSTI: In tema di svergolamento delle strutture in campo inelastico, Ingegneria Civile Roma 1964.
- VIII) R.ANTONUCCI-G.M.COCCHI: Sul comportamento a collasso di travi alte in c.a. e c.a.p. prefabbricate in presenza di imperfezioni ed errori costruttivi, La Prefabbricazione 7/8 luglio 1982.
- IX ) P.L.SACCHI-A.TRALLI: Analisi limite delle travi in parete sottile, Giornale del Genio Civile n°10,11,12 1978.
- X ) M.COMO: Teoria della stabilità dell'equilibrio elastico, Liguori 1967.
- XI ) M.COMO: Equilibri instabili nelle travi di sezione aperta sottile soggette a generali distribuzioni di forze e distorsioni, La Ricerca Scientifica 34 Serie 3 Vol.6,7 1964.
- XII ) M.COMO: Svergolamento elastico delle travi precomprese di parete sottile, Rend.Acc.Naz.Lincei Sci.Fis.e Mat.Serie VIII Vol XLI 1966
- XIII) M.CATANIA-G.M.COCCHI: Instabilità flessotorsionale di travi alte, Itec (in corso di stampa).
- XIV ) G.M.COCCHI-M.CATANIA-F.MARTINEZ: Sulla stabilità dell'equilibrio di travi alte in c.a. o c.a.p. in regime fessurato ed in presenza di imperfezioni ed errori costruttivi, Atti del Congresso C.T.E. 1980 Ferrara.
- XV ) V.KRISTEK: Theory of box girders, John Wiley & Sons 1979.
- XVI ) P.GAMBAROVA: Shear transfer by aggregate interlock in cracked reinforced concrete subject to repeated loads, Corso di Perfezionamento per le costruzioni in c.a. del Politecnico di Milano.

# COMPORAMENTO DEI CONTINUI BIDIMENSIONALI ISOTROPI IN C.A. IN FASE DI FESSURAZIONE AVANZATA.

Giuseppe CREAZZA

Istituto Universitario di Architettura di Venezia

## Sommario

Dopo una premessa di carattere storico sull'evoluzione delle ricerche sui continui bidimensionali in c.a., il presente studio definisce le relazioni carichi-momenti e carichi-deformazioni in fase di fessurazione avanzata.

Alcuni confronti tra diagrammi carichi-frecce sperimentali e teorici evidenziano l'attendibilità di quanto proposto.

## Summary

After having shortly outlined the evolution of the studies of R.C. two-ways continuous in the forward, in the present paper the relationships load-moments and loads-deformations are defined in full cracking phase.

The reliability of what has been proposed is checked by some comparisons among theoretical and experimental loads-deflections diagrams.

## 1. Premessa

Lo studio dei continui bidimensionali in c.a., dall'inizio del carico fino al collasso, da molti anni è oggetto di particolari ricerche in quanto per essi ben difficilmente si possono formulare soluzioni analitiche di carattere generale che coprano le loro diverse fasi di comportamento.

Notevole sviluppo in questi ambiti ha avuto l'analisi limite poiché ha permesso, a mezzo della teoria rigido-plastica, di interpretare il comportamento dei continui al collasso e quindi di fissare delle regole di progettazione allo stato-limite ultimo.

La teoria delle linee di rottura di Johansen (I), a prezzo di alcune ipotesi restrittive di base peraltro generalmente accettabili, ha consentito di ottenere le relazioni limiti carichi-momenti plastici ed ha fornito quindi un prezioso strumento di indagine sul comportamento a collasso del generico continuo.

Questa teoria per la sua semplicità e per l'attendibilità dei risultati comprovati anche sperimentalmente, ha avuto un notevole sviluppo (II), (III), (IV) ed oggi possiamo affermare che i risultati che essa fornisce formano testo indiscusso per la progettazione delle piastre allo stato-limite ultimo.

Non altrettanto può dirsi per le verifiche connesse al carico di servizio in quanto a questo livello in genere è presente il fenomeno fessurativo e quindi lo studio andrebbe condotto con i metodi generali dell'analisi non lineare.

Parecchi autori, tra i quali per importanza di ricerca citiamo Levi (V) e Massonet (VI), hanno affrontato il problema del comportamento dei continui bidimensionali nella fase compresa tra inizio fessurazione e collasso e da un punto di vista generale hanno stabilito i principi teorici e le metodologie più appropriate di calcolo.

Questi metodi tuttavia da un punto di vista analitico risultano sempre molto complessi ed anche per i casi più semplici richiedono un volume di calcoli possibile solo a mezzo dell'elaboratore elettronico. A causa di ciò quindi, pur possedendo gli strumenti teorici necessari al calcolo dei continui in fase di fessurazione, non esistono possibilità per il loro pratico impiego che risulta ancora confinato al campo della ricerca.

Ci siamo a suo tempo chiesti se queste difficoltà erano superabili e se, a prezzo anche di alcune semplificazioni, era possibile consegnare una semplice teoria della fase fessurativa sufficientemente attendibile ed applicabile ai casi della pratica corrente.

Nei paragrafi seguenti forniremo una risposta a questo quesito ed esporremo i principi di una teoria semplificata la quale, negli ambiti delle ipotesi di comportamento valide per i continui bidimensionali di Johansen, consente una facile interpretazione del fenomeno fisico legato alla fase fessurativa e quindi risolve il problema.

## 2. Relazione carichi-momenti nel campo compreso tra completa fessurazione e collasso

Trattiamo prioritariamente il comportamento dei continui in fase di fessurazione avanzata in quanto le conclusioni cui perverremo permettono di semplificare lo studio della precedente fase relativa al livello di carico che definisce la formazione del completo quadro fessurativo.

Come abbiamo esposto in premessa, in accordo con la teoria delle linee di rottura, noi ci riferiremo ai continui bidimensionali che rispondono alle seguenti ipotesi di base:

- che il comportamento sia idealmente isotropo,
- che il collasso avvenga per scorrimento plastico dell'acciaio,
- che il lavoro di deformazione per sforzo tagliente sia trascurabile,
- che lo sforzo normale sia trascurabile,
- che il meccanismo di rottura sia costituito da segmenti rettilinei (chiamati rette di articolazione o linee di rottura).

Come è noto ora, l'effetto prodotto dalla formazione di una fessura in una lastra sottile in cemento armato, può ricondursi a quello di una particolare distorsione di Somigliana (V). Pertanto, sotto le usuali ipotesi di Kirchoff (V) e di comportamento (VII), possiamo studiare il funzionamento delle lastre piane "idealmente isotrope" in regime di fessurazione avanzata, assimilando ogni linea di fessurazione ad un assieme di distorsioni di Somigliana.

Supponiamo che una lastra del tipo in esame abbia già conseguito, per l'applicazione preliminare di un sistema di carichi crescenti con legge proporzionale, il quadro di completa fessurazione; per una tale situazione le linee di fessurazione coincidono con la direzione dei momenti o tensioni principali.

Consideriamo che il piano medio della lastra contenga gli assi  $x, y$  della terna di assi ortogonali di ri-

ferimento e, per sola semplicità di scrittura, pensiamo le direzioni delle linee di fessurazione coincidenti con detti assi coordinati.

Sarà:

$$\begin{cases} m_x \equiv \sigma_x \\ m_y \equiv \sigma_y \\ m_{xy} \equiv \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad [1]$$

Ora, se la generica linea di fessurazione è costituita da un assieme di distorsioni di Somigliana di ampiezza variabile, gli scorrimenti lungo detta linea devono necessariamente essere diversi da zero.

$$\gamma_{xy} \neq 0 \quad [2]$$

Ciò comporta delle  $\tau_{xy} \neq 0$  che per il continuo isotropo sono in contrasto con la coincidenza linee di fessurazione-direzioni principali espressa dalla [1].

Pertanto per detti continui, ogni linea di fessurazione può essere costituita solo da un assieme di distorsioni di Somigliana tra loro uguali, equivalenti quindi ad una unica analoga distorsione del tipo di Volterra; tale distorsione avrà il suo contorno definito dall'intera lunghezza della linea di fessurazione.

Ne consegue, per quanto esposto, che ogni linea di fessurazione si comporterà come una "cerniera cilindrica" e quindi lo stato di tensione o di deformazione anelastica dovrà risultare costante lungo tutto il suo sviluppo.

Inoltre, agli effetti evolutivi, a quadro fessurativo completamente formato, la coincidenza delle linee di fessurazione con altrettante distorsioni del tipo di Volterra, fa assumere al continuo carattere isostatico indipendentemente dalla sua forma e dal tipo dei vincoli (VIII).

Inoltre, poiché lungo le cerniere, nella fase di comportamento qui considerata, la legge momenti-rotazioni può rappresentarsi con buona approssimazione con una relazione lineare del tipo:

$$m = K \cdot \bar{\phi} \quad [3]$$

in quanto l'apertura delle fessure è proporzionale alla tensione di lavoro dell'acciaio, mentre il braccio di leva della coppia interna rimane pressoché costante, ne segue che la relazione carichi-frecce avrà un andamento lineare (VII).

Abbiamo poi dimostrato quanto sopra anche a mezzo del principio di Betti (VIII) ed a mezzo di considerazioni energetiche in campo elastico (VII). Infine in (IX) ne abbiamo fornito un'ulteriore spiegazione ricorrendo unicamente ai principi classici della teoria della plasticità.

Tutto ciò premesso, posto che il continuo bidimensionale si comporta come un assieme di pannelli elastici collegati tra loro lungo le linee di fessurazione, ne consegue che la relazione lineare carichi-momenti lungo dette linee — trascurando lecitamente il lavoro elastico dei pannelli — può essere definito a mezzo del principio dei lavori virtuali (X).

Supponiamo che nel continuo esistano "n" linee di fessurazione delle quali quelle comprese tra "1" e "t" siano caratterizzate da armature con tassi di lavoro dell'acciaio ancora in fase elastica, mentre quelle comprese tra la "t + 1" e la "n" siano caratterizzate da armature con tassi di lavoro dell'acciaio già in fase plastica. Siano inoltre  $P_{fi}$  e  $p_{fi}$  i carichi rispettivamente concentrati e distribuiti all'atto della completa fessurazione e siano poi  $m_r^I$  i corrispondenti momenti lungo le linee di articolazione. Posto  $\Delta P_i = P_i - P_{fi}$ ,  $\Delta p_i = p_i - p_{fi}$  e  $\Delta m_r = m_r - m_r^I$  a mezzo del principio dei lavori virtuali pos-

siamo scrivere:

$$\Sigma \Delta P_i \delta_i + \iint \Delta p_i \delta_i \, dx \, dy = \sum_{1(t)}^t \int_0^{s_r} \Delta m_r \cdot \bar{\phi}_r \cdot ds_r + \sum_{t+1(t)}^n \int_0^{s_r} \Delta m_{pr} \cdot \bar{\phi}_r \cdot ds_r \quad [4]$$

ove:

$\delta_i$  = spostamento delle forze concentrate e ripartite

$\Delta m_{pr} = m_p - m_r^I$  (con  $m_p$  momento plastico del continuo)

$\bar{\phi}_r, s_r$  = rotazione anelastica e lunghezza della generica linea di articolazione

La relazione [4] può essere riscritta correlando le diverse quantità caratteristiche ad una linea di riferimento, scelta a piacere internamente al continuo, per mezzo dei rapporti cinematici che derivano dalla trasformazione di detto continuo in poliedro.

Chiamate con  $\delta, \bar{\phi}, \Delta m$  le quantità di detta linea, con considerazioni geometriche avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} = \xi \cdot \delta \\ \delta_i = \gamma_i \delta \\ \bar{\phi}_r = \rho_r \cdot \bar{\phi} = \rho_r \cdot \xi \cdot \delta \\ \Delta m_r = H_{(r)} \cdot \rho_r \cdot \Delta m \end{array} \right. \quad [5]$$

Nell'ultima delle [5] abbiamo introdotto la funzione  $H_{(r)}$  del tipo di Heaviside, di valore 1 per le linee interne al contorno e di valore 2 per le linee di bordo, per le seguenti ragioni: i momenti flettenti sono legati alla tensione dell'acciaio e quindi alla frazione di rotazione anelastica calcolata a partire dalla posizione indeformata: conseguentemente, a parità di rotazione  $\bar{\phi}_r$ , i  $\Delta m_r$  relativi alle linee di bordo devono essere raddoppiati.

Con i rapporti cinematici definiti in [5], la [4], dopo aver risolto gli integrali al secondo membro, assume la forma definitiva seguente:

$$\Sigma \Delta P_i \cdot \gamma_i \cdot \delta + \iint \Delta p_i \cdot \gamma_i \cdot \delta \cdot dx \, dy = \sum_{1(t)}^t \Delta m \cdot \xi \cdot \delta \cdot H_{(r)} \cdot \rho_r^2 \cdot s_r + \sum_{t+1(t)}^n \Delta m_{pr} \cdot \xi \cdot \delta \cdot \rho_r \cdot s_r \quad [6]$$

La [6], dopo aver eliminato il termine comune  $\delta$ , consente la determinazione diretta di  $\Delta m$  e quindi dei  $\Delta m_r$  cinematicamente corrispondenti (vedasi [5]) ed il problema può dirsi risolto.

### 3. Relazione carichi-momenti per il livello di carico corrispondente alla completa fessurazione

Il continuo, come è noto, passa dalla configurazione integra a quella interamente fessurata attraverso una complessa serie di fenomeni ridistributivi con susseguente apertura di fessure, prima localizzate e poi distribuite, fino al formarsi del quadro finale.

Da un punto di vista teorico è possibile seguire con analisi al passo l'evoluzione del fenomeno fessurativo assimilando ogni singola fessura ad una distorsione di Somigliana ed applicando la tecnica suggerita in proposito da Levi (V).

E' questo però un procedimento assai complicato e che implica particolari ed approfonditi studi per ogni singola piastra e condizione di carico.

Il nostro scopo però non è quello di seguire passo passo il fenomeno, bensì è quello di definire le caratteristiche delle sollecitazioni di flessione all'atto della completa fessurazione. In tal caso, se ci limitiamo a ciò, lo studio si semplifica notevolmente per le seguenti ragioni:

- sono note a priori posizione, direzione e lunghezza delle singole fessure in quanto coincidono con le rispettive linee (che in genere poi si presentano nel continuo in numero assai limitato);

- ad ogni linea di fessurazione corrisponde un'unica fessura ad ampiezza costante;
- per conoscere lo stato di sollecitazione di un'intera linea di fessurazione è sufficiente definire il momento flettente di un solo punto di detta linea; ciò in quanto, a quadro fessurativo ultimato, i momenti flettenti globali (elastici più anelastici) assumono un valore costante lungo le rispettive linee di appartenenza.

Come si intuisce, il problema si semplifica notevolmente e può essere agevolmente risolto operando con le metodologie espote in (XI) ed in particolare in (XII).

In tal senso è necessario però conoscere prioritariamente i momenti flettenti relativi a distorsioni unitarie; allo stato attuale delle tecniche computazionali detti momenti si ottengono facilmente operando con programmi di biblioteca agli elementi finiti.

Infatti si può condurre la ricerca sia indirettamente sfruttando il secondo principio di reciprocità di Colonnetti, sia direttamente assimilando la distorsione ad un gradiente termico.

In (XIII) abbiamo esposto in dettaglio il procedimento numerico atto a determinare i momenti relativi al carico di completa fessurazione, in questa sede ci limitiamo ad enunciare sommariamente i principi generali di calcolo.

Siano:

$\bar{\phi}_{i,r}$  = rotazione anelastica, ovvero distorsione agente nel punto  $i$  in direzione  $r$  (rotazione attorno alla normale ad  $r$ )

$C_{p,\xi(i,r)}$  = momento agente nel punto  $p$  in direzione  $\xi$  dovuto ad una distorsione unitaria  $\bar{\phi}_{i,r} = 1$  definita come sopra

Distinguendo nel momento ricercato la parte elastica (sottosegnata) da quella anelastica (soprasegnata), per il livello di carico qui considerato possiamo scrivere:

$$m_{p,\xi}^I = \underline{m}_{p,\xi}^I + \bar{m}_{p,\xi}^I \quad [7]$$

In modo generale ora, per mezzo delle convenzioni poste, il momento anelastico incognito  $\bar{m}_{p,\xi}^I$ , assumerà la forma:

$$\bar{m}_{p,\xi}^I = \sum_{(i,r)} \phi_{i,r} \cdot C_{p,\xi(i,r)} \quad [8]$$

Per quanto esposto in (XI) possiamo sostituire a  $\phi$  l'espressione equivalente nell'incognita  $\bar{m}_{i,r}^I$ :

$$\bar{\phi}_{i,r} = f_{i,r} (\underline{m}_{i,r}^I + \bar{m}_{i,r}^I - m_r^f) \quad [9]$$

dove  $m_r^f$  è il momento di fessurazione relativo alla linea  $r$  e  $f_{i,r}$  è un coefficiente numerico che deriva dal diagramma trilineare momenti-rotazioni.

Introdotte le [9] nella [8] si ottiene quindi un'equazione nelle sole incognite  $\bar{m}_{i,r}^I$ . Scritta dunque la [8] per ogni linea sede di distorsioni (quindi per tutte le linee di fessurazione) si ottiene un sistema di equazioni lineari nelle sole incognite  $\bar{m}_{i,r}^I$  di possibile soluzione.

Infine a mezzo delle [7] si ottengono i momenti ricercati e risulta pertanto nota la relazione: livello di carico corrispondente alla formazione del completo quadro fessurativo-momenti lungo le linee di fessurazione.

#### 4. Relazioni carichi-deformazioni nel campo compreso tra completa fessurazione e collasso

A fronte di quanto sinora esposto possiamo affermare di essere in grado di determinare le relazioni carichi-momenti lungo le linee di fessurazione del continuo per il generico livello di carico compreso

tra completa fessurazione e collasso.

Per passare ora da queste relazioni a quelle carichi-deformazioni (rotazioni od abbassamenti) si deve esplicitare il parametro  $K$  di cui alla relazione [3].

La sua determinazione non è però diretta e richiede tutta una serie di operazioni e considerazioni ampiamente illustrate in (XIV).

Riportando per breve sintesi quanto esposto, ricordiamo che le linee di fessurazione o di articolazione rappresentano un'astrazione ed equivalgono, come effetto deformativo, all'insieme del fenomeno fessurativo ad esse limitrofo; è possibile quindi concentrare in esse tale fenomeno ed operare di conseguenza con un'unica rotazione anelastica  $\bar{\phi}$  equivalente alla somma delle rotazioni indotte dalle singole fessure.

Applicando ora gli stessi concetti già elaborati per le strutture monodimensionali, è logico ammettere che tale rotazione anelastica totale  $\bar{\phi}$  dipenderà essenzialmente dall'ampiezza della zona fessurata e dall'andamento in tale zona del diagramma dei momenti flettenti letti normalmente alla linea di articolazione considerata (Fig. 1).

Pertanto per calcolare  $K$ , ovvero per determinare  $\bar{\phi}$ , è necessario prioritariamente conoscere le superfici dei momenti flettenti anche all'interno dei pannelli elastici che, collegati tra loro a mezzo di cerniere cilindriche, definiscono teoricamente il continuo in fase di completa fessurazione.

E' questo un tema molto complesso che da un punto di vista teorico generale trova soluzione a mezzo delle tecniche numeriche esposte in (XII).

Tuttavia le proprietà dei continui isotropi riportate nei paragrafi precedenti e la conoscenza della legge carichi-momenti lungo le linee di articolazione, consentono, agli effetti flessionali, di sostituire alla struttura reale fessurata una struttura equivalente di possibile studio in campo elastico-lineare.

Ipotizzando infatti la struttura equivalente come formata da pannelli elastici tra loro connessi da cerniere cilindriche ed applicando ad essi il livello di carico desiderato e lungo le cerniere i momenti che a loro competono, l'effetto flessionale globale, nei limiti delle approssimazioni insite nella teoria delle linee di rottura e di fessurazione, sarà uguale a quello del continuo fessurato soggetto allo stesso livello di carico (Fig. 2).

E' possibile quindi operando esclusivamente in campo elastico lineare conoscere per il generico continuo la superficie dei momenti nelle direzioni desiderate e procedere quindi, per integrazione del diagramma delle curvature anelastiche (similmente a quanto d'uso corrente per le strutture monodimensionali), alla determinazione delle rotazioni anelastiche  $\bar{\phi}$  desiderate (Fig. 3).

E' questo per breve sintesi quanto in maniera semplificata consigliamo in proposito e rimandiamo alle memorie (XIV) e (XV) per maggiori delucidazioni e per l'esposizione delle tecniche computazionali più idonee al caso.

Ricordando infine gli operatori cinematici derivanti dalla trasformazione del continuo bidimensionale in poliedro, otteniamo direttamente il valore dell'abbassamento conseguente al fenomeno fessurativo (Fig. 4):

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\xi} \cdot \bar{\phi} \quad [10]$$

Sommando a questo valore l'abbassamento elastico relativo al continuo bidimensionale non fessurato otteniamo infine il valore dello spostamento totale desiderato:

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{el}} + \bar{\delta} \quad [11]$$

## 5. Applicazioni alle piastre rettangolari uniformemente caricate con diverse condizioni di vincolo e confronti sperimentali

Il C.E.B. nell'ambito della Commissione II "Structural Analysis" ha da tempo istituito un gruppo di lavoro, da noi coordinato, per lo studio di semplici metodologie finalizzate alla determinazione dello stato deformativo delle piastre in c.a.

In seno alla Commissione II si è deciso poi che detto gruppo doveva principalmente indirizzare i suoi lavori alle piastre rettangolari uniformemente caricate e soggette a diverse condizioni di vincolo in quanto esse coprono le maggiori richieste della progettazione corrente.

Ciò premesso in un primo tempo (XIV) si sono stabilite le tecniche computazionali più opportune per ottenere la superficie dei momenti del continuo bidimensionale e quindi i principi di calcolo necessari per la determinazione delle rotazioni anelastiche concentrate.

Queste metodologie si sono applicate poi alla piastra quadrata, semplicemente appoggiata ed uniformemente caricata, consegnando una semplice relazione lineare che consente il calcolo diretto dell'abbassamento dovuto al fenomeno anelastico.

In un secondo tempo (XV) si è estesa l'indagine alle piastre rettangolari uniformemente caricate e con diverse condizioni di vincolo e, adottando gli stessi procedimenti descritti in (XIV), si sono consegnate le diverse formule d'uso necessarie al calcolo dell'abbassamento dovuto al fenomeno anelastico.

Per testare la validità delle formule proposte in entrambi i casi trattati si sono eseguiti dei confronti con le prove sperimentali in tal senso esistenti.

In particolare si è fatto ampio riferimento alle classiche prove di Bach e Graf che per accuratezza di sperimentazione risultano altamente affidabili (XVI).

I grafici di seguito riportati evidenziano l'andamento lineare della relazione carichi-frecce come da noi previsto ed inoltre dimostrano l'attendibilità delle formulazioni proposte e quindi da un punto di vista generale fanno ritenere intrinsecamente valido quanto da noi esposto.

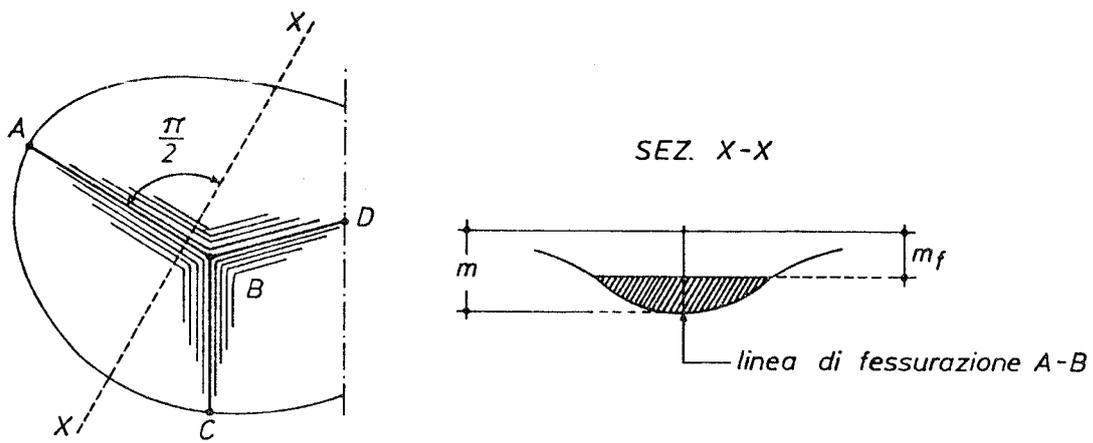


FIG. 1

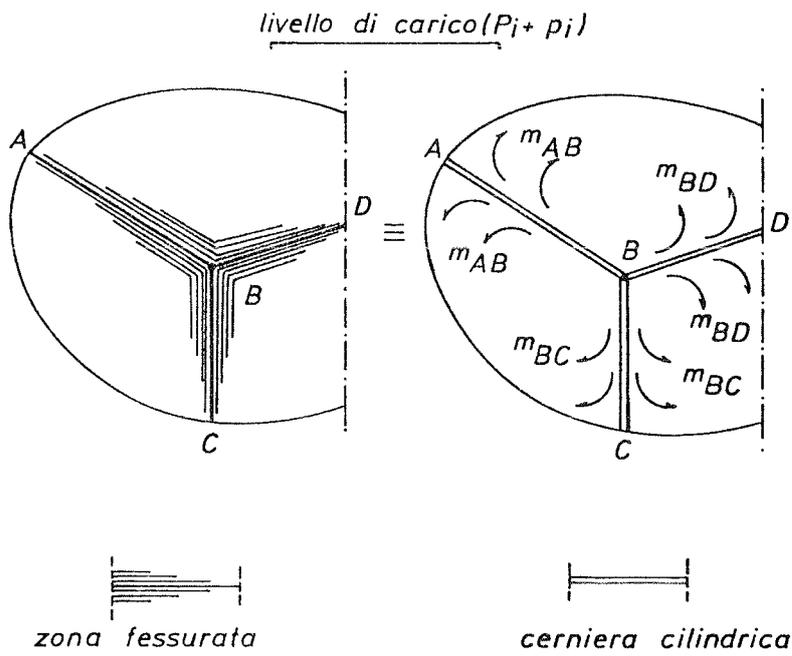
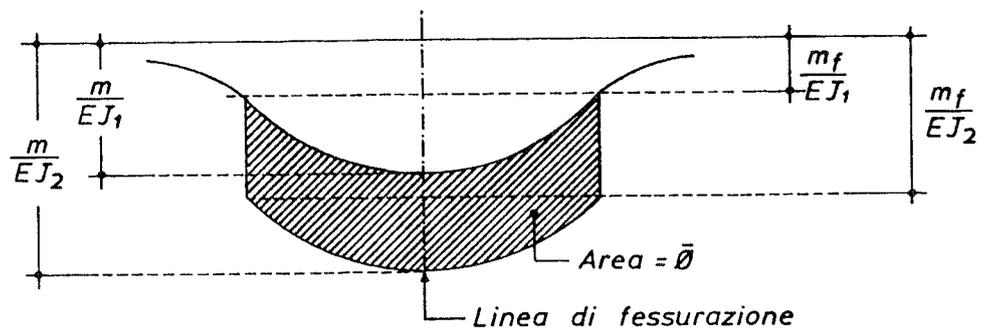
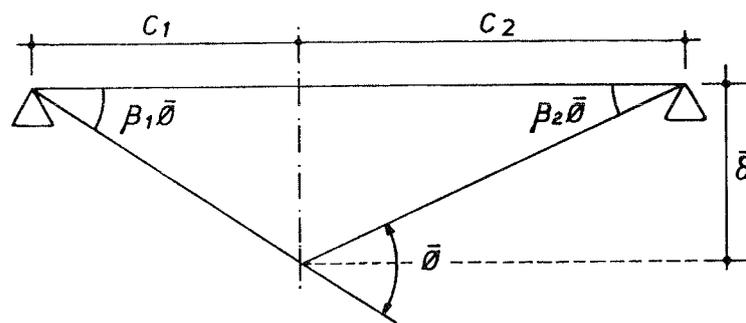


FIG. 2



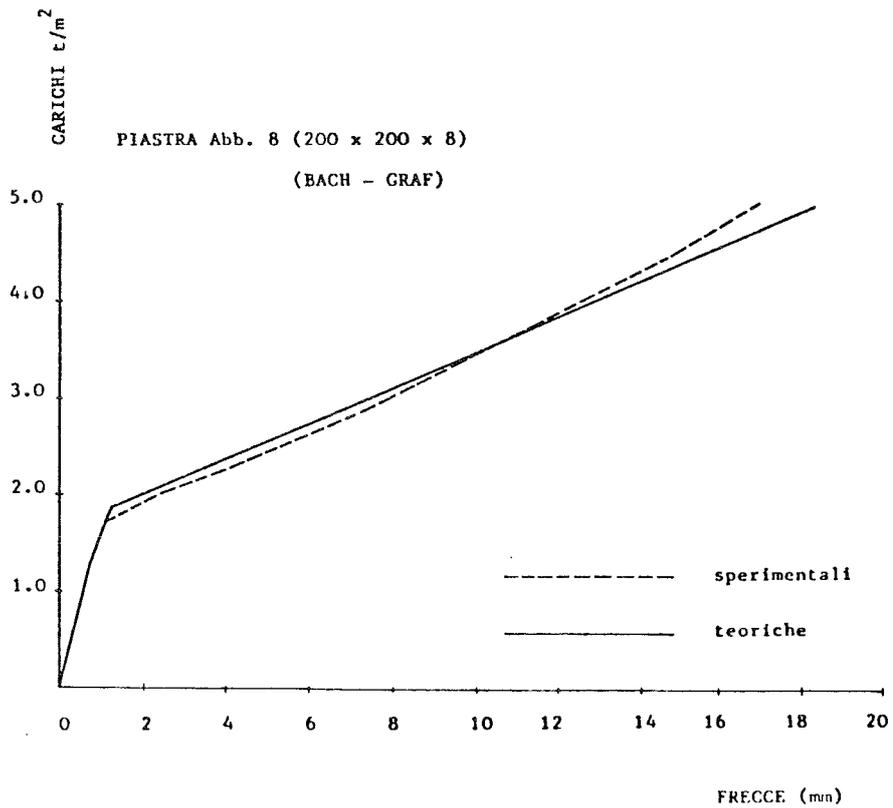
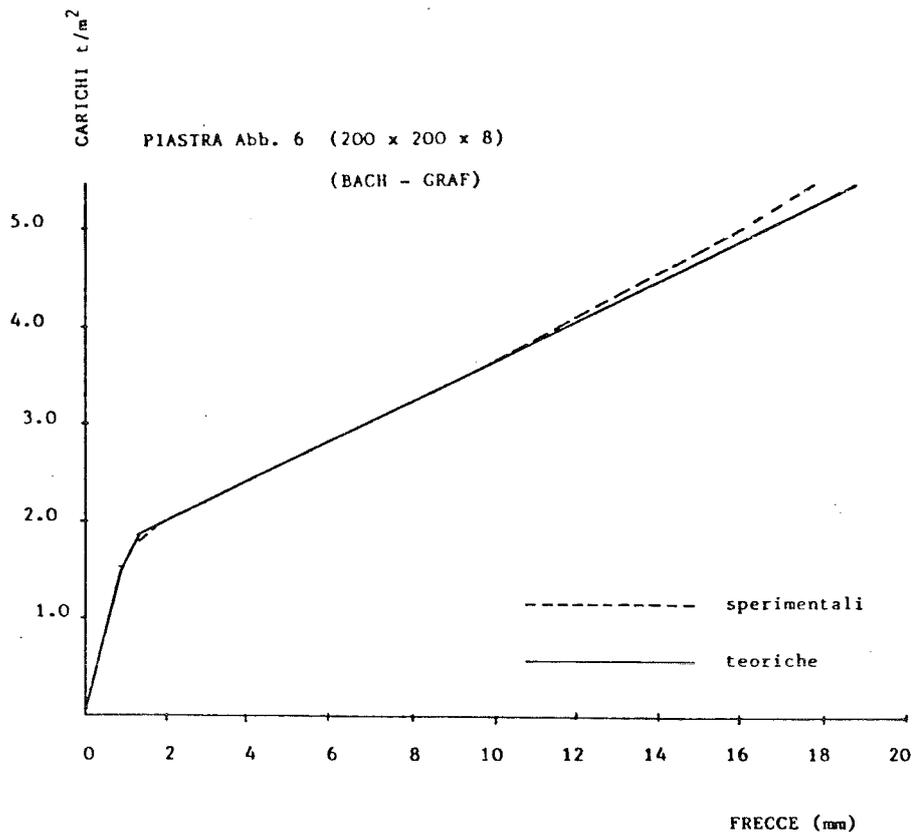
$EJ_1$  = Rigidezza struttura integra  
 $EJ_2$  = " " fessurata

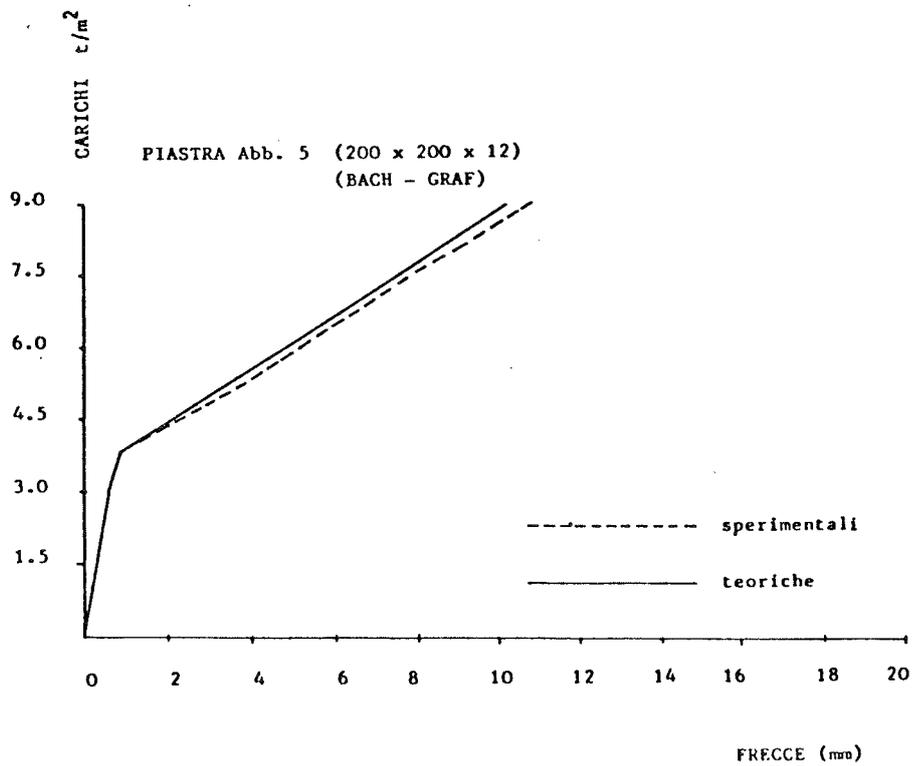
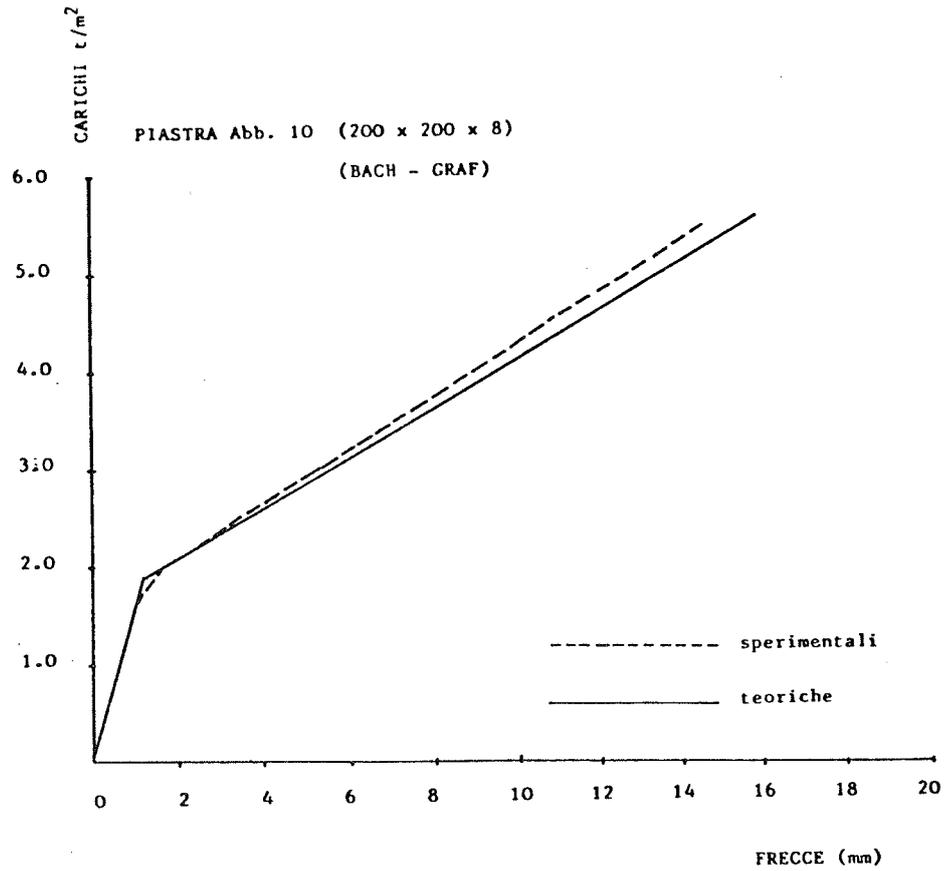
FIG. 3

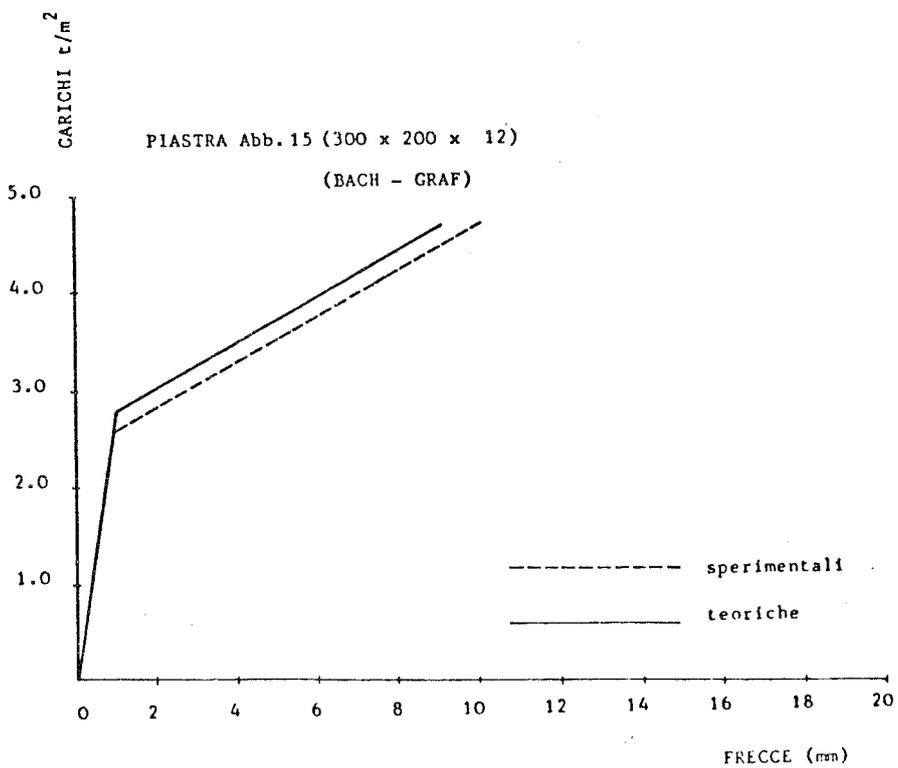
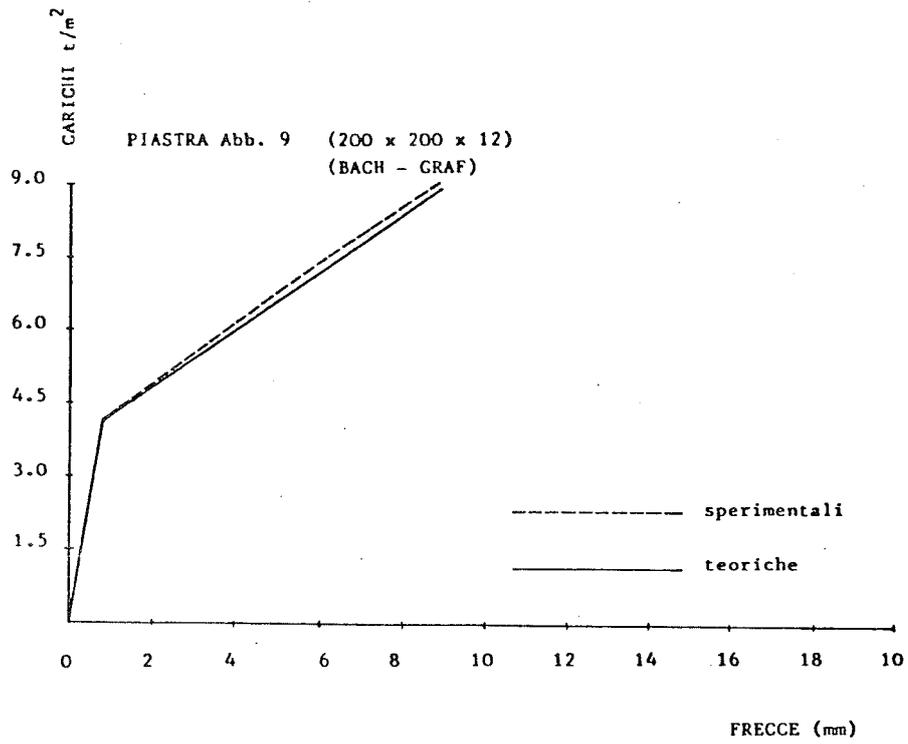


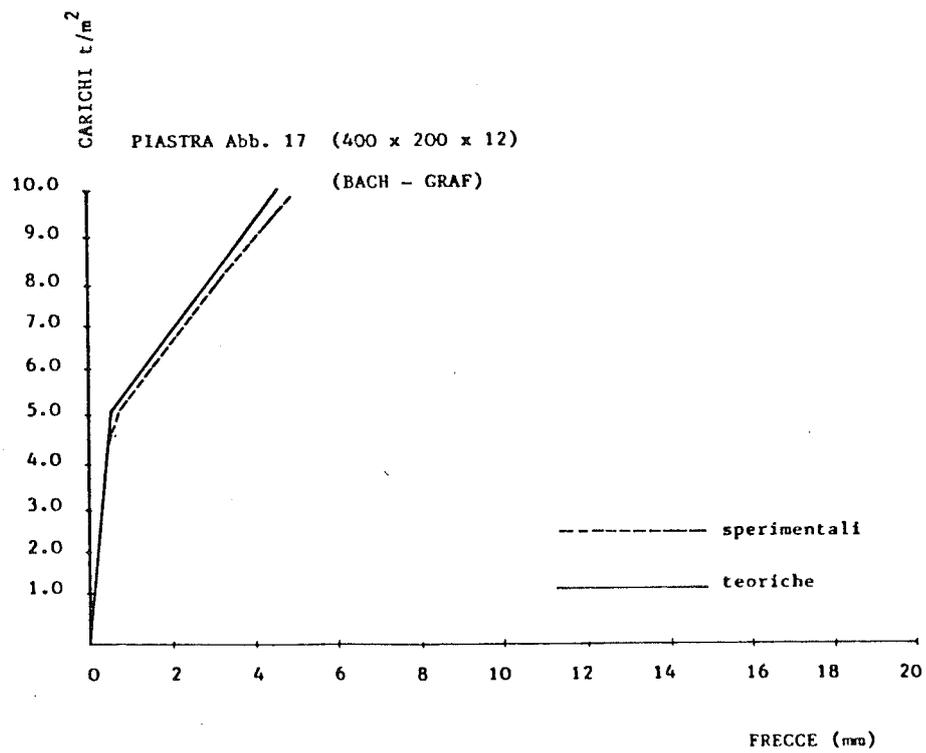
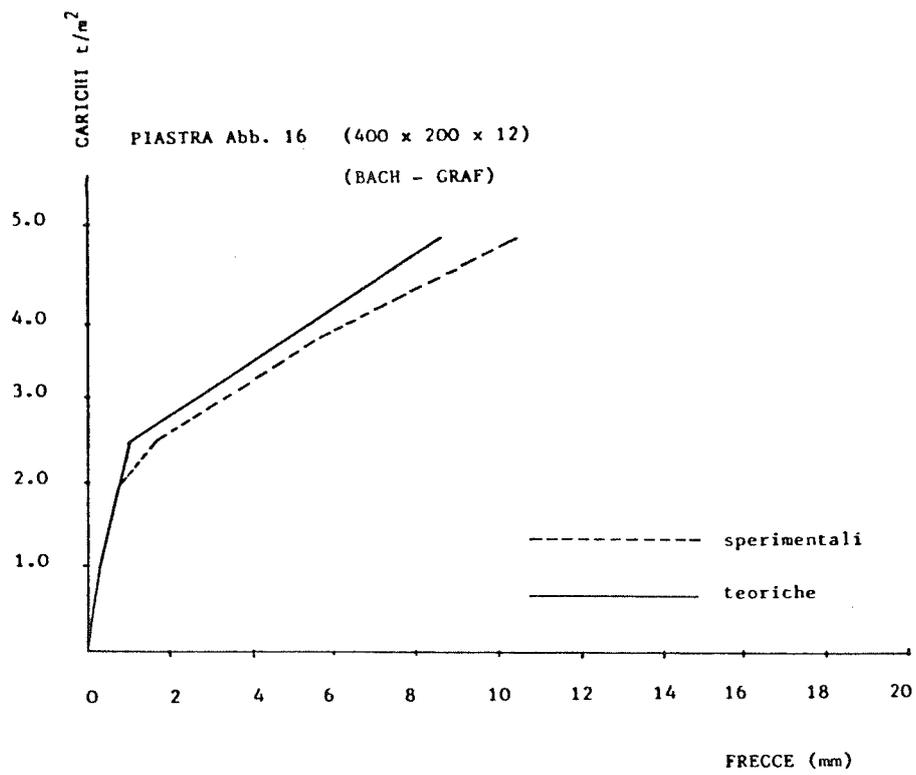
$$\frac{1}{\xi} = \beta_1 \cdot C_1 = \beta_2 \cdot C_2$$

FIG. 4









## BIBLIOGRAFIA

- I) K.W. JOHANSEN "Yield line theory" Cement and Concrete Association - London 1962
- II) R.H. WOOD "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates" Thames and Hudson - London 1961
- III) A. SAWCZUK - T. JAEGER "Grenztragfähigkeits - Theorie der Platten" Springer Verlag 1963
- IV) S. BERNAERT "Le calcul aux Etats-limites des Dalles et Structures planes" A.I.T.B.T.P. n. 257 - May 1969
- V) F. LEVI "Superfici di influenza e fenomeni di adattamento nelle lastre piane" Accademia delle Scienze di Torino - Vol. 84 1949-50
- VI) CH. MASSONET "Théorie générale des plaques élasto-plastiques" Bulletin d'Information C.E.B. n. 56 - Août 1966
- VII) G. CREAZZA - F. LEVI "Schematizzazione del funzionamento di lastre piane in fase di fessurazione avanzata" Acc. Naz. dei Lincei 1974
- VIII) G. CREAZZA "Nuova interpretazione sul comportamento delle lastre isotrope in cemento armato in fase di fessurazione avanzata" Accademia delle Scienze di Torino - Vol. 109 - 1974/75
- IX) G. CREAZZA "Sur le comportement des solides continus bidimensionnels en béton armé en phase anelastique jusqu'à la ruine" Istituto Lombardo di Scienze e Lettere - Vol. 109 - 1975
- X) G. CREAZZA "Relazioni caratteristiche nel calcolo dei continui bidimensionali isotropi in cemento armato dalla completa fessurazione al collasso" Accademia delle Scienze di Torino - Vol. 114/1980
- XI) F. LEVI "Contrôle des conditions de fissuration et de déformation de dalles dimensionnées à l'état-limite ultime" Acta Tech, Hung 50 - 1965
- XII) G. CREAZZA - E. SIVIERO "Generalization of distortions method for the analysis of r.c. slabs in cracking phase" Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino Dic. 1980 - n. 490
- XIII) G. CREAZZA "Analisi delle sollecitazioni flessionali nei continui bidimensionali isotropi in cemento armato" Quaderni di Ingegneria Civile n. 1 - Dicembre 1982
- XIV) G. CREAZZA - E. SIVIERO "Approximate theory for the deformational study of reinforced concrete bidimensional continuous: application to simply supported uniformly loaded square slabs" Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino - Dic. 1981 e C.E.B. Bulletin d'Information n. 153 Avril 1982
- XV) L. JOGNA - E. SIVIERO "Deformational state of uniformly loaded rectangular reinforced slabs with different restraint conditions" Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino, Dic. 1982 e C.E.B. Bulletin d'Information di prossima stampa
- XVI) C. BACH - O. GRAF "Versuche mit allseitig aufliegenden quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten" Deutscher Ausschuss für Eisenbeton - H. 30 - Berlin - Ernst & Sons 1915.

# ANALISI TEORICO-SPERIMENTALE DI PANNELLI FORATI PREFABBRICATI

DONIDA GIANMARIA - MENDITTO GIOVANNI (1).

Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - Facoltà di Ingegneria - Università degli Studi di Ancona.

## SOMMARIO

Vengono confrontati i risultati di un'analisi di un pannello sandwich in c.a. a sezione alleggerita di tipo scatolare, condotta sia per via teorica a mezzo di discretizzazione per E.F. che per via sperimentale operando su prototipo al vero. Si evidenzia il buono accordo dell'indagine teorico-sperimentale.

## SUMMARY

The theoretical and experimental analysis of a reinforced concrete sandwich panel with a box section is compared. The theoretical procedure is carried out with F.E. technique; the test is performed on a actual prototype. The theoretical and experimental agreement is pointed out.

## 1. INTRODUZIONE

La tecnologia dei pannelli sandwiches in conglomerato cementizio con armatura lenta è orientata verso la produzione di elementi che compatibilmente con le esigenze statiche e termiche, risultino il più possibili leggeri. Si interviene pertanto sulla geometria della sezione in modo da realizzare forme scatolari per la quale l'analisi statica può essere agevolmente condotta a mezzo di procedimenti di discretizzazione del continuo. Particolare attenzione merita allora la modellazione del pannello e la scelta del tipo di E.F. specie per tener conto delle discontinuità geometriche. Si è ritenuto pertanto interessante studiare un pannello sandwich a sezione scatolare (fig.1) e confrontare i risultati più significativi dell'analisi con quelli ottenuti dalla sperimentazione di un prototipo al vero.

## 2. IL MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Il modello ad E.F., rappresentato in figura 2 è costituito da 1031 punti nodali ed è composto dai seguenti tipi di E.F.:

- a.- membrane per la parete interna ed esterna, in numero di 124 per ciascuna parete;
- b.- beam: n.4 sotto l'apertura centrale e n.14 in asse del maschio a sinistra dell'apertura;
- c.- brick ad otto nodi per il cordolo di ripartizione posto al di sopra ed al di sotto del pannello (n.15 elementi per ciascun cor-

---

(1) Gli Autori dichiarano di aver contribuito in egual misura alla stesura del presente lavoro.

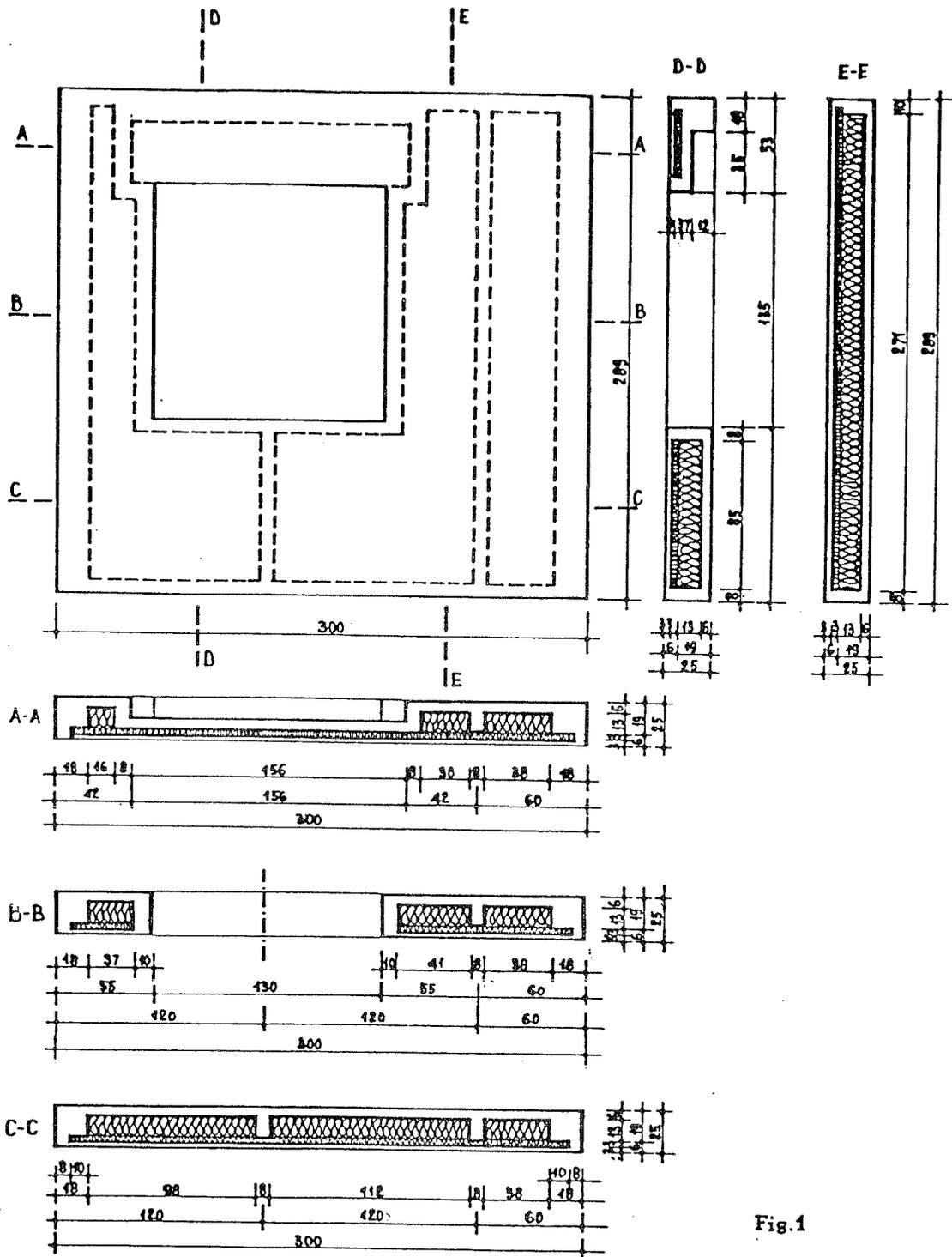


Fig.1

dolo);

d.- brick ad otto nodi per la "cintura" al di sotto del cordolo superiore ed al di sopra di quello inferiore (n.21 e n.13 elementi rispettivamente);

e.- brick ad otto nodi lungo gli elementi verticali del contorno dell'apertura (n.30 elementi);

f.- brick ad otto nodi lungo i bordi verticali del pannello (n.16 elementi per bordo);

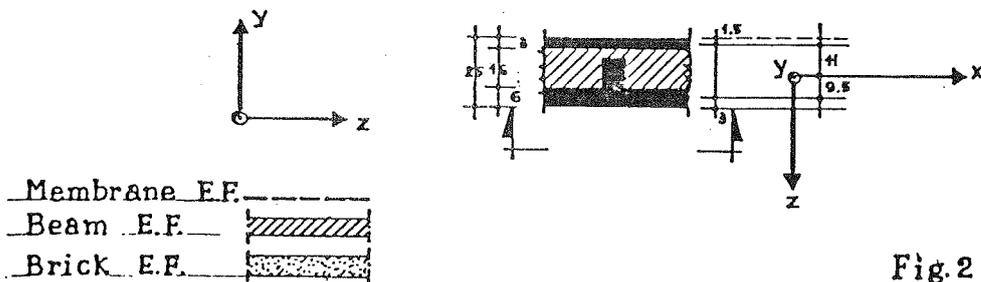
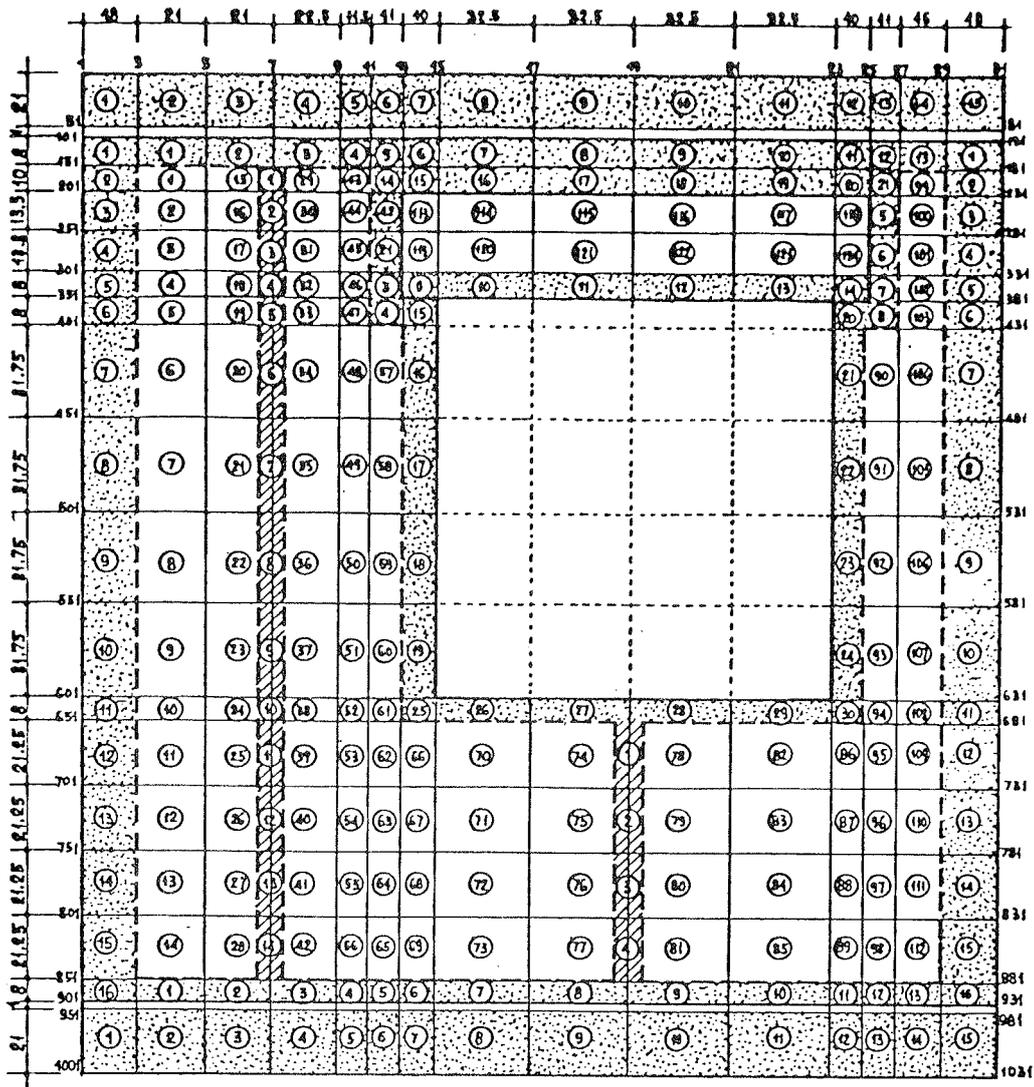


Fig.2

g.- brick ad otto nodi per l'elemento di collegamento tra il cordo lo superiore ed inferiore di ripartizione (n.15 elementi per ciascun collegamento).

Nelle figure 3, 4 e 5 sono riportati rispettivamente i riferimenti per l'elemento membrane, beam e brick.

Risulta per il conglomerato:

$$E'_b = 3 \times 10^4 \text{ Nmm}^{-2}, \quad \nu = 0,12$$

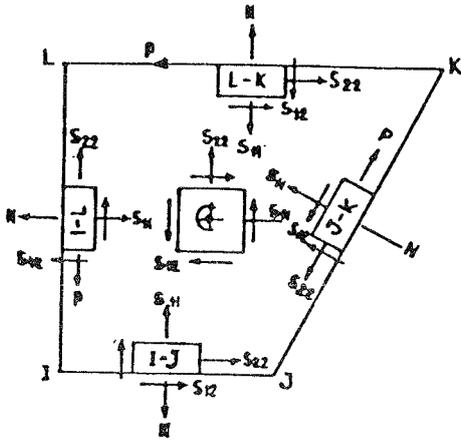
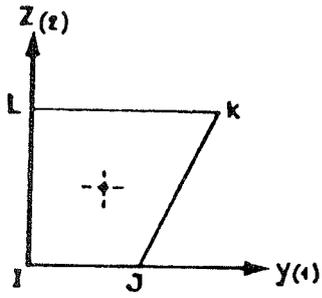


Fig. 3

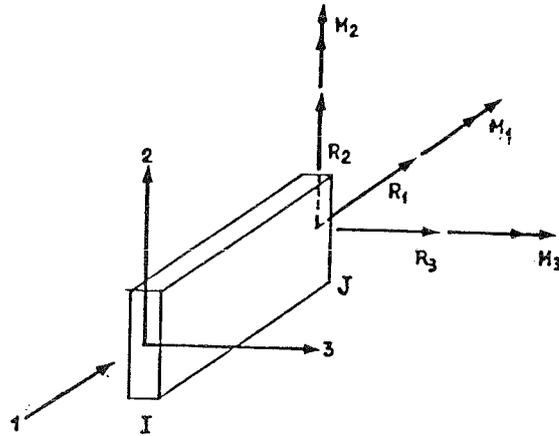
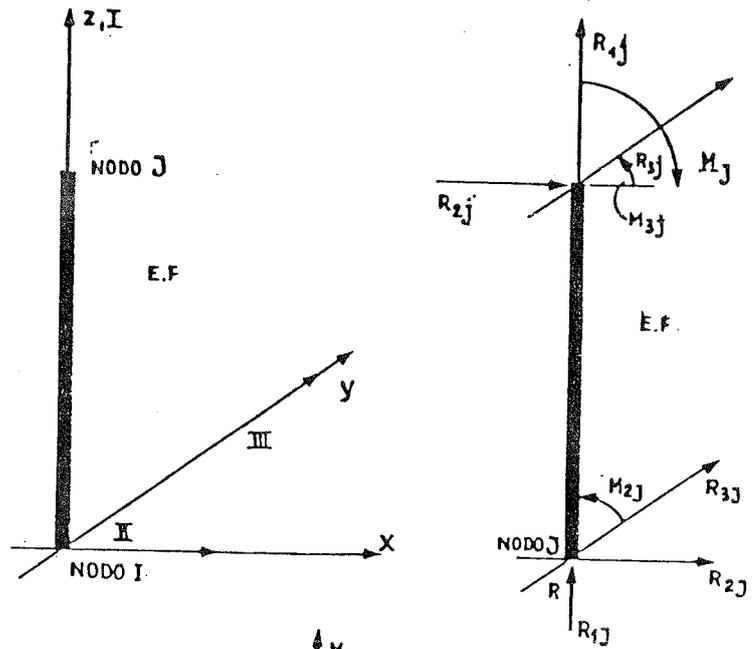


Fig. 4

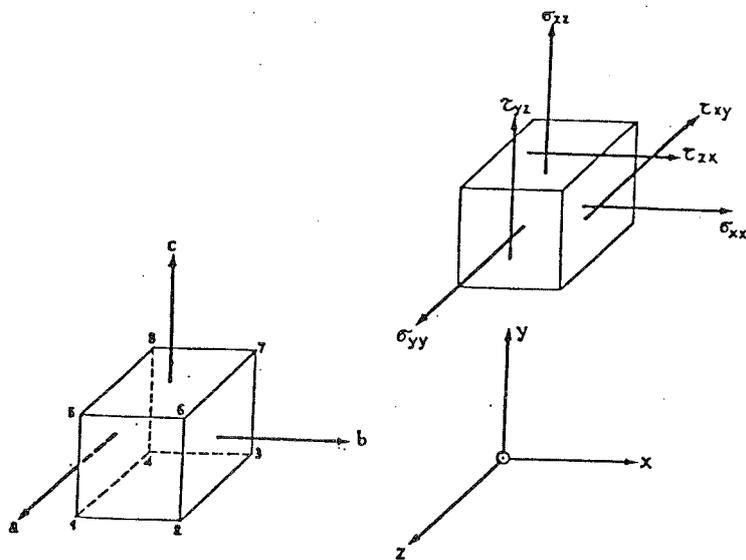


Fig. 5

### 3. IL MODELLO SPERIMENTALE

Il carico viene applicato eccentrico rispetto allo spessore del pannello e distribuito uniformemente nel senso della lunghezza. Il dispositivo atto a riprodurre lo schema di carico è costituito da una serie di 15 martinetti  $\emptyset$  100 mm., distanziati fra loro di 20 cm. e collegati in serie. Tali martinetti, posti fra la traversa superiore della macchina di prova, caricano il pannello tramite un cordolo di ripartizione. Nella parte inferiore del pannello, fra la traversa della macchina di prova ed il cordolo prefabbricato di ripartizione, viene eseguito un getto in malta cementizia dello spessore di 2 cm. e larghezza 10 cm. a cavallo dell'asse di applicazione del carico. Prima della prova, si procede a rendere piane le superfici delle testate dei pannelli mediante l'interposizione, tra queste ed i cordoli prefabbricati di ripartizione, di malta cementizia ad alta resistenza. Per la determinazione delle deformazioni unitarie sul pannello, si applicano 21 estensimetri a variazione di induttanza con base di misura di 45 mm.; per la determinazione degli spostamenti, si impiegano 10 trasduttori di spostamento a variazione di induttanza.

La disposizione degli strumenti di misura è riportata nelle figure 6 e 9.

I valori degli spostamenti orizzontali sono stati ottenuti depurando i valori letti della rotazione rigida del telaio di riferimento segnalata dallo strumento A.

Il collasso è avvenuto a 3187 KN per cedimento dell'architrave in corrispondenza dell'incastro sulla spalla più larga. Nella fig.10 sono riportate anche le fessure rilevate a 1863 KN.

L'errore di misura dei carichi applicati può ritenersi pari a  $\pm 1\%$ , mentre l'errore di misura delle deformazioni unitarie e degli spostamenti può essere pari a  $\pm 0,5\%$ .

La lettura degli strumenti viene eseguita con apparecchiatura di commutazione e registrazione automatica. Per alcuni strumenti, scelti fra i più significativi, vengono tracciate le curve carichi-spostamenti utilizzando dei registratori x-y; il segnale per la misura del carico viene derivato dalla cella pressiometrica di alta precisione accoppiata al sistema di controllo della macchina di prova. La prova è eseguita aumentando il carico con incrementi di 200 KN e fermandosi ad ogni incremento il tempo necessario per poter effettuare la lettura degli strumenti.

Raggiunto il carico di 1863 KN, si elimina buona parte della strumentazione di misura.

Le prove proseguono incrementando il carico con velocità costante sino a rottura e registrando i soli apparecchi collegati ai registratori x-y.

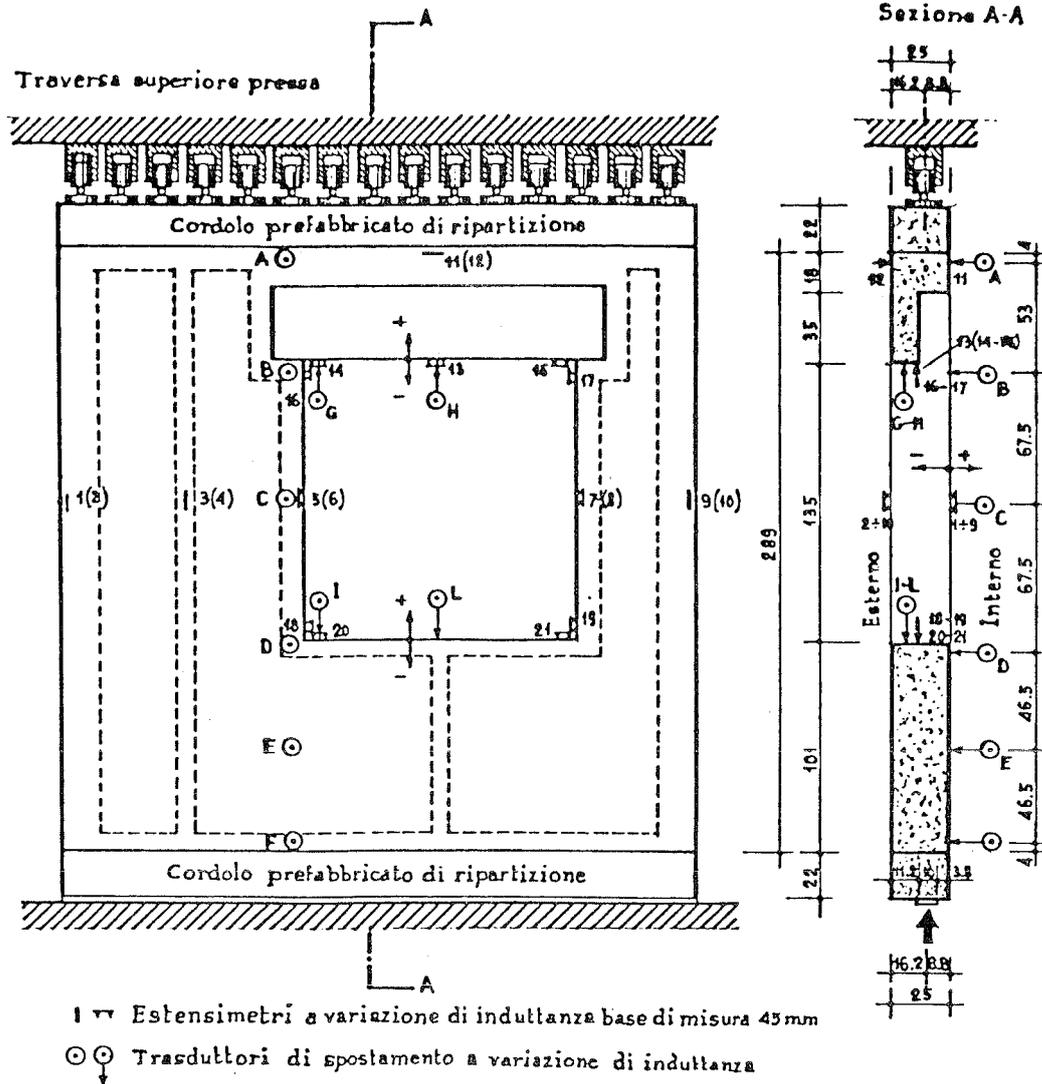


Fig. 6

- TAB. 1 -

SPOSTAMENTI IN  $\mu\cdot m$

CARICO KN	POSIZIONE STRUMENTI DI MISURA							
	B		D		E		G	
	SPER.	TEOR.	SPER.	TEOR.	SPER.	TEOR.	SPER.	TEOR.
294,2	-110	-123	-126	-136	-72	-81	-140	-154
490,3	-222	-149	-257	-279	-147	-159	-274	-299
686,4	-336	-370	-389	-430	-224	-244	-432	-468
882,5	-457	-501	-525	-573	-306	-334	-580	-625
1078,7	-580	-632	-668	-718	-394	-432	-782	-859
1274,8	-710	-783	-814	-879	-486	-532	-964	-1041
1470,9	-386	-424	-963	-1052	-583	-640	-1290	-1395
1667,0	-970	-1073	-1120	-1218	-687	-751	-1516	-1645
1863,1	-1105	-1214	-1252	-1359	-791	-853	-1776	-1926

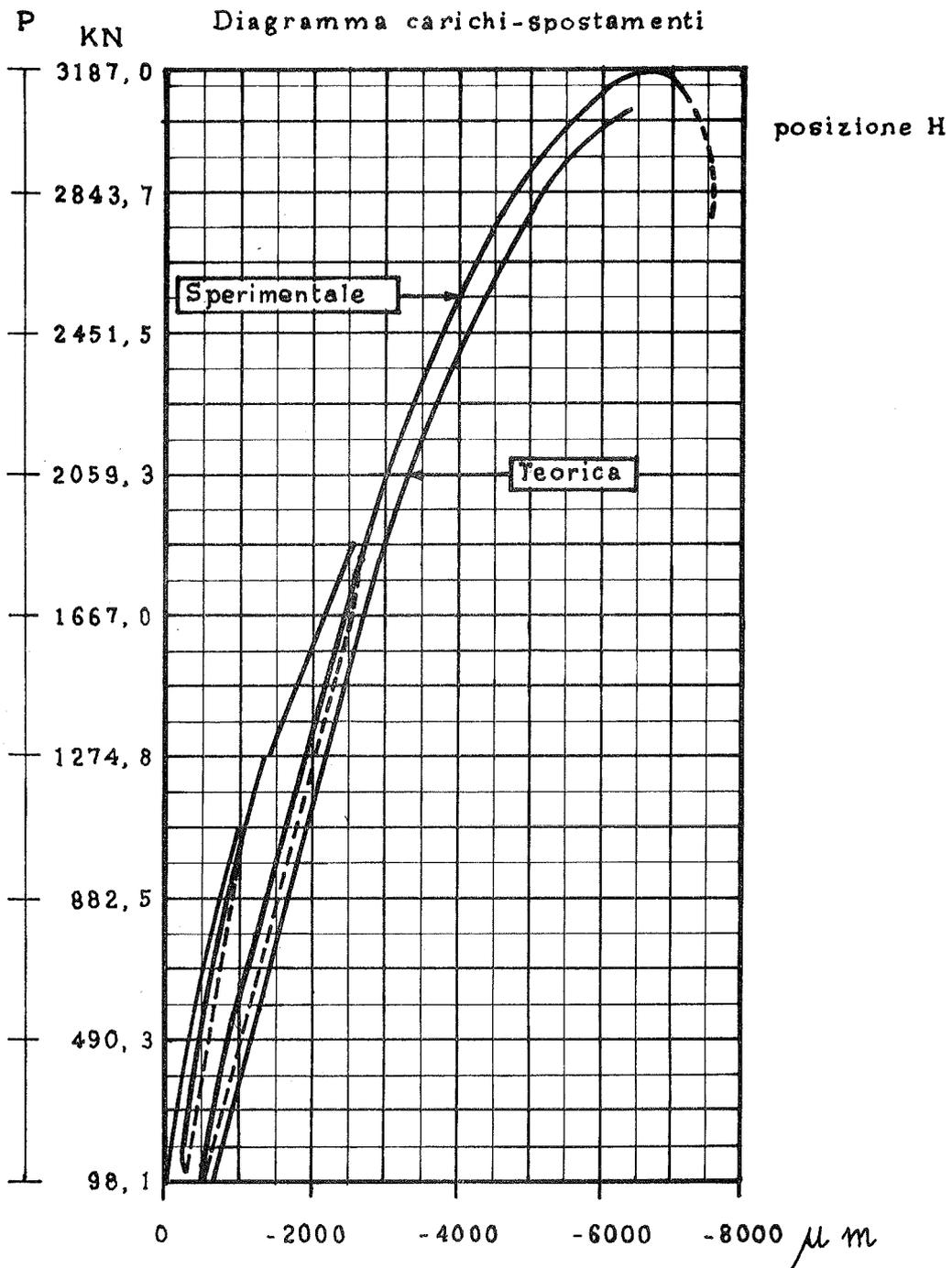


Fig. 7

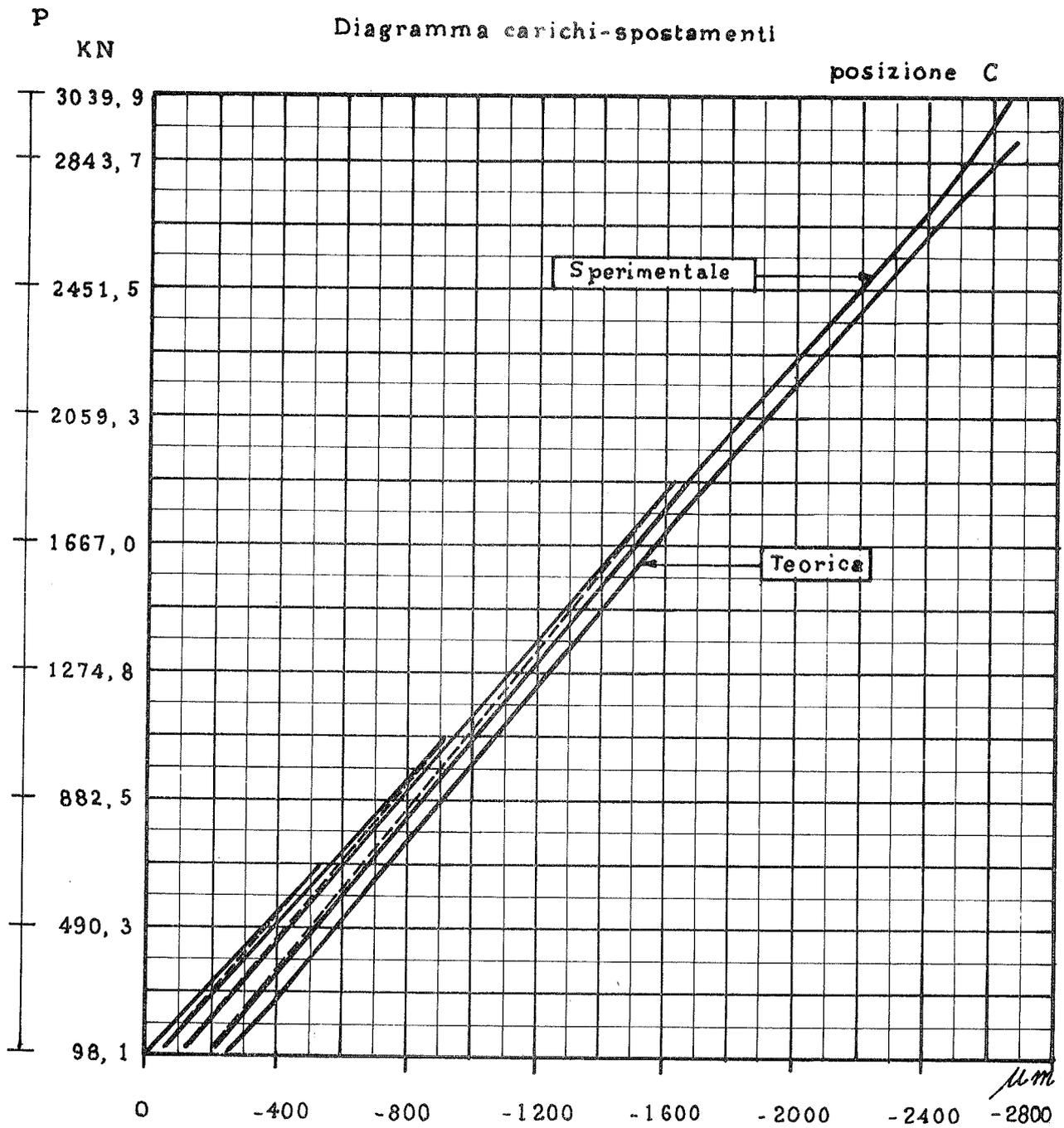


Fig. 8

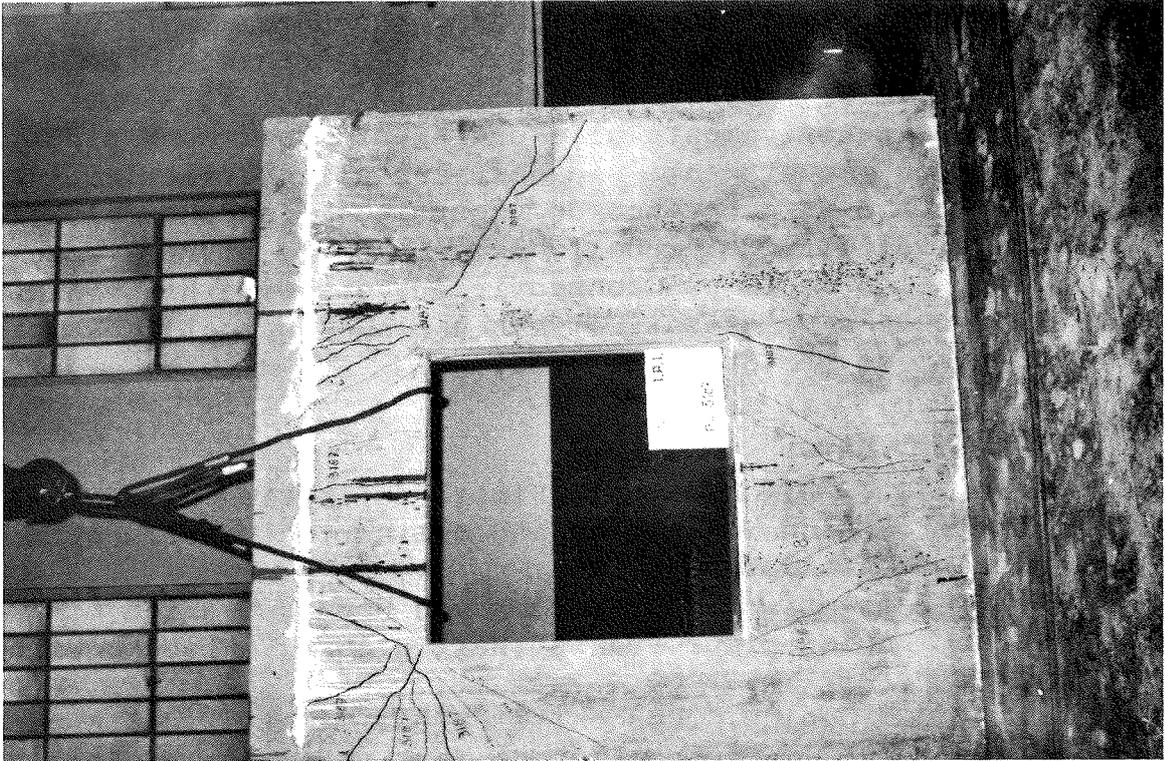


FIG. 10

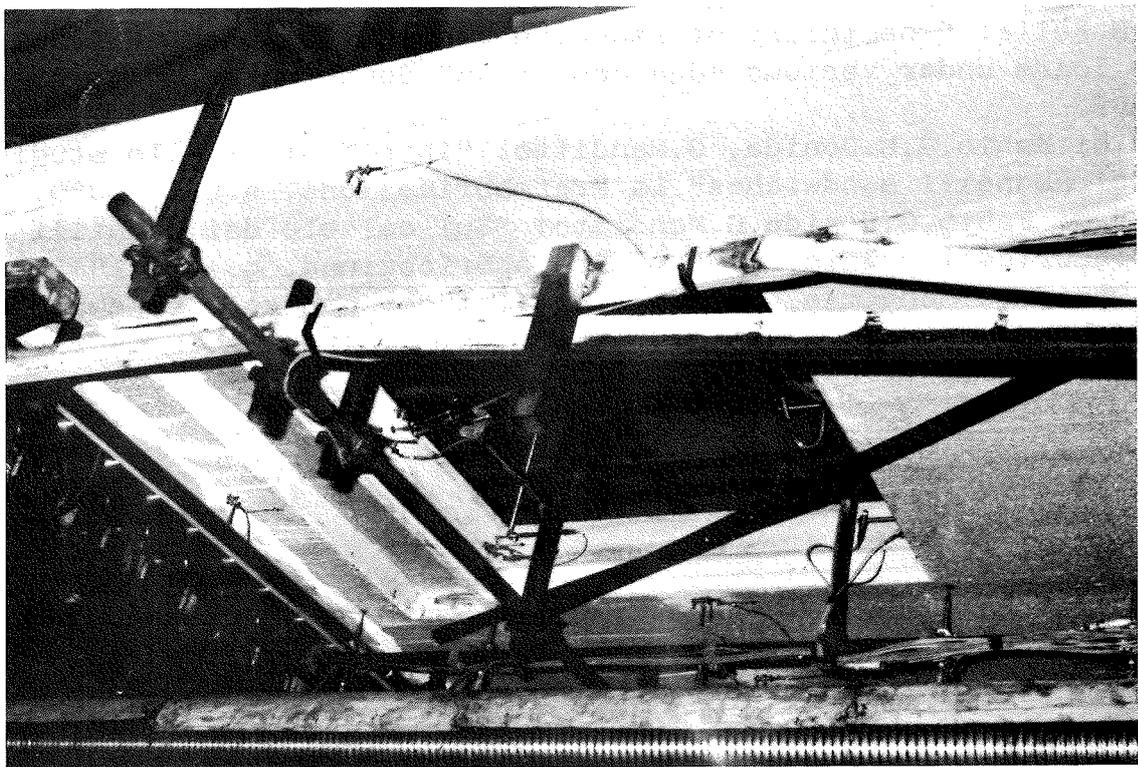


FIG. 9

#### 4. CONCLUSIONI

In tab.1, con riferimento ai punti del pannello indicati in fig.6 vengono confrontati, limitatamente al comportamento elastico, i risultati degli spostamenti ottenuti per via sperimentale ed a mezzo del modello ad E.F.

Nelle figg.7 ed 8 relativamente alle posizioni H e C sono riportati i diagrammi carichi-spostamenti sia sperimentali che teorici.

I risultati mostrano un buon accordo (scarti dell'ordine del  $7 \div 11\%$ ) evidenziando la validità del modello usato. Appare altresì come una scelta oculata del modello può consentire di disporre di informazioni qualitativamente e quantitativamente analoghe a quelle deducibili da un'indagine su prototipo al vero.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- I) L.A.Schamit J.R.,G.R.Monforton: "Finite deflection discrete element analysis of sandwich plates and cylindrical shells with laminated faces". AIAA Journal 1969.
- II) R.Rosman: "Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Oeffnungareihen, Bauingenieur-Praxis", Heft n.65 - Verlag von Wilhelm Erns und Sohn, Berlin, 1965.
- III) G.Menditto,G.M.Donida,I.Rusconi Clerici: "Analisi delle pareti forate di irrigidimento con metodo degli elementi finiti" La Prefabbricazione,n.9, aprile 1974, n.10, maggio 1974, n.11, giugno 1974.
- IV) H.G.Allen: "Analysis and design of structural sandwich panels" Pergamon Press 1968.
- V) H.G.Allen: "Optimum design of sandwich struts and beams".
- VI) G.M.Folie: "The theory of sandwich panels subjected to trasverse loads under various edge condition" Southampton University 1967.
- VII) S.Di Fabio,G.M.Donida, G.Menditto: "Introduzione allo studio dei pannelli sandwiches" La Prefabbricazione, n.5-6, 1980.
- VIII) S.Di Fabio,G.Donida,G.Menditto: "Sul calcolo dei pannelli prefabbricati multistrato" La Prefabbricazione, n.7-8, 1982.
- IX) G.Donida,G.Menditto,A.Spada: "Analisi dei pannelli sandwich ed abachi d'uso" pag. c.51÷c.80. Atti del Congresso CTE 1982 sulla industrializzazione edilizia.

SULLA TRASMISSIONE DEL TAGLIO IN ELEMENTI  
BIDIMENSIONALI PIANI DI C.A. FESSURATI

Pietro G.GAMBAROVA

Prof. Straordinario di Tecnica delle Costruzioni  
Dipartimento di Ingegneria Strutturale  
Politecnico di Milano, Milano

SOMMARIO

La descrizione del comportamento a taglio del calcestruzzo fessurato può essere basata su leggi sforzi-spostamenti valide per l'interfaccia delle fessure, o su un approccio di tipo ipoelastico. Due modelli vengono presentati, cosiddetti il primo "delle fessure scabre" e il secondo "dei piani di contatto", e vengono mostrati alcuni risultati in tema di rigidità a taglio e di curve taglio/scorrimento.

SUMMARY

The analytical description of the shear behaviour of cracked concrete can be based on stress-displacement relations (valid at the crack interface) or on an hypoelastic approach. Two analytical models are here discussed, the first called "Rough Crack Model" and the second "Weak Plane Model", and some results are presented too, with reference to the shear stiffness and to the shear/slip curves.

1. NATURA DEL PROBLEMA

Negli elementi bidimensionali sottili di calcestruzzo armato, soggetti prevalentemente a tensioni membranali, lo stato fessurativo dovuto a particolari condizioni di carico o a coazioni (ritiro, sollecitazioni termiche, cedimenti vincolari) induce localmente caratteristiche di resistenza e rigidità che possono essere molto diverse da quelle del calcestruzzo integro. Ciò è particolarmente vero per la rigidità a taglio, rappresentata dal modulo (tangente)  $G$ , il cui valore tende ad essere penalizzato dall'apertura delle fessure, ma può comunque rappresentare (in presenza di adeguati valori di scorrimento) una frazione non trascurabile del valore elastico.

Sia la rigidità che la resistenza a taglio del calcestruzzo fessurato sono assicurate essenzialmente dal meccanismo di ingranamento delle particelle di aggregato sporgenti dalle facce delle fessure, e la valutazione delle suddette caratteristiche del materiale comporta un attento studio dell'interazione fra le tensioni e gli spostamenti relativi (apertura e scorrimento) all'interfaccia delle fessure.

Le numerose prove sperimentali eseguite negli ultimi quindici anni su provini di calcestruzzo (armato o no), prefessurati con una sola fessura (si vedano ad esempio i lavori (I-VII)) hanno permesso di riconoscere in modo esauriente il ruolo dei vari fattori che intervengono nella trasmissione del taglio per ingranamento. Essi sono: gli spostamenti relativi fra le facce della fessura (due nel caso di stato tensionale piano, Fig.1), le tensioni di interfaccia (due, l'una tangenziale e l'altra normale, di "confinamento"), la resistenza a compressione del calcestruzzo, la granulometria e il tipo degli inerti, la natura dei carichi (monotonici oppure ripetuti-pulsanti, alternati). Volutamente non si fa qui alcun riferimento all'armatura

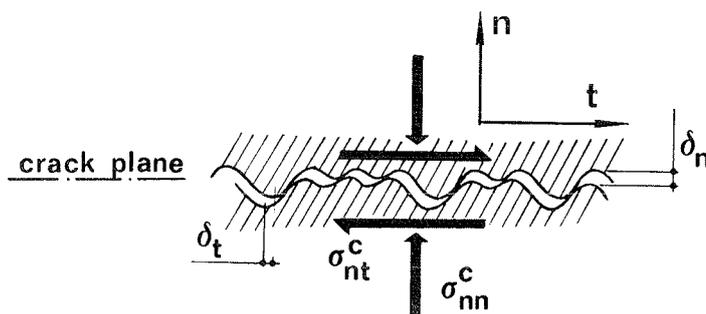
(peraltro presente - con barre esterne o interne aderenti-in molte prove sperimentali) in quanto il contributo dell'armatura alla trasmissione dei carichi per ingranamento può essere studiato separatamente, e comporta l'analisi di problemi non direttamente riguardanti l'ingranamento (quali l'effetto bietta-dowel action - all'interfaccia delle fessure, e l'effettiva rigidità assiale delle barre fra fessura e fessura, nel caso di armatura aderente). L'analisi sperimentale sistematica del comportamento statico di una singola fessura, e dei parametri cinematici e fisici che lo condizionano, permette di riconoscere che per un campo fessurativo regolare (fessure parallele, equispaziate, ravvicinate) le leggi tensioni/spostamenti valide per una fessura possono essere considerate come vere e proprie leggi costitutive del materiale "calcestruzzo fessurato" a condizione che si trascurino le deformazioni del calcestruzzo solido compreso fra le fessure e che agli spostamenti relativi fra le facce di ogni fessura vengano idealmente sostituite "deformazioni equivalenti" ottenute "distribuendo" i suddetti spostamenti su una lunghezza pari al passo delle fessure. I risultati sperimentali non solo rappresentano un irrinunciabile termine di confronto, ma nel contempo permettono l'individuazione dei parametri di cui qualsiasi modellazione analitica deve tener conto.

Proprio con riferimento alla modellazione analitica, al cui impulso molto ha contribuito l'uso dell'analisi con il Metodo degli Elementi Finiti (che offre la possibilità di aggiornare le caratteristiche di rigidità dei materiali, all'evolvere dei carichi) tre differenti approcci possono essere adottati: (a) è possibile formulare leggi empiriche che leghino il taglio trasmesso attraverso una fessura allo scorrimento fra le facce, con l'apertura della fessura in veste di parametro (I,II,III,IV,V); (b) è possibile formulare leggi tensioni / spostamenti basate su modelli micromeccanici più o meno sofisticati (VI,VIII,IX);(c) è possibile inquadrare il comportamento del calcestruzzo fessurato (soggetto o meno a taglio) in un'ottica più generale, in cui la fessurazione è considerata come una situazione limite in trazione, con tensione di trazione tendente a zero e allungamento specifico tendente all'infinito (XI).

Nel seguito vengono illustrati due modelli analitici: il primo (cosiddetto "delle fessure scabre") si basa su leggi tensioni spostamenti di tipo finito, e permette quindi la valutazione in forma chiusa sia delle tensioni di interfaccia, che dei coefficienti della matrice di rigidità del calcestruzzo fessurato; il secondo (cosiddetto "dei piani di contatto") permette la valutazione per via incrementale delle tensioni di interfaccia.

Ambedue i modelli portano a risultati in buon accordo con quelli delle prove sperimentali, come verrà mostrato nel Par.4, in riferimento ad esperienze di Paulay e Loeber, Walraven e Reinhardt, White e Gergely. Preliminarmente è conveniente definire le matrici di rigidità  $\underline{B}$  e  $\underline{E}$ , rispettivamente della fessura e del calcestruzzo fessurato (si faccia riferimento a Fig.1 per i simboli):

Fig.1 - Morfologia di una fessura: tensioni e spostamenti all'interfaccia.



$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^C \\ d\sigma_{nt}^C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\delta_n \\ d\delta_t \end{pmatrix}, \quad d\sigma^C = \underline{B} d\delta \quad (1)$$

dove  $B_{11} = \partial F_n / \partial \delta_n$ ,  $B_{12} = \partial F_n / \partial \delta_t$ ,  $B_{21} = \partial F_t / \partial \delta_n$ ,  $B_{22} = \partial F_t / \partial \delta_t$  se le relazioni sforzi/spostamenti sono di tipo finito:  $\sigma_{nn}^C = F_n(\delta_n, \delta_t)$ ,  $\sigma_{nt}^C = F_t(\delta_n, \delta_t)$ ;

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^C \\ d\sigma_{tt}^C \\ d\sigma_{nt}^C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^{CR} \\ d\varepsilon_{tt}^{CR} \\ d\gamma_{nt}^{CR} \end{pmatrix}, \quad d\sigma^C = \underline{E} d\varepsilon^{CR} \quad (2)$$

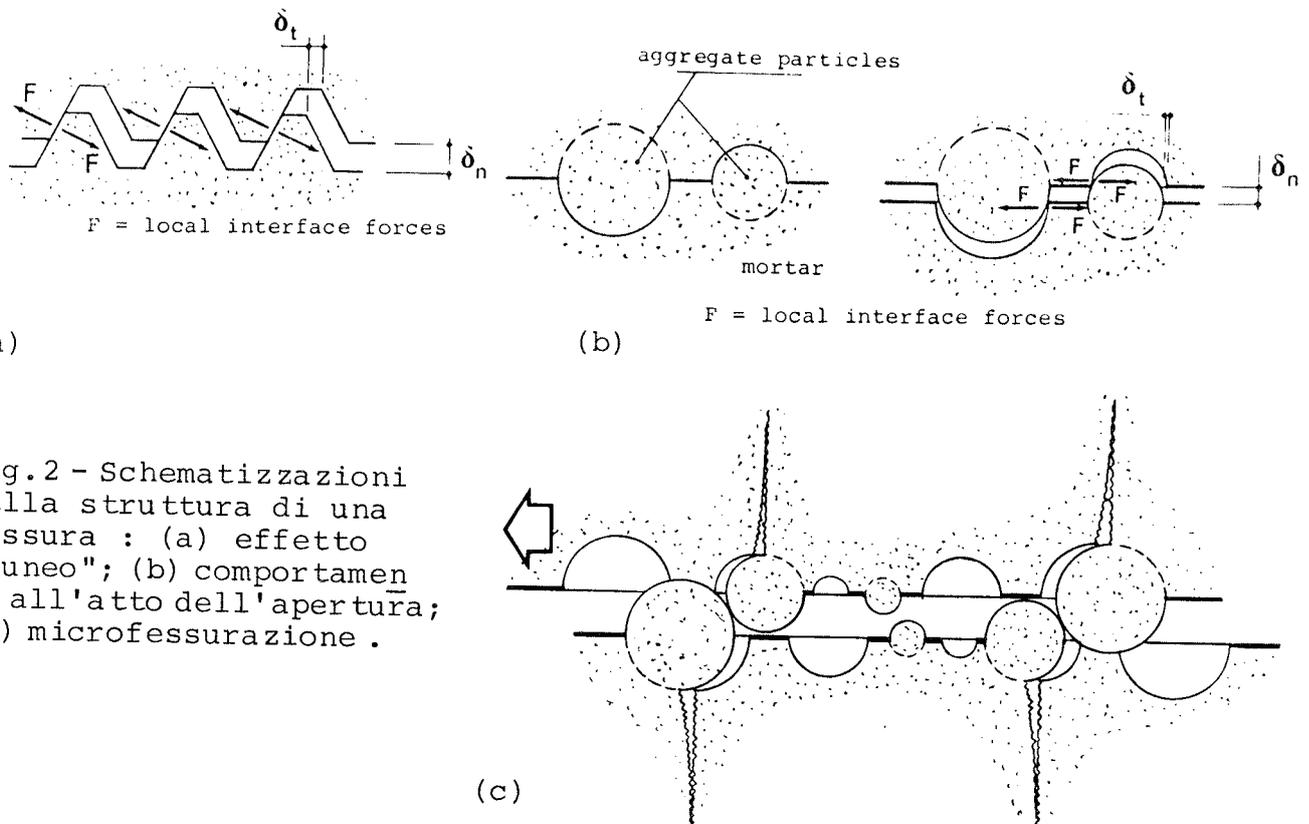
dove  $E_{12} = E_{21} = E_{22} = E_{23} = E_{32} = 0$ ,  $E_{11} = pB_{11}$ ,  $E_{13} = pB_{12}$ ,  $E_{31} = pB_{21}$ ,  $E_{33} = pB_{22}$ ; inoltre:  $d\varepsilon_{nn}^{CR} = d\delta_n/p$ ,  $d\gamma_{nt}^{CR} = d\delta_t/p$ ,  $d\varepsilon_{tt}^{CR} = 0$ , dove  $p$  è il passo delle fessure.

## 2. MODELLO DELLE FESSURE SCABRE

In un elemento di calcestruzzo soggetto a stato piano di tensioni e con azioni interne variabili con continuità, le fessure tendono ad essere macroscopicamente rettilinee (ortogonali alla direzione principale 1), ma localmente irregolari (Figure 1,2). Tale irregolarità è dovuta sia alle particelle di aggregato sporgenti dalle facce, sia alla natura stessa delle fessure che nascono come microfessure isolate (seppure appartenenti ad una ristretta banda microfessurata) e orientate casualmente, per fondersi poi in macrofessure continue. Le fessure sono pertanto scabre, e la distribuzione casuale delle asperità permette di ritenere le tensioni di interfaccia come funzioni regolari degli spostamenti  $\delta_n$  e  $\delta_t$ .

Con l'aiuto dei modelli micromeccanici molto semplificati di Fig.2 è possibile riconoscere le seguenti caratteristiche di una fessura scabra:

- le tensioni di interfaccia sono essenzialmente legate al rapporto  $r$  fra gli spostamenti  $\delta_t$  e  $\delta_n$  (Fig.2a);
- per valori piccoli del rapporto  $r$  (quali si verificano ad esempio all'atto dell'apertura della fessura) la trasmissione di taglio non richiede apprezzabile confinamento (Fig.2b);
- per valori dell'apertura  $\delta_n$  dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni degli inerti grossi, il contatto fra le facce si annulla e così le tensioni di interfaccia;
- al crescere del rapporto  $r$  la tensione  $\sigma_{nt}^C$  deve presentare un asintoto o un ramo discendente, a causa dell'apertura di microfessure fra particelle di inerte e malta, e nella malta stessa, e dello sgretolamento locale della malta schiacciata dagli inerti (Fig.2c);



- un aumento dell'apertura della fessura (a parità di scorrimento) diminuisce i punti di contatto all'interfaccia e quindi comporta una diminuzione del modulo delle tensioni  $\sigma_{nn}^c$  e  $\sigma_{nt}^c$ :

$$\frac{\partial |\sigma_{nn}^c|}{\partial \delta_n}, \frac{\partial |\sigma_{nt}^c|}{\partial \delta_n} < 0 \text{ sempre}$$

- un aumento dello scorrimento (a parità di apertura) aumenta i punti di contatto all'interfaccia e quindi comporta un aumento del modulo delle tensioni  $\sigma_{nn}^c$  e  $\sigma_{nt}^c$  :

$$\frac{\partial \sigma_{nn}^c}{\partial \delta_t} \geq 0 \quad \delta_t \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma_{nt}^c}{\partial \delta_t} \geq 0 \text{ sempre}$$

Concludendo, alle tensioni  $\sigma_{nt}^c$  e  $\sigma_{nn}^c$  possono essere date le seguenti formulazioni:

$$\sigma_{nt}^c = F_1 \left( \frac{\delta_n}{D_a} \right) \cdot F_2(r) \quad (3)$$

$$\sigma_{nn}^c = F_3 \left( \frac{\delta_n}{D_a} \right) \cdot F_4(r^2) = F_3'(\delta_n) \cdot F_4'(r) \cdot \sigma_{nt}^c \quad (4)$$

L'esame dei dati sperimentali di Paulay e Loeber (I) - si veda (IX) e di Daschner e Kupfer (VII) - si veda (X) - permettono di scrivere le equazioni (3) e (4) nel modo seguente:

$$\sigma_{nt}^c = \tau_o \left( 1 - \sqrt{\frac{2\delta_n}{D_a}} \right) r \frac{a_3 + a_4 |r|^3}{1 + a_4 r^4} \quad (5)$$

$$\sigma_{nn}^c = - a_1 a_2 \frac{\delta_t \sigma_{nt}^c}{(\delta_n^2 + \delta_t^2)^q} = - \frac{a_1 a_2}{\delta_n^{2q-1}} \frac{r}{(1+r^2)^q} \sigma_{nt}^c \quad (6)$$

dove  $a_1 a_2 = 0.62$ ,  $a_3 = (2.45/\tau_0) \text{ N/mm}^2$ ,  $a_4 = 2.44(1-4/\tau_0 \text{ N/mm}^2)$ ,  $\tau_0 = 0.25 \div 0.30 f'_c$ ,  $q = 0.25$ .

Il coefficiente  $\tau_0$  rappresenta la resistenza a taglio della fessura nel caso limite di apertura nulla ( $\delta_n = 0, r \rightarrow \infty$ ). Nell'equazione (5) si è supposto che lungo la fessura la granulometria sia la stessa dell'inerte, e che gli inerti rispettino la curva di Fuller (X). Quest'ipotesi va considerata come una prima approssimazione, perché la fessura è certamente più "liscia" di quanto la granulometria degli inerti possa indicare (la fessura si propaga anche nella pasta di cemento).

In Fig.3 sono rappresentate qualitativamente le curve sperimentali taglio/scorrimento, ad apertura costante della fessura (Fig.3a) e ad azione di confinamento costante (Fig.3b). La forte dipendenza della tensione  $\sigma_{nt}^c$  dal rapporto  $r$  è bene evidenziata in Fig.4.

Il confronto teorico-sperimentale è rimandato al Par.4.

Le equazioni (5) e (6) permettono per derivazione di ottenere le espressioni dei coefficienti della matrice di rigidezza  $\underline{E}$  del calcestruzzo fessurato:

$$E_{33} = \frac{\partial \sigma_{nt}^c}{\partial \gamma_{nt}^{CR}} = p \frac{\partial \sigma_{nt}^c}{\partial \delta_t} = \frac{\tau_0}{\epsilon_{nn}^{CR}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2p}{D_a} \epsilon_{nn}^{CR}} \right) \cdot F'(r) \quad (> 0 \text{ sempre})$$

$$E_{31} = \frac{\partial \sigma_{nt}^c}{\partial \epsilon_{nn}^{CR}} = p \frac{\partial \sigma_{nt}^c}{\partial \delta_n} = - \frac{\tau_0}{\epsilon_{nn}^{CR}} \left[ F(r) \cdot \sqrt{\frac{p}{2D_a} \epsilon_{nn}^{CR}} + \left( 1 - \sqrt{\frac{2p}{D_a} \epsilon_{nn}^{CR}} \right) r F'(r) \right] \quad (\leq 0 \text{ per } r \geq 0)$$

$$E_{11} = \frac{\partial \sigma_{nn}^c}{\partial \epsilon_{nn}^{CR}} = p \frac{\partial \sigma_{nn}^c}{\partial \delta_n} = |\sigma_{nn}^c| \cdot \left[ \left| \frac{E_{31}}{\sigma_{nt}^c} \right| + \frac{2q}{\epsilon_{nn}^{CR} (1+r^2)} \right] \quad (> 0 \text{ sempre})$$

$$E_{13} = \frac{\partial \sigma_{nn}^c}{\partial \gamma_{nt}^{CR}} = p \frac{\partial \sigma_{nn}^c}{\partial \delta_t} = \sigma_{nn}^c \left[ \frac{1}{\gamma_{nt}^{CR}} \left( 1 - 2q \frac{r^2}{1+r^2} \right) + \frac{E_{33}}{\sigma_{nt}^c} \right] \quad (\leq 0 \text{ per } r \geq 0)$$

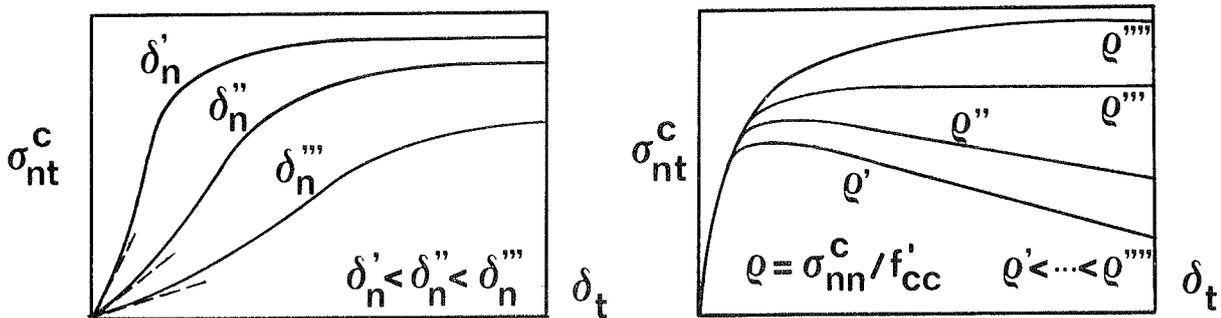
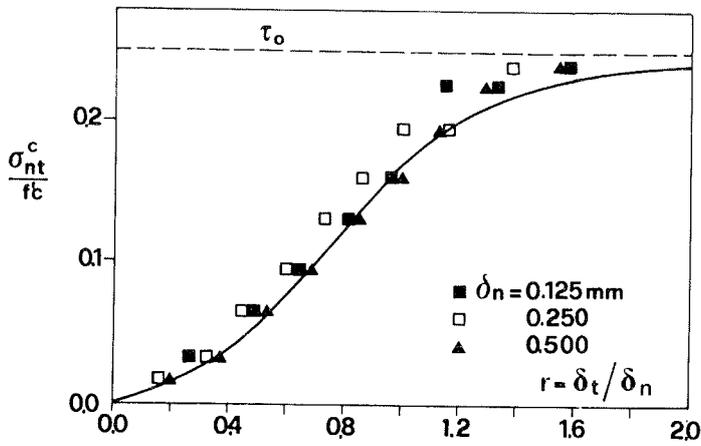


Fig.3 - Curve di risposta taglio/scorrimento ad apertura costante (a) e a confinamento costante (b).



(si è trascurato  $\sqrt{2\delta/D}$  rispetto alla unità, nell'eq. (5))<sup>n</sup> <sub>a</sub>

$$f'_c = 31 \text{ N/mm}^2, D_a = 19 \text{ mm}$$

◀ Fig.4 - Confronto teorico-eq. (5) - /sperimentale (I) : si osservi la forte dipendenza delle curve  $\sigma_{nt}^c$  ( $\delta_t$ ) dal rapporto  $r$ .

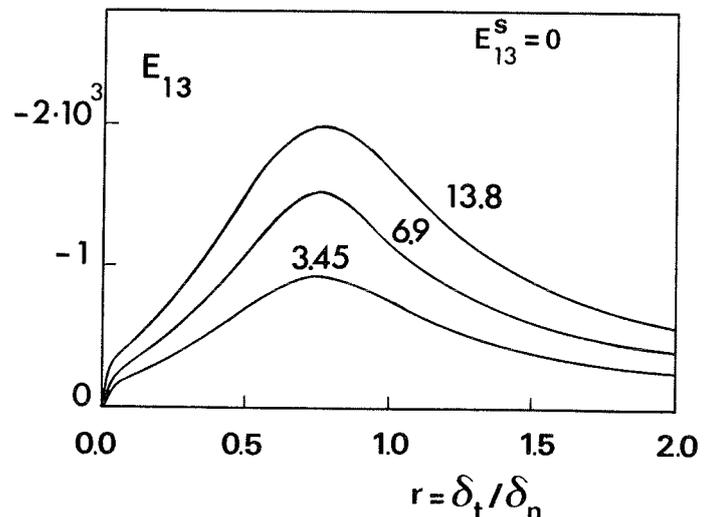
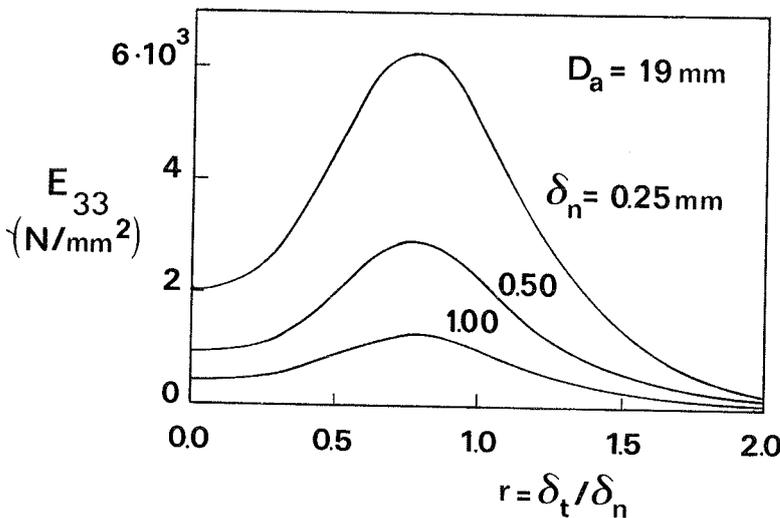
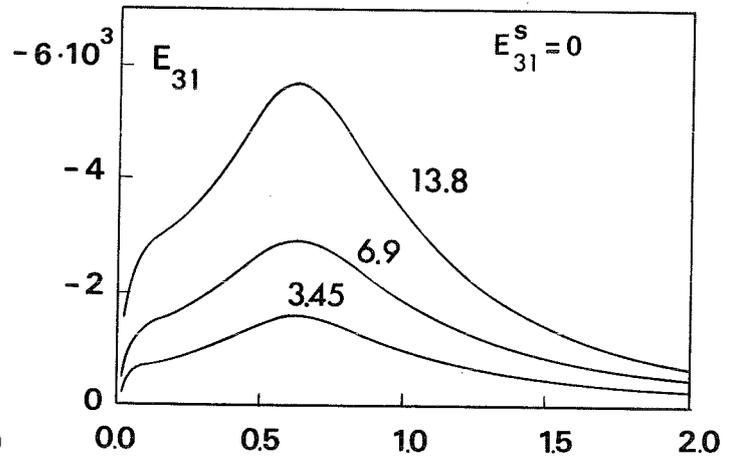
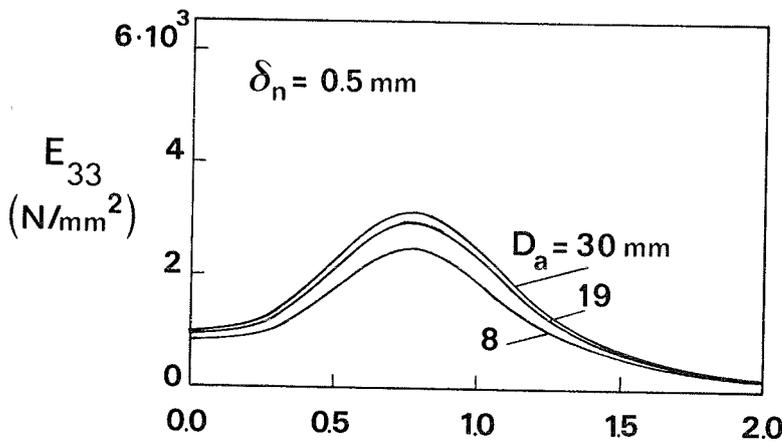
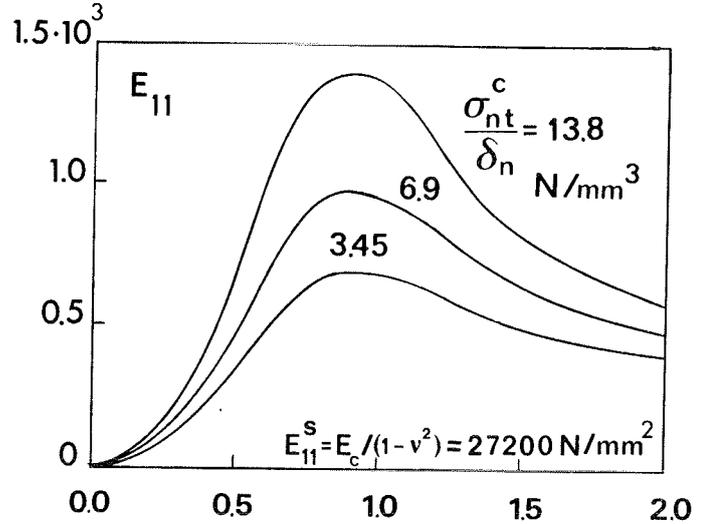
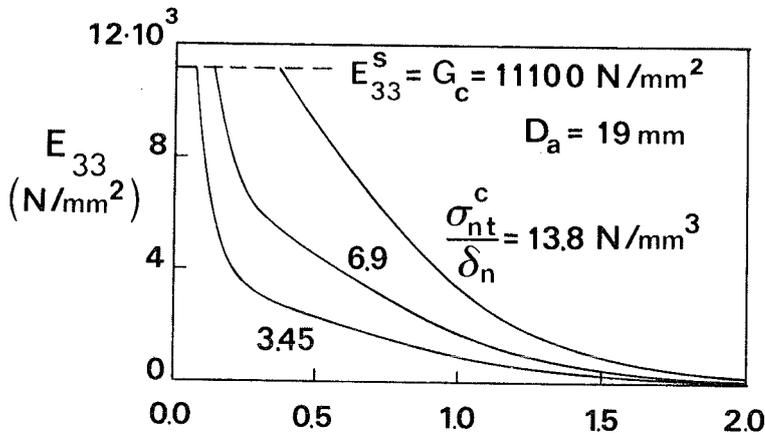


Fig.5 - Curve del coefficiente  $E_{33}$   
 $f'_c = 31 \text{ N/mm}^2, D_a = 19 \text{ mm}$

Fig.6 - Curve dei coefficienti  $E_{11}, E_{31}, E_{13}$ .

dove  $r = \gamma_{nt}^{CR} / \epsilon_{nn}^{CR}$

$$F(r) = r \frac{a_3 + a_4 |r|^3}{1 + a_4 r^4}, \quad F'(r) = \frac{a_3 + 4 a_4 |r|^3 - 3 a_3 a_4 r^4}{(1 + a_4 r^4)^2}.$$

In prima (ottima) approssimazione si possono confondere le deformazioni dovute alla fessurazione ( $\epsilon_{nn}^{CR}, \gamma_{nt}^{CR}$ ) con le deformazioni totali ( $\epsilon_{nn}, \gamma_{nt}$ ). In Fig.5 sono riportate le curve del coefficiente  $E_{33}^c$  per tre valori dell'inverso della dilatanza della fessura  $\delta_n / \sigma_{nt}^c$  (Fig.5a), della dimensione massima degli inerti  $D_a$  (Fig.5b), della apertura delle fessure  $\delta_n$  (Fig.5c).

Il passo  $p$  delle fessure è assunto pari a circa  $10 D_a$  ( $p=200$  mm,  $D_a=19$  mm). Si osservi come nei vari casi esaminati il coefficiente  $E_{33}^c$  assuma valori compresi fra il 10% e il 60% del modulo elastico a taglio  $G_c$  del calcestruzzo integro (Fig.5b,c), e come  $E_{33}^c$  possa mantenere valori molto prossimi o eguali a quello elastico anche in presenza di elevati valori di taglio e di apertura delle fessure (ad esempio  $\sigma_{nt}^c = 6.9$  N/mm<sup>2</sup>,  $\delta_n = 0.5$  mm,  $r \approx 0.35$  mm, Fig. 5a).

Per i tre suddetti casi di dilatanza costante in Fig.6 sono riportate le curve dei coefficienti  $E_{11}, E_{31}, E_{13}$ : il coefficiente  $E_{11}$  assume sempre valori alquanto bassi (Fig.6a), come l'intuizione stessa suggerisce dovendo essere la fessura poco rigida trasversalmente; il coefficiente  $E_{31}$  è dello stesso ordine di grandezza di  $E_{33}$  (Fig.6b) e ciò denota un forte accoppiamento taglio/apertura, mentre il coefficiente  $E_{13}$  (Fig.6c) assume valori alquanto bassi (l'accoppiamento confinamento/scorrimento è meno forte del precedente).

Le matrici  $\underline{B}$  e  $\underline{E}$  non sono comunque simmetriche.

### 3. MODELLO DEI PIANI DI CONTATTO

La natura del calcestruzzo, che è un materiale composito essenzialmente fragile, costituito da inclusioni rigide (le particelle di inerte) e da una matrice molto più deformabile (la pasta di cemento), comporta che la distribuzione locale delle tensioni sia ben lungi dall'essere uniforme. In particolare le tensioni nella pasta di cemento raggiungono i valori più elevati nei sottili strati di pasta compresi fra particelle di inerte adiacenti, e tali strati possono essere considerati come "piani preferenziali" per la localizzazione della microfessurazione, a condizione che siano sede di sforzi di trazione (si veda il semplice modello di Fig.7). Si può pertanto affermare che il comportamento del calcestruzzo in regime di prevalente trazione è strettamente legato al comportamento lungo i piani preferenziali di microfessurazione, nel seguito indicati con la più generale denominazione di "piani di contatto". In un'ottica microscopica ogni punto di calcestruzzo è caratterizzato da un numero limitato di piani di contatto o anche da nessun piano. In un'ottica macroscopica tutte le giaciture passanti per un punto possono essere considerate come piani di contatto (Fig.8), in quanto la distribuzione di tali piani è localmente casuale.

Immaginando ora di non fare distinzione - su ogni piano di contatto - fra le tensioni "effettive" a livello microscopico, e le tensioni "medie" a livello macroscopico, il comportamento statico di ogni piano può essere descritto con leggi costitutive del seguente tipo (Fig.9):

$$\bar{\sigma}_n = F_n(\bar{\epsilon}_n, \bar{\gamma}_{nt}), \quad \bar{\tau}_{nt} = F_t(\bar{\epsilon}_n, \bar{\gamma}_{nt}) \quad (7,8)$$

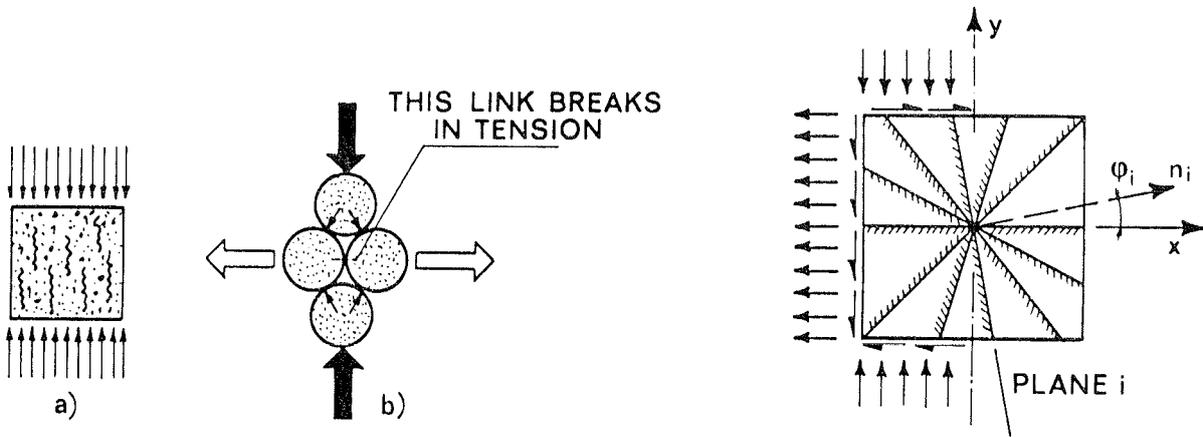


Fig.7 - Esempificazione dei piani di contatto a livello microscopico. Fig.8 - Piani di contatto a livello macroscopico.

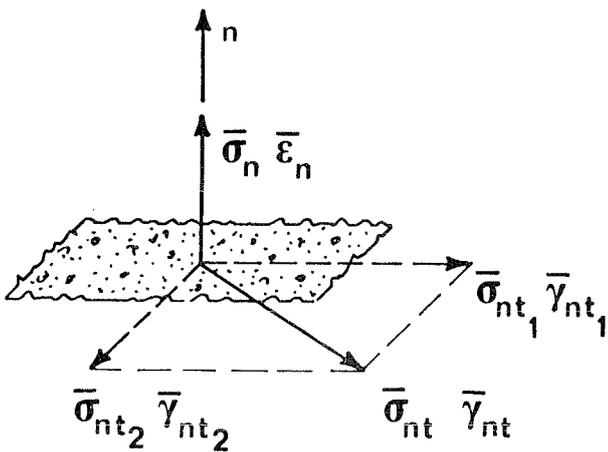


Fig.9 - Tensioni e deformazioni lungo un piano di contatto.

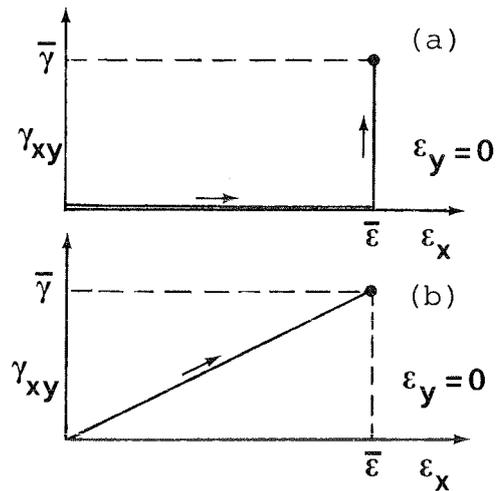


Fig.11 - Storie di deformazione: (a) tutti i piani di contatto risultano inizialmente caricati in trazione ( $\epsilon_n > 0$  per  $\gamma_{xy} = 0$ ); (b) fin dall'inizio alcuni piani risultano caricati in trazione ed altri in compressione ( $\epsilon_n < 0$ ).

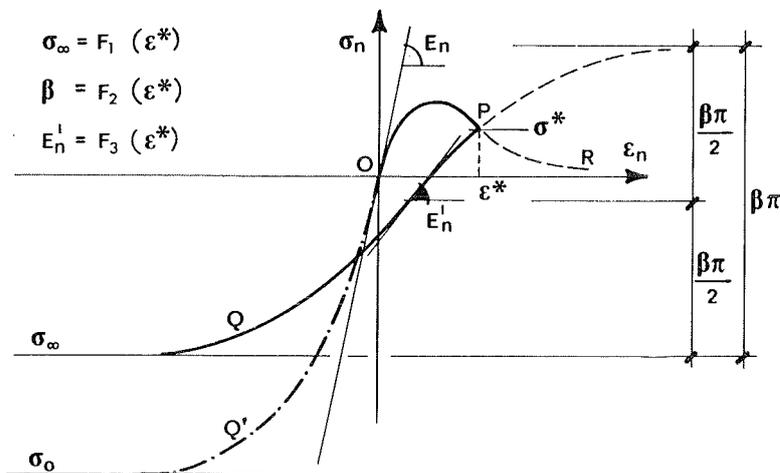


Fig.10 - Legge  $\sigma_n(\epsilon_n)$  per i casi di: piano caricato in trazione (OPR), piano caricato in compressione (OQ'), piano che venga scaricato (PQ).

Dato che in ogni piano infinite sono le direzioni possibili per  $\bar{\gamma}_{nt}$  e  $\bar{\gamma}_{nt}$ , l'introduzione di tali due parametri comporterebbe difficili problemi analitici e computazionali; pertanto, per ragioni di semplicità, l'eq. (8) non viene introdotta e nell'equazione (7) viene lasciata cadere l'eventuale dipendenza da  $\bar{\gamma}_{nt}$ . Quindi ogni piano di contatto risulta caratterizzato da una legge "monoassiale", che riguarda esclusivamente la tensione normale  $\sigma_n$  e la deformazione normale  $\epsilon_n$ . A parziale giustificazione delle suddette semplificazioni si può osservare che lungo le microfessure l'apertura tende a prevalere rispetto allo scorrimento (quindi  $\epsilon_n \gg \bar{\gamma}_{nt}$ ), così come sempre avviene per le fessure strette. Peraltro l'accoppiamento sforzo normale/scorrimento è piuttosto limitato anche nel caso delle fessure (si vedano i valori del coefficiente  $E_{13}$  in Fig. 6c), così come ragionevolmente ha da essere per gli stati tensionali precedenti la microfessurazione.

Si ammette infine che ciascun piano sia cinematicamente indipendente dagli altri, ipotesi questa che è accettabile per i materiali che presentano un gran numero di vuoti (come il calcestruzzo).<sup>(1)</sup> L'equazione (7) può essere scritta nel modo seguente:

$$\sigma_n = C_n(\epsilon_n) \epsilon_n \quad (9)$$

Facendo riferimento ad uno stato tensionale piano, ove siano assegnate le deformazioni  $\epsilon_{km}$  ( $k, m = 1, 2$ ) in un opportuno riferimento, e volendo valutare le tensioni  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) in altro riferimento, valgono le seguenti relazioni:

$$\epsilon_n = n_k n_m \epsilon_{km}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C_n \epsilon_n n_i n_j d\phi \quad \text{ovvero} \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C_n n_k n_m n_i n_j \epsilon_{km} d\phi$$

dove  $n_k n_m n_i n_j$  sono coseni direttori. Le tensioni  $\sigma_{ij}$  vanno valutate per integrazione su tutti i possibili piani, identificati dall'anomalia  $\phi$  rispetto ad uno degli assi di riferimento dello stato tensionale (Fig.8).

Passando alla forma incrementale:

$$d\sigma_{ij} = E_{ijklm} d\epsilon_{km} \quad \text{con} \quad E_{ijklm} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( C_n + \frac{dC_n}{d\epsilon_n} \right) n_i n_j n_k n_m d\phi \quad (10, 10')$$

dove la matrice  $E$  è la matrice di rigidezza del materiale, considerato come un sistema di piani di contatto.

Per descrivere il comportamento  $\sigma_c(\epsilon_c)$  del calcestruzzo in trazione uniassiale, comprendendo anche lo strain softening, basta dare alla equazione (9) una formulazione del seguente tipo (Fig.10, ramo OPR):

(1) Per un'illustrazione completa del metodo dei piani di contatto, in relazione anche ad altri metodi più classici per la descrizione del comportamento non lineare del calcestruzzo soggetto a prevalente trazione si rimanda a (XI).

$$\sigma_n = E_n e^{-\varepsilon_n/\bar{\varepsilon}} \varepsilon_n \quad (11)$$

dove il parametro  $E_n$  rappresenta la pendenza della funzione  $\sigma_n = C_n \varepsilon_n$  per piccoli valori di  $\varepsilon_n$ , cioè per un comportamento elastico del materiale. In tale ambito la legge (11) si riduce a  $\sigma_n = E_n \varepsilon_n$ , cui corrisponde il valore  $E = E_n/3$  del modulo di Young, e il valore  $\nu = 0.33$  del modulo di Poisson. Pertanto, per descrivere il comportamento elastico del calcestruzzo, è necessario assegnare a  $E_n$  il valore  $3E_c$ , e per correggere il valore del modulo di Poisson (da 0.33 a  $0.18 \pm 0.20$ ) occorre introdurre opportune deformazioni volumetriche - si veda (XI).

Si pensi ora ad una storia di deformazioni (Fig.11a) che preveda: (a) trazione ( $0 < \varepsilon_x < \bar{\varepsilon}$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ); (b) taglio ( $\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}$ ,  $0 < \gamma_{xy} < \bar{\gamma}$ ). Nella fase (a) tutti i piani di contatto si caricano in trazione secondo l'eq.(11) (Fig.10, ramo OP); nella fase (b) alcuni piani si scaricano (Fig.10, ramo PQ), mentre altri continuano a caricarsi in trazione (Fig.10, ramo PR). Occorre pertanto formulare una legge  $\sigma_n(\varepsilon_n)$  per il ramo PQ:

$$\sigma_n = -a + \beta \text{ATAN} \left[ E'_n (\varepsilon_n - b) / \beta \right] \quad (12)$$

Si consideri ora una storia di deformazioni (Fig.11b) che preveda trazione e taglio applicati contemporaneamente ( $0 < \varepsilon_x < \bar{\varepsilon}$ ,  $0 < \gamma_{xy} < \bar{\gamma}$ ): in tal caso alcuni piani si caricano in compressione (curva  $xyOQ'$ , Fig.10), mentre altri si caricano in trazione. Occorre formulare una legge  $\sigma_n(\varepsilon_n)$  anche per  $OQ'$ :

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} \text{ATAN} (\alpha \varepsilon_n) \quad \text{con } \alpha = \frac{E_n \pi}{\sigma_0} \quad (13)$$

I parametri  $a, \beta, b, E'_n, \sigma_0$  sono funzioni di  $\sigma^*, \varepsilon^*, f'_{cc}$  (si veda (XI)). Tarando opportunamente i suddetti parametri è possibile da un lato ottenere la curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  in trazione uniassiale del calcestruzzo, dall'altro ottenere le curve di risposta  $\sigma_{nt}^c(\delta_t), \sigma_{nn}^c(\delta_t)$  del calcestruzzo fessurato, pur di assegnare la storia delle deformazioni equivalenti agli spostamenti lungo la fessura. Pertanto lo stato fessurativo è rappresentato dalla "coda" della curva  $\sigma_n(\varepsilon_n)$  con riferimento ai singoli piani di contatto, e dalla "coda" della curva  $\sigma_c(\bar{\varepsilon}_c)$  con riferimento al comportamento uniassiale del calcestruzzo.

Nel Paragrafo 4 sono state calcolate con le equazioni (11,12,13) le curve  $\sigma_{nt}^c(\delta_t)$  e  $\sigma_{nn}^c(\delta_t)$  relative a parecchie prove sperimentali di trasmissione del taglio per ingranamento degli inerti. Gli spostamenti sperimentali sono stati "distribuiti" su una lunghezza pari alla dimensione massima degli inerti  $D_a$ . Si è con ciò ritenuto che la fessura preformata dei modelli sperimentali nella realtà si presenti come una banda microfessurata di larghezza  $D_B$  eguale a  $D_a$ . L'integrale (10') è stato valutato numericamente facendo riferimento a 24 piani (Fig.12a,b): si osservi che l'orientamento dei piani rispetto agli assi di riferimento delle tensioni (o delle deformazioni imposte) è già di fatto irrilevante per 12 piani (in Fig.12a si può rilevare che lo scostamento è già tuttosommato limitato anche nel caso di 6 piani differentemente orientati).

In Fig.12b sono mostrate le curve  $\sigma_{nt}^c(\delta_t)$  per differenti numeri di piani di contatto; in Fig.12c risulta soddisfacente l'accordo fra curve teoriche e curve sperimentali.

Fig.12a - Curve taglio/scorri-  
mento per due diverse scelte  
dell'orientamento dei piani  
di contatto.

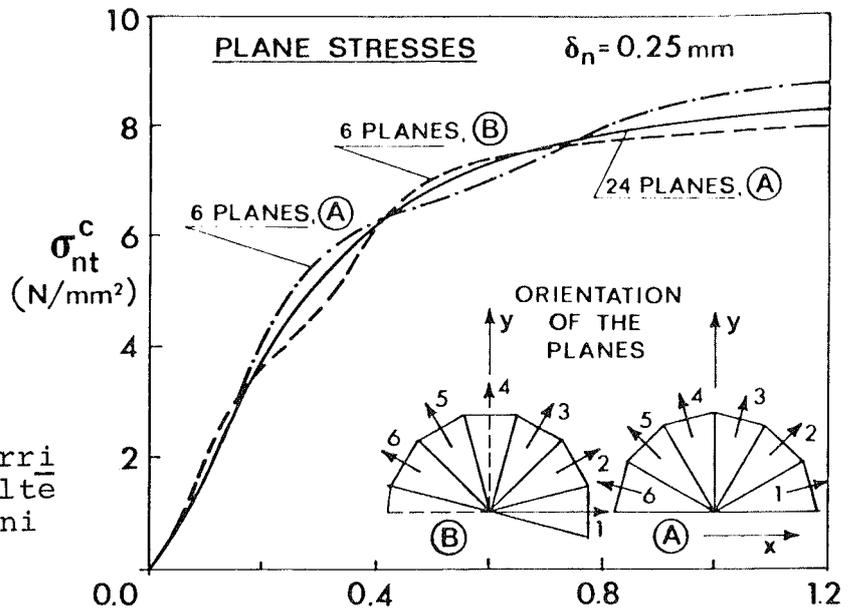


Fig.12b - Curve taglio/scorri-  
mento per tre diverse scelte  
del numero dei piani di con-  
tatto.

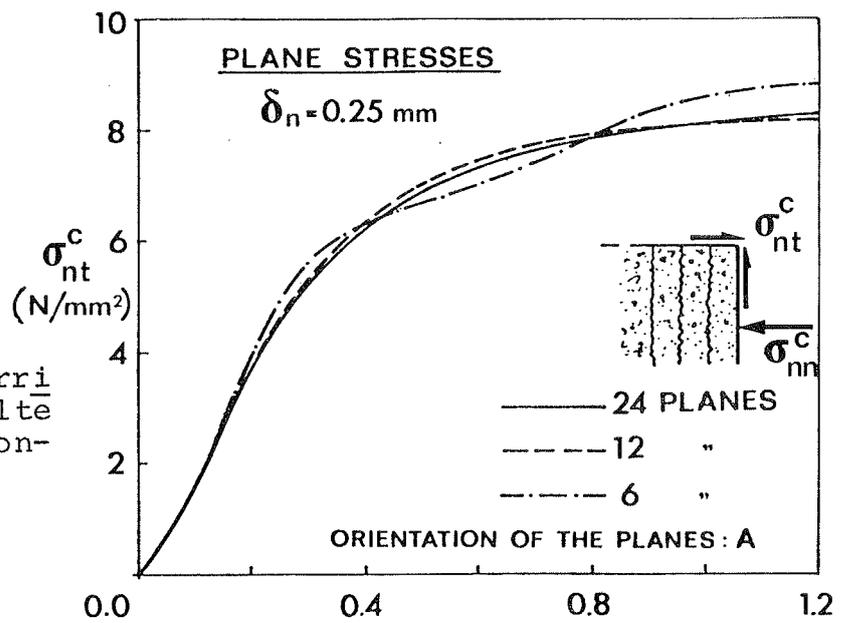


Fig.12c - Confronto teorico/spe-  
rimentale con i risultati di  
Paulay e Loeber (I).

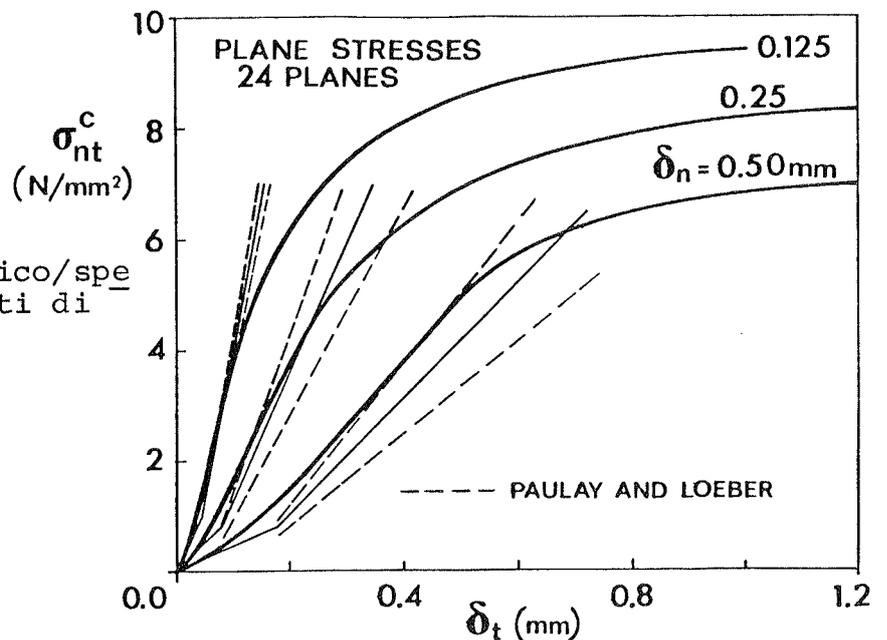


Fig.12 - Curve taglio/scorrimento per  $f'_{cc} = 37 \text{ N/mm}^2$ ,  $D_a = D_B = 19 \text{ mm}$ .

#### 4. CONFRONTI FRA RISULTATI TEORICI E SPERIMENTALI

I modelli illustrati nei precedenti paragrafi (nel seguito indicati con 1 e 2) sono stati messi a punto facendo riferimento ai risultati sperimentali ad apertura costante (I) e a confinamento costante (VII). Tuttavia i due modelli permettono di ottenere curve taglio/scorrimento e confinamento/scorrimento in buon accordo con quelle sperimentali anche per "storie" di spostamento  $\delta_n(\delta_t)$  del tutto diverse.

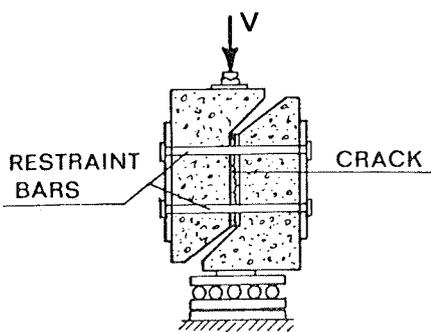
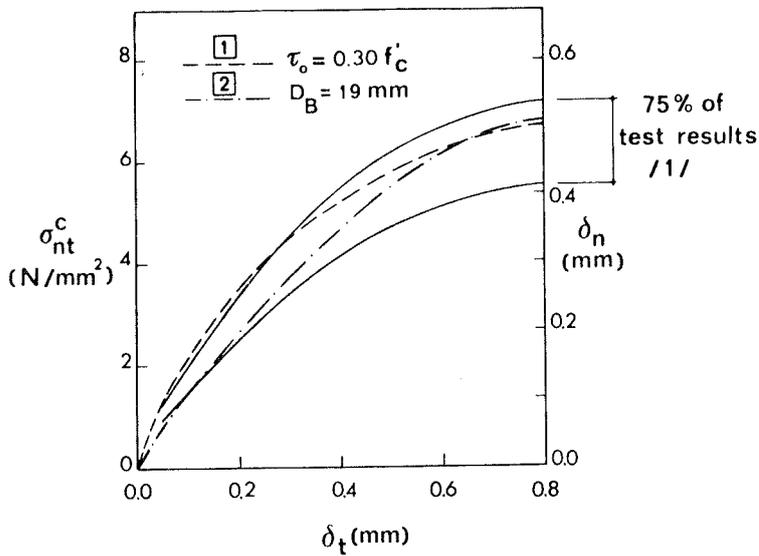
Le curve di Fig.13 si riferiscono ad una serie di prove a dilatanza costante della fessura ( $\delta_n/\sigma_{nt}^C = 0.0725 \text{ mm}^3/\text{N}$ ;  $\sigma_{nt}^C/\delta_n = 13.8 \text{ N/mm}^3$ ) (I): le curve a tratto pieno racchiudono il 75% dei risultati sperimentali, mentre la curva a tratteggio rappresenta la risposta a taglio  $\bar{\sigma}_t$  tenuta con il modello 1, risolvendo l'eq.(5) per  $\sigma_{nt}^C/\delta_n = 13.8 \text{ N/mm}^3$ : l'accordo teorico/sperimentale è più che buono. La curva a punto e tratto è stata ottenuta con il modello 2, adottando come cammino  $\delta_n(\delta_t)$  il cammino medio sperimentale: di nuovo l'accordo con i risultati sperimentali è più che buono. In (I) non sono date le curve confinamento/scorrimento o confinamento/taglio per la prova in questione.

Nelle figure 14,15,16,17 viene fatto riferimento ad alcune delle prove sperimentali presentate in (VI), dove gli autori forniscono le curve di tutti i parametri in gioco, cioè  $\sigma_{nt}^C(\delta_t)$ ,  $\sigma_{nn}^C(\delta_n)$ ,  $\delta_n(\delta_t)$ . Si tratta di prove eseguite su modelli in calcestruzzo prefessurati, con l'azione di confinamento esercitata da barre esterne (Fig.14a), non aderenti, ortogonali al piano della fessura e quindi non in grado di assorbire e trasmettere alcuna frazione dell'azione tagliante applicata. Vengono qui riportati i risultati di 5 prove su 7. Per ciascuno dei casi esaminati è riportata la curva  $\delta_n(\delta_t)$  sperimentale, che ha fornito la storia degli spostamenti per il calcolo delle risposte teoriche  $\sigma_{nt}^C(\delta_t)$  e  $\sigma_{nn}^C(\delta_t)$ .

L'accordo teorico/sperimentale è complessivamente buono per le curve taglio/scorrimento, e ciò vale sia per il modello 1 che per il modello 2. Per le curve confinamento/scorrimento l'accordo è ottimo nel caso del modello 1, mentre è solo parziale nel caso del modello 2. Occorre osservare che con il modello 1 il migliore accordo teorico/sperimentale è stato raggiunto in alcuni casi adottando per  $\tau_0$  il valore  $0.3 f'_c$  (Figure 14 e 16) e in altri il valore  $0.25 f'_c$  (Figure 15 e 17): la differenza fra i due valori non è certo maggiore della dispersione dei risultati sperimentali in prove di questo tipo.

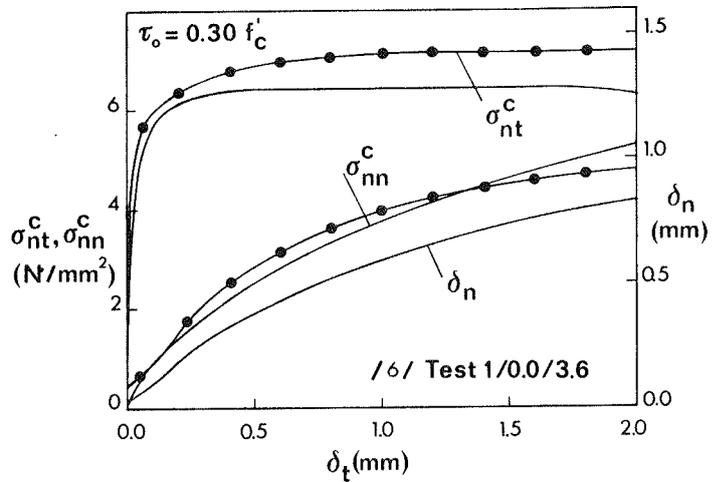
In Fig.18 vengono riportate le curve sperimentali  $\sigma_{nt}^C(\delta_t)$ ,  $\sigma_{nn}^C(\delta_n)$  e  $\delta_n(\delta_t)$  relative ad una delle prove (prova A1) illustrate in (III). Tali prove sono state eseguite su modelli prefessurati con armatura esterna, sollecitati con azione tagliante variabile in modo alternato: pertanto qui si fa riferimento solo ai risultati ottenuti durante il ramo ascendente del primo ciclo, dove tutti i parametri in gioco variano monotonicamente.

La prova A1 (che è l'unica di cui in (III) vengono forniti tutti i dati relativi ai vari parametri statici e cinematici) molto si avvicina al comportamento medio delle 6 prove caratterizzate dalla storia degli spostamenti di Fig. 18c. Sia per le curve  $\sigma_{nt}^C(\delta_t)$  che per le curve  $\sigma_{nn}^C(\delta_n)$  la dispersione dei risultati sperimentali è notevole (si vedano le punteggiate in Fig.18 a e b). L'accordo teorico/sperimentale è più che buono per le curve taglio/scorrimento (Fig.18a), mentre per le curve taglio/confinamento i due modelli rispettivamente sottovalutano (modello 1) e sopravvalutano (modello 2) il ruolo dello sforzo di confinamento (Fig.18b). Complessivamente, escludendo i piccoli valori del taglio, e cioè i piccoli valori dello scorrimento, il modello 1 dà valori di confinamento più prossimi a quelli del



◀ Fig.13 - Test a dilataza assegnata :  $\delta_n / \sigma_{nt}^c = 0.073 \text{ mm}^3/\text{N}$ .

—— (I)  
 - - - - - Rough Crack Model  
 - · - · - Piani di Contatto  
 $f'_c = 31 \text{ N/mm}^2$ ,  $D_a = D_B = 19 \text{ mm}$



▲ Fig.14b - Test 1/0.0/3.6 : apertura iniziale della fessura 0.0 mm .

◀ Fig.14a - Modello prefessurato dotato di barre esterne per il confinamento.

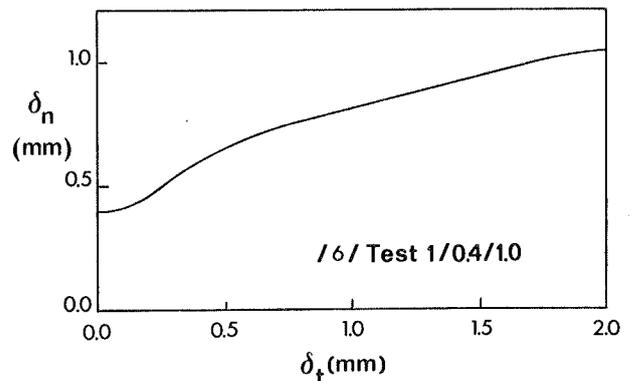
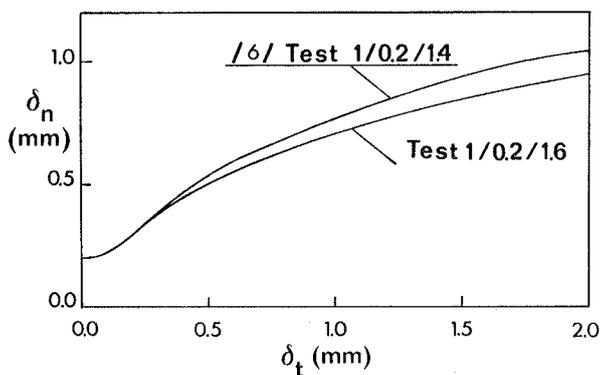
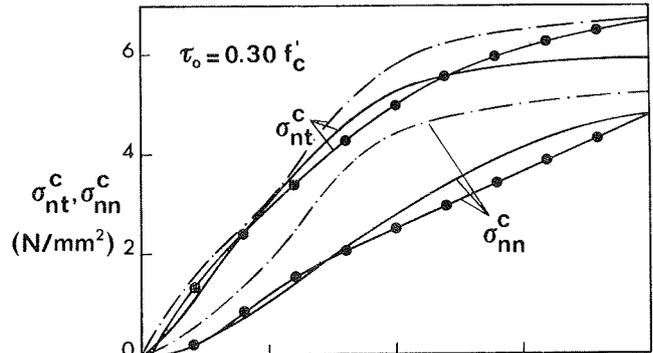
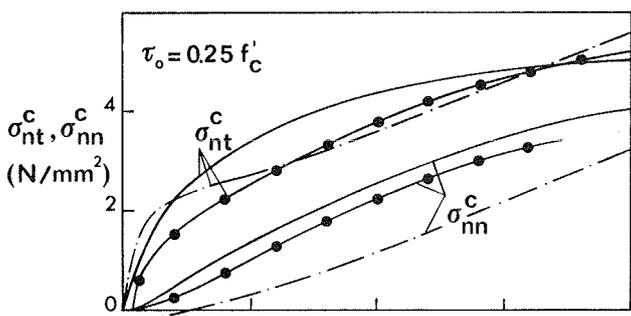


Fig.15 - Test 1/0.2/1.4 e 1/0.2/1.6 : apertura iniziale 0.2 mm .

Fig.16 - Test 1/0.4/1.0 : apertura iniziale 0.4 mm .

Figure 14,15,16,17 - Confronto teorico/sperimentale con i risultati di Walraven e Reinhardt (VI) :  $f'_c = 31 \text{ N/mm}^2$ ,  $D_a = D_B = 16 \text{ mm}$ .

●●●●●● (VI) ——— Rough Crack Model - - - - - Piani di Contatto

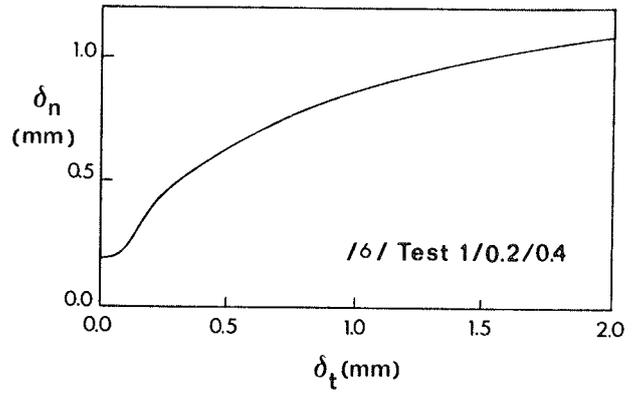
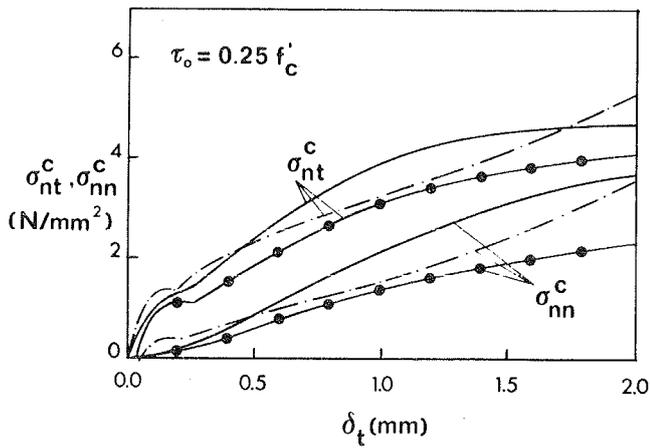


Fig.17 - Test 1/0.2/0.4 : apertura iniziale della fessura 0.2 mm.

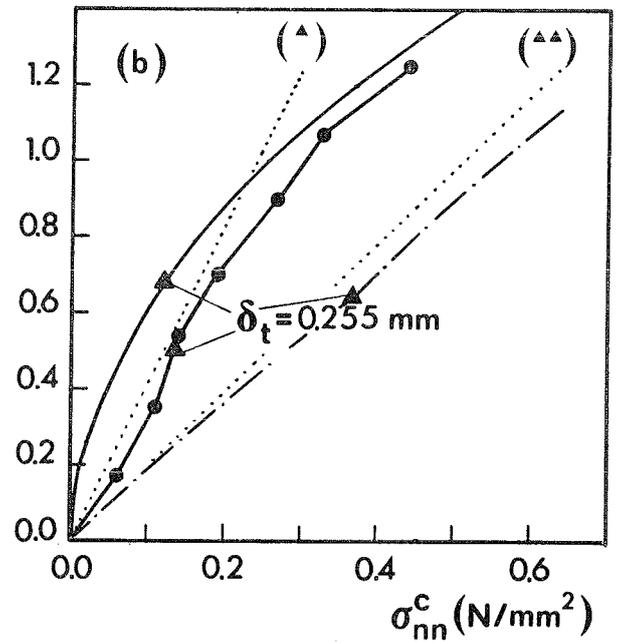
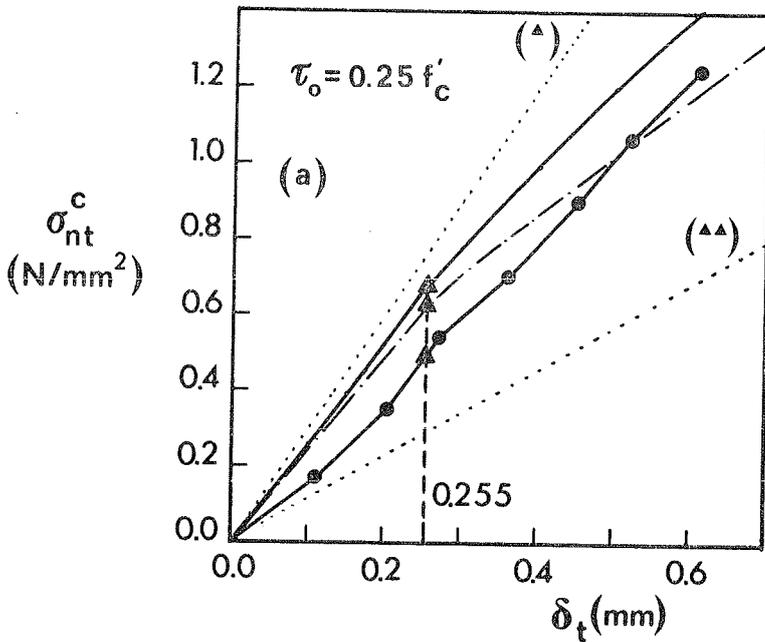
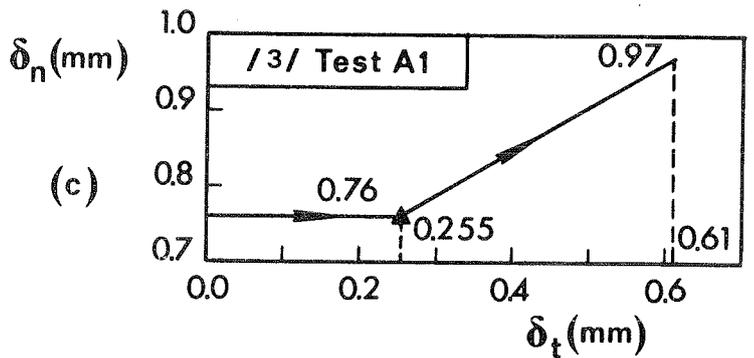


Fig.18 - Confronto teorico/ sperimentale con i risultati di Laible, White e Gergely (III):  $f'_c = 21 \text{ N/mm}^2$ ,  $D_a = D_B = 38 \text{ mm}$ .

- Test A1 (III)
- Rough Crack Model
- - - - - Piani di Contatto
- ( $\Delta$ ), ( $\Delta\Delta$ ) inviluppo di 6 prove sperimentali



la prova A1. Il modello 2 tende, come si è detto, a sopravvalutare l'azione di confinamento necessaria per garantire la trasmissione di un assegnato valore di taglio, e ciò è probabilmente imputabile alla legge costitutiva scelta per i piani di contatto, che si limita a considerare le sole componenti normali  $\sigma_n$  e  $\epsilon_n$ .

#### CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La modellazione analitica della trasmissione del taglio per ingrana-mento delle facce delle fessure rappresenta un obiettivo importante ai fini della definizione delle caratteristiche di rigidità e resistenza del calcestruzzo fessurato.

Due metodi vengono proposti nel presente lavoro per la valutazione della risposta a taglio e della rigidità a taglio del conglomerato fessurato, cosiddetti rispettivamente "delle Fessure Scabre" e "dei Piani di Contatto", aventi caratteristiche profondamente diverse.

Il primo si basa su relazioni sforzi/spostamenti (o sforzi/deformazioni)-dovuti alla fessurazione- di tipo finito, e non è in grado di tener conto della storia degli spostamenti che ha permesso di raggiungere un assegnato regime statico finale. Si richiede che lo stato fessurativo sia del tutto definito come direzione delle fessure e passo delle stesse. Il modulo di taglio  $E_{33}$  viene ottenuto in forma chiusa, così come il modulo normale  $E_{11}$  riguardante la rigidità trasversale delle fessure.

Il secondo metodo si basa sull'ipotesi che il comportamento statico lungo una generica giacitura ("piano di contatto") nel calcestruzzo sia caratterizzato da una legge uniassiale che lega la tensione normale alla deformazione normale, e che il comportamento statico del calcestruzzo nel punto in esame non sia che l'integrale delle risposte statiche lungo le giaciture passanti per il punto. Pur di assegnare alla suddetta legge opportune formulazioni per la trazione (con ramo discendente), la compressione e il passaggio da trazione a compressione, si può descrivere il comportamento fessurativo (con o senza taglio), che è modellato attraverso grandi deformazioni in trazione e tensione nulla.

Il metodo tiene conto della effettiva storia delle deformazioni, ed è particolarmente adatto per la descrizione del degrado della risposta statica del calcestruzzo fessurato sotto carichi variabili incrementalmente.

Ambedue i metodi permettono di ottenere curve di risposta taglio/ /scorrimento in buon accordo con i risultati sperimentali. In particolare il confinamento è meglio descritto dal Metodo delle Fessure Scabre; per converso il Metodo dei Piani di Contatto è di validità più generale, e si presta a descrivere anche il comportamento in trazione (con o senza taglio) del calcestruzzo, anche prima dell'intervento della fessurazione.

#### RINGRAZIAMENTI

La ricerca cui il presente lavoro si riferisce, è stata resa possibile dal contributo finanziario del Comitato Nazionale per la Ricerca - CNR, nell'ambito di un programma di ricerca dedicato al comportamento meccanico del calcestruzzo (1982).

## BIBLIOGRAFIA

- (I) Paulay, T., Loeber, P.J., "Shear Transfer by Aggregate Interlock", Special Publication SP42, American Concrete Institute, 1974, pp.1-15.
- (II) Houde, J., e Mirza, M.S., "Investigation on Shear Transfer Across Cracks by Aggregate Interlock", Research Report No. 72-06, Departement de Génie Civil, Division des Structures, Ecole Polytechnique de Montréal, 1972.
- (III) Laible, J.P., White, R.N., e Gergely, P., " Experimental Investigation of Seismic Shear Transfer Across Cracks in Concrete Nuclear Containment Vessels", Special Publication SP 53, American Concrete Institute, 1977, pp. 203-226.
- (IV) Jimenez-Perez, R., Gergely, P., e White, R.N., "Shear Transfer Across Cracks in Reinforced Concrete", Report 78-4, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1978.
- (V) Mattock, A.H., "The Shear Transfer Behavior of Cracked Monolithic Concrete Subject to Cyclically Reversing Shear", Report SM 74-4, Dept.of Civil Engineering, University of Washington, Seattle, Washington, November 1974.
- (VI) Walraven, J.C., e Reinhardt, H.W., "Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading", Concrete Mechanics part A, Heron, Vol. 26, No.1A,1981.
- (VII) Daschner, F., e Kupfer, H., "Versuche zur Schubkraftübertragung in Rissen von Normal - und Leichtbeton", Bauingenieur 57 (1982), pp.57-60.
- (VIII) Fardis, M.N., e Buyukozturk, O., "Shear Transfer Model for Reinforced Concrete", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.105, Proc.Paper 14507, April 1979, pp. 255-275.
- (IX) Bažant, Z.P., e Gambarova, P.G., "Rough Cracks in Reinforced Concrete", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No ST4, Proc.Paper 15330, April 1980, pp.819-842.
- (X) Gambarova, P.G., e Karakoç, C., "Nuovi risultati in tema di rigidezza a taglio e di leggi costitutive sforzi/spostamenti negli elementi piani fessurati di calcestruzzo", Studi e Ricerche del Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in c.a., Politecnico di Milano, Vol.4, 1982.
- (XI) Bažant, Z.P., e Gambarova, P.G., "Model of Weak Planes for Shear of Cracks in Concrete", Report, Center for Concrete and Geomaterials, Northwestern University, Evanston, Illinois, November 1982.

EFFETTI DEGLI IRRIGIDIMENTI VERTICALI E DELLA CEDEVOLEZZA DEGLI  
APPOGGI NELLE TRAVI PARETE A DUE CAMPATE.

Ezio GIURIANI

Professore Associato di Tecnica  
delle Costruzioni  
Politecnico di Milano

SOMMARIO

La trave parete su tre appoggi con lesene verticali viene analizzata, sia pure in campo elastico, in vista delle ridistribuzioni delle reazioni vincolari dovute alle deformazioni locali della parete e alla cedevolezza degli appoggi. La cedevolezza assiale dei pilastri d'appoggio determina incrementi della reazione più esterna, aumentando le sollecitazioni nella zona più critica della parete.

SUMMARY

Two span continuous deep beams are here considered, with and without vertical ribs over the supports. The attention is focused on the redistribution of the support reactions, because of local beam deformability and of support subsidence. Namely, when the beam is supported by columns, the column deformability markedly increases the reactions of the outer supports, where the beam behavior is particularly critical.

1. INTRODUZIONE

Frequentemente nella pratica progettuale risultano convenienti soluzioni strutturali a parete portante, le quali non solo hanno il vantaggio di eliminare gli ingombri delle travi, ma anche di aumentarne considerevolmente la capacità portante, oltretutto con deformazioni molto limitate.

Il comportamento di questi elementi strutturali si differenzia considerevolmente da quello delle travi snelle soprattutto quando la loro altezza è pari o superiore alla lunghezza della singola campata.

In assenza di fessurazione, le ragioni sono dovute in primo luogo alle deformazioni provocate dal taglio il quale, assumendo un valore elevato, provoca considerevoli ingobbamenti della sezione. In secondo luogo nelle adiacenze degli appoggi si manifestano picchi di compressione tanto grandi da non potersi trascurare la deformabilità secondo la verticale e la diffusione del carico concentrato. Il comportamento è alquanto differente anche nello stadio fessurato e in quello ultimo dato che le fessure, in virtù dell'elevato valore del taglio,

sorgono e si sviluppano maggiormente vicino agli appoggi che in campata e dato che la rottura può manifestarsi per schiacciamento del calcestruzzo sopra gli appoggi (I).

Per allontanare il rischio di rottura locale sopra gli appoggi, frequentemente vengono disposte delle nervature verticali che hanno il compito di ridurre le compressioni della parete e di ridistribuire più in alto le sollecitazioni taglianti. Tali nervature nella pratica possono essere costituite dai pilastri oppure da estese pareti trasversali, gli effetti delle quali però possono essere riguardati come quelli di nervature equivalenti di larghezza limitata.

E' poi frequente la soluzione strutturale a portale semplice o multiplo: la trave parete è appoggiata sopra i pilastri, che proseguendo nella parete, realizzano peraltro le nervature. I pilastri sottostanti la parete a loro volta possono essere appoggiati su vincoli cedevoli, come per esempio su plinti di fondazione. Nel caso delle travi continue iperstatiche, la deformabilità assiale dei pilastri, oppure la cedevolezza dei pilastri unitamente a quella delle fondazioni, possono giocare un ruolo importante per la distribuzione delle reazioni vincolari, data la notevole rigidità flessionale della parete.

Occorre osservare che il calcolo delle reazioni vincolari è particolarmente importante sia nei riguardi dello stato limite ultimo che per le condizioni di esercizio.

Nel primo caso perchè dal loro valore può dipendere la crisi della intera struttura quando si manifesta per cedimento locale vicino agli appoggi.

Nel secondo caso è importante quando occorre controllare l'apertura delle fessure, dato che esse si aprono frequentemente vicino agli appoggi estremi e la loro ampiezza dipende dall'entità della reazione vincolare.

Lo studio teorico della trave parete continua con un numero limitato di campate è stato affrontato da alcuni autori (II) e (III) sia in campo elastico che in regime fessurato (IV), (V), (VI), facendo riferimento però alla trave parete liscia e senza affrontare lo studio degli effetti della cedevolezza dei supporti.

Il ruolo delle lesene e della cedevolezza degli appoggi è stato studiato estesamente invece in (VII) e (VIII). L'indagine, limitata al comportamento elastico lineare, dà particolare rilievo agli aspetti analitici i quali, data la complessità del problema, richiedono un certo impegno. Il metodo di calcolo è simile a quello di Schlee (III) che consiste nel sovrapporre a soluzioni polinomiali connesse col regime flessionale, soluzioni di tipo diffusivo connesse con le deformazioni locali delle reazioni concentrate. Le soluzioni di tipo diffusivo sono ottenute con il metodo dei potenziali scalare e vettore dello spostamento, il quale fornisce peraltro una ottima precisione, non facilmente ottenibile con la discretizzazione numerica, soprattutto in presenza dei notevoli gradienti di sforzo in prossimità degli appoggi e dei punti di attacco parete-lesena.

Nel presente lavoro si intende illustrare i risultati della trave alta con lesene a due campate uguali e con altezza uguale o minore della luce, sottolineando maggiormente gli aspetti applicativi. A tale scopo vengono messi a confronto i casi della trave-parete e quelli della trave con lesene grosse e sottili, considerando per tutti que-

sti casi sia appoggi rigidi che cedevoli elasticamente. I risultati esposti sono significativi perchè, non solo si riferiscono ad una ca sistica abbastanza ampia, ma anche perchè sono espressi in forma adi dimensionale e quindi validi indipendentemente dalle effettive dimen sioni della struttura.

Inoltre possono fornire indicazioni utili nei confronti degli stati limite ultimi dato che fanno luce sulle cause che determinano la ri distribuzione delle reazioni vincolari, cause che in parte si manife stano anche quando la fessurazione è molto avanzata.

## 2. CALCOLO DELLE REAZIONI: RICHIAMI TEORICI

Per la trave alta su tre appoggi con lesene e a luci uguali, sottopo sta a carico uniformemente distribuito lungo il bordo inferiore nel le due campate, la soluzione è quella corrispondente al caso riporta to nello schema di Fig. 1. Tale soluzione in campo elastico può esse re ottenuta sovrapponendo le soluzioni dei quattro casi di Fig. 2,

nei quali i bordi verticali sono caricati con distribuzione parabolica di sforzo tangenziale, (●) ta le che in ciascun caso le forze e sterne sono autoequilibrate:

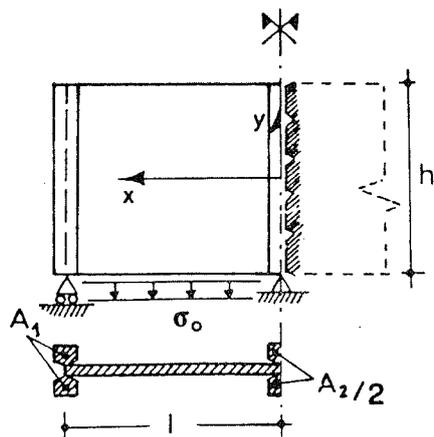


Fig. 1

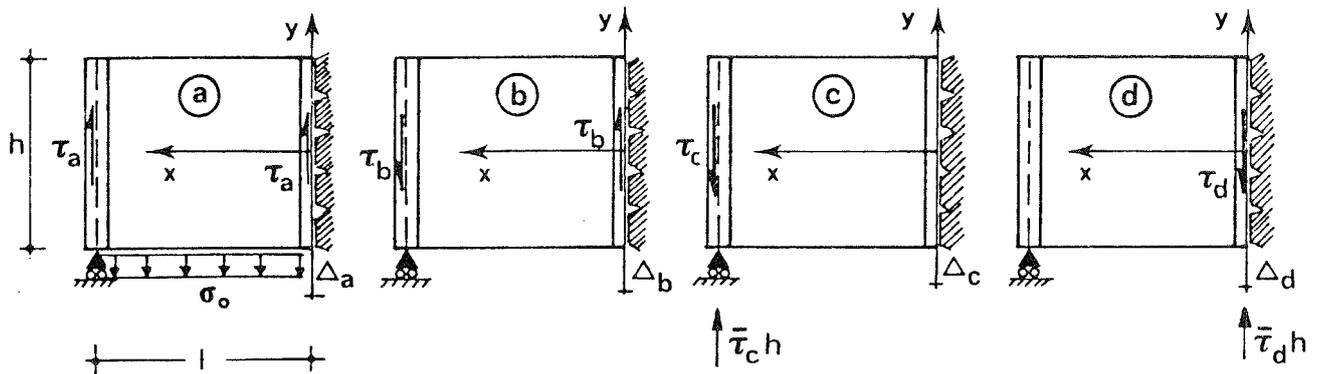


Fig. 2

$$\tau_a = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0 l}{2h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]; \quad \tau_b = \alpha \tau_a; \quad \tau_c = \tau_a - \alpha \tau_a; \quad \tau_d = \tau_a + \alpha \tau_a. \quad 1)$$

Per la congruenza, lo spostamento totale dell'appoggio nella sezione  $x=0$  deve essere uguale all'eventuale cedimento  $\bar{\Delta}$  con sentito dal vincolo:

(●) I carichi tangenziali e quelli normali sono riferiti ad uno spessore  $s$  unitario della parete.

$$\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \Delta_d = \bar{\Delta} .$$

Indicando con:

$$\bar{\tau}_a = \frac{\sigma_o \ell}{2h} , \quad \bar{\tau}_b = \alpha \bar{\tau}_a , \quad \bar{\tau}_c = (1-\alpha) \bar{\tau}_a ; \quad \bar{\tau}_d = (1+\alpha) \bar{\tau}_a \quad 1')$$

i valori medi di ciascuna distribuzione di carico e con  $\delta_b, \delta_c, \delta_d$  i relativi coefficienti di influenza, si ottiene:

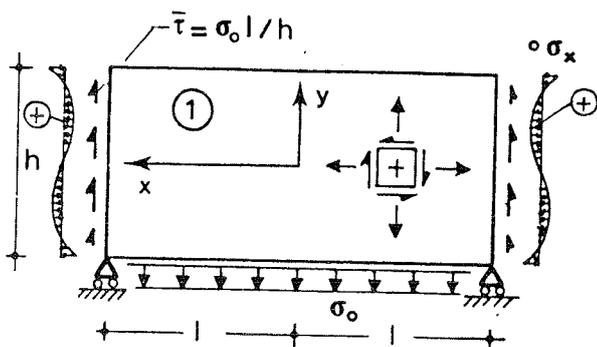
$$\Delta_a + \delta_b \bar{\tau}_b + \delta_c \bar{\tau}_c + \delta_d \bar{\tau}_d = \Delta_a + \frac{\sigma_o \ell}{2h} \left[ \alpha \delta_b + (1-\alpha) \delta_c + (1+\alpha) \delta_d \right] = \bar{\Delta}$$

che fornisce il valore incognito di  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{(\bar{\Delta} - \Delta_a) / \left( \frac{\sigma_o \ell}{2h} \right) - \delta_c - \delta_d}{\delta_b - \delta_c + \delta_d} \quad 2)$$

Dei quattro casi considerati, le soluzioni del caso a) e b) sono dipendenti dalla lunghezza delle campate ed esprimono il regime flessionale del tutto simile a quello delle travi snelle, con l'unica differenza che si deve tener conto dell'ingobbamento della sezione in seguito agli elevati valori del taglio. I casi c) e d) invece esprimono gli effetti locali connessi con la diffusione delle azioni concentrate dei supporti: le loro soluzioni sono indipendenti dalla lunghezza delle campate (●).

In (VIII) le soluzioni connesse con gli effetti locali sono state dedotte mediante il metodo dei potenziali scalare e vettore dello spostamento. Per quanto riguarda invece i casi a) e b) si sono impiegate soluzioni polinomiali. In particolare per il caso a) si è impiegata la soluzione 3):



$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_o \left\{ 6 \left[ \left( \frac{x}{h} \right)^2 - \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \right] \frac{y}{h} + \frac{3}{5} \frac{y}{h} - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right\} \\ \sigma_y &= \sigma_o \left\{ 2 \left( \frac{y}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right\} \\ \tau_{xy} &= \sigma_o \frac{3}{2} \left\{ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right\} \frac{x}{h} \end{aligned} \quad 3)$$

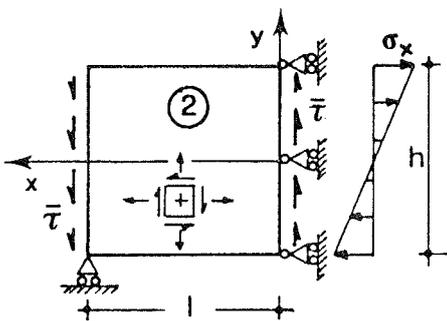
(●) In realtà ciò avviene quando la lunghezza della campata è maggiore o uguale all'altezza della sezione, come si ritiene nel presente lavoro.

$$E \frac{v}{h} = 6 \sigma_0 \left\{ \frac{1}{12} \left( \frac{y}{h} \right)^4 - \frac{1}{8} \left( \frac{y}{h} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{y}{h} \right) + v \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 - \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right\} + \frac{1}{6} \left( \frac{y}{h} \right)^4 - \frac{1}{20} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \left( \frac{x}{h} \right)^2 - \frac{1}{12} \left( \frac{x}{h} \right)^4 - \frac{1}{20} \left( \frac{x}{h} \right)^2 + \left( 1 + \frac{v}{2} \right) \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right\} + c_1$$

che fornisce lo spostamento verticale  $v$  a metà campata e al lembo inferiore pari a :

$$\Delta_1 = - \left[ 2.5 \left( \frac{\ell}{h} \right)^4 + 1.2 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \right] \frac{h}{E} \sigma_0 \quad , \quad 3')$$

e alla quale viene sommata una soluzione del tipo 4) con  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_a$ .  
Per il caso b) si è adottata la soluzione 4):



$$\begin{aligned} \sigma_x &= + 12 \bar{\tau} \left( \frac{\ell}{h} - \frac{x}{h} \right) \frac{y}{h} ; \quad \sigma_y = 0 ; \quad \tau_{xy} = - \frac{3}{2} \bar{\tau} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \\ \frac{Eu}{h} &= - \bar{\tau} \left\{ \frac{1}{2} (2+v) \frac{y}{h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] - 6 \frac{y}{h} \left[ 2 \frac{\ell}{h} \frac{x}{h} - \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right] \right\} \\ \frac{Ev}{h} &= - \bar{\tau} \left\{ \frac{1}{2} (4+3v) \frac{x}{h} + 2 \left[ 3 \frac{x}{h} \left( \frac{x}{h} \right)^2 - \left( \frac{x}{h} \right)^3 \right] + 6v \left( \frac{\ell}{h} - \frac{x}{h} \right) \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right\} + c_2 \end{aligned} \quad 4)$$

dove  $\bar{\tau}$  è il valore medio della distribuzione di carichi tangenziali di tipo parabolico: lo spostamento verticale del vertice  $x = 0$  e  $y = -h/2$  risulta:

$$\Delta_2 = \delta_2 \bar{\tau} = \left[ 4 \left( \frac{\ell}{h} \right)^3 + 2 \frac{\ell}{h} \right] \frac{h}{E} \bar{\tau} \quad 4')$$

In realtà le soluzioni 3) e 4) si riferiscono alla trave parete liscia e pertanto non possono tener conto degli effetti delle lesene che contrastano le deformazioni  $\epsilon_y$  della parete lungo i bordi verticali. Per tener conto di questi effetti non del tutto trascurabili, in (VIII) sono state sovrapposte a quelle polinomiali, soluzioni correttive corrispondenti ai casi che si ottengono applicando lungo l'attacco lesena-parete le reazioni cambiate di segno dei vincoli fittizi che impongono alle lesene gli stessi spostamenti  $v(y)$  delle soluzioni polinomiali 3) e 4) (si vedano i casi a', a'', b" degli schemi indicati nelle Figg. 3) e 4)). Inoltre le 4) non rispettano la condizione che lungo il bordo  $x = 0$  siano nulli gli spostamenti orizzontali; pertanto la congruenza viene ripristinata imponendo le stesse distorsioni cambiate di segno (caso b' della Fig.3).

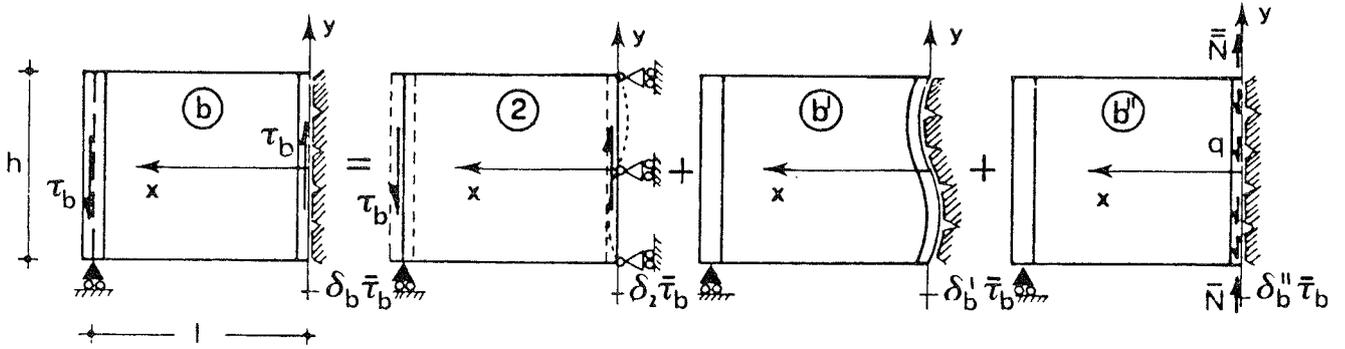


Fig. 3

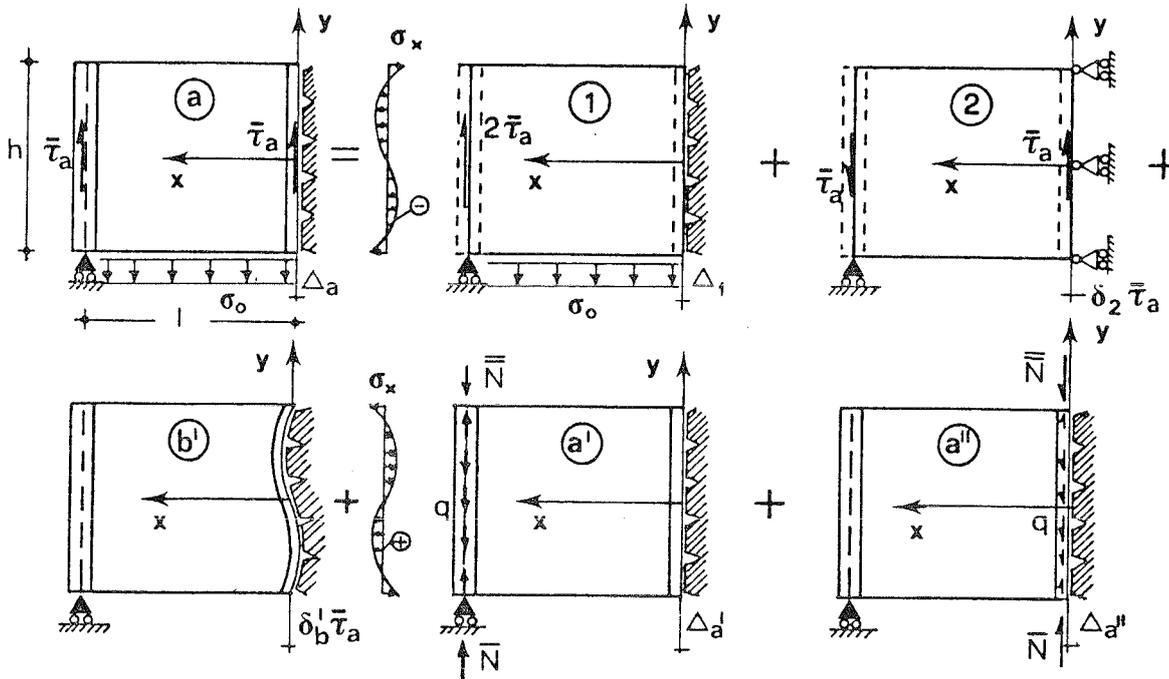


Fig. 4

I coefficienti di influenza 3') e 4') risultano così modificati:

$$\delta_b = \delta_2 + (\delta_b' + \delta_b'')$$

$$\Delta_a = \Delta_1 + \delta_2 \bar{\tau}_a + (\delta_b' \bar{\tau}_a + \Delta_a' + \Delta_a'')$$
(5)

dove i termini entro parentesi rappresentano gli spostamenti correttivi. Nella tabella di Fig.5) sono riportate le espressioni e i valori di tali coefficienti (VIII): accanto ad essi sono riportati anche i valori dei coefficienti per i casi c) e d), facendo riferimento a due tipi di lesene, con sezione di area l'una doppia dell'altra, e con riferimento alla parete senza lesene.

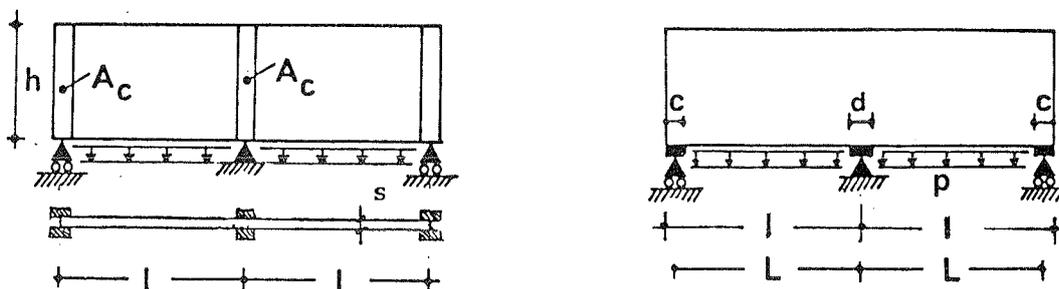


Fig. 5

$\frac{Ac}{sh}$	$\delta_c$	$\delta_d$	$\delta'_b$	$\delta''_b$	$\Delta'_a$	$\Delta''_a$
.333	$-.90 \frac{h}{E}$	$1.256 \frac{h}{E}$	$(.425 \frac{1}{h} - .083) \frac{h}{E}$	$(.14 \frac{1}{h}) \frac{h}{E}$	$-.29 \sigma_0 \frac{h}{E}$	$.21 \sigma_0 \frac{h}{E}$
.166	$-1.53 \frac{h}{E}$	$1.847 \frac{h}{E}$	$(.4285 \frac{1}{h} - .100) \frac{h}{E}$	$(.1134 \frac{1}{h}) \frac{h}{E}$	$-.24 \sigma_0 \frac{h}{E}$	$.15 \sigma_0 \frac{h}{E}$
0	$-2.4 \frac{h}{E}$	$\delta_d + \delta'_b$ ----- $(3.28 + .20 L/h) h/E$ per $d = c$ $(2.42 + .17 L/h) h/E$ per $d = 2c$		-	$.015 \sigma_0 \frac{h}{E}$	-

Fig.5)

Tenendo conto delle 5) è possibile riscrivere la 2) nel seguente modo:

$$\alpha = \frac{(\bar{\Delta} - \Delta_1) / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) - \delta_2 - \left[ \delta_c + \Delta'_a / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) \right] - \left[ \delta_d + \delta'_b + \Delta''_a / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) \right]}{\delta_2 - \left[ \delta_c \right] + \left[ \delta_d + \delta'_b + \delta''_b \right]} \quad 6)$$

dove sono raccolti entro parentesi quadra i coefficienti degli effetti locali relativi ad uno degli appoggi.  
 Ricavato il valore di  $\alpha$  è possibile calcolare le reazioni del vincolo C di estremità e dell'appoggio centrale D, tenendo conto della 1') (v. anche Fig. 2):

$$R_c = \bar{T}_c hs = \frac{\sigma_0 \ell}{2h} (1 - \alpha) hs$$

$$R_D = 2 \bar{T}_d hs = \frac{\sigma_0 \ell}{2h} (1 + \alpha) 2hs \quad 7)$$

Quando gli appoggi sono cedevoli elasticamente il cedimento  $\bar{\Delta}$  risulta pari alla differenza dei cedimenti elastici degli appoggi C e D:

$$\bar{\Delta} = - \left( \frac{R_D}{K_D} - \frac{R_c}{K_C} \right)$$

essendo  $K_C$  e  $K_D$  le loro rigidzze.  
 Per le 7) risulta allora:

$$\bar{\Delta} = - \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \left[ 2 \frac{hs}{K_D} (1 + \alpha) - \frac{hs}{K_C} (1 - \alpha) \right]$$

e pertanto la 6) viene così modificata:

$$\alpha = \frac{-2 \frac{hs}{K_D} + \frac{hs}{K_C} - \Delta_1 / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) - \delta_2 - \left[ \delta_c + \Delta'_a / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) \right] - \left[ \delta_d + \delta'_b + \Delta''_a / \left( \frac{\sigma_0 \ell}{2h} \right) \right]}{2 \frac{hs}{K_D} + \frac{hs}{K_C} + \delta_2 - \left[ \delta_c \right] + \left[ \delta_d + \delta'_b + \delta''_b \right]} \quad 6')$$

### 3. CALCOLO APPROSSIMATO DEGLI SFORZI

Il calcolo degli sforzi nella parete e nelle lesene dovrebbe essere effettuato mediante la sovrapposizione degli effetti relativi a ciascuno dei casi 1), e 2), a), a"), b'), b") c) e d) visti precedentemente. Per ciascuno di essi le soluzioni corrispondenti a carichi unitari sono riportate nelle tabelle del lavoro (VIII); pertanto ricavato dalla 6) il valore di  $\alpha$  si ottiene il valore  $\bar{\tau}_b$ ,  $\bar{\tau}_c$  e  $\bar{\tau}_d$  (v. rel. 1') per il quale occorre moltiplicare le corrispondenti soluzioni. Come si è detto precedentemente, le soluzioni dei casi a', a"), b') b") possono essere riguardate come soluzioni correttive che, sommate a quelle polinomiali, 1) e 2) forniscono le soluzioni dei casi a) e b) (v. Fig. 2). Lo stato di sforzo di tali soluzioni correttive è provocato dalla presenza delle lesene che contrastano le deformazioni verticali della parete delle soluzioni polinomiali: tale stato di sforzo può diventare trascurabile quando le lesene hanno sezioni molto piccole (●). Si commette poi un errore modesto quando si sostituiscono le soluzioni polinomiali con quelle della trave snella:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y, \quad \tau_{xy} = \frac{TS^*(o)}{JS}, \quad \sigma_y = \int \frac{d\tau_{xy}}{dx} dy + \frac{1}{2}; \quad 8)$$

In questo caso il calcolo degli sforzi della parete si effettua sommando alle 8) solamente le soluzioni c) e d) le quali per comodità vengono riportate anche nell'appendice del presente lavoro.

### 4. RISULTATI

Per illustrare il ruolo delle lesene sono significativi i diagrammi delle Figg. 6 ÷ 9 che forniscono i valori delle reazioni vincolari (v. rel. 7) al crescere della lunghezza  $L$  della campata (rapportata all'altezza  $h$ ), e che mettono a confronto i risultati corrispondenti ai casi con lesene grosse (sezione  $A_c = .333 h s$  (+)), con lesene sottili ( $A_c = .166 h s$ ), oppure senza lesene con differenti larghezze dell'appoggio centrale ( $c = 0.1 L$ , oppure  $c = 0.2 L$ ). Tutti i diagrammi si riferiscono al carico uniforme  $p$  applicato al lembo inferiore della parete e forniscono sia il valore della reazione  $R_c$  dell'appoggio più esterno che quello della reazione  $R_D$  di quello centrale. I valori di tali reazioni sono rapportate al valore  $pl/2$  che rappresenta la reazione in  $C$ , quando il momento iperstatico nella sezione cen-

(●) Questa semplificazione può essere accettata limitatamente al calcolo degli sforzi. Qualora venissero trascurati i termini correttivi anche per il calcolo delle reazioni vincolari, gli errori potrebbero amplificarsi in maniera inaccettabile.

(o) Il momento  $M$  e il taglio  $T$  sono noti in quanto note le reazioni vincolari.

(+) dove  $s$  è lo spessore della parete.

trale è nullo. Sull'asse delle ordinate accanto ai valori crescenti di  $R_D$  vengono riportati i valori di  $R_C$  che naturalmente risultano de- crescenti.

Dalla Fig. 6 risulta che quando gli appoggi sono rigidi, le reazio- ni sono poco differenti per i casi della trave senza lesene (con sup- porto centrale di larghezza doppia di quello esterno), e per i casi con lesene uguali sui tre appoggi siano esse grosse o sottili. Valo- ri più elevati della reazione  $R_C$  si hanno per la lastra senza lesene, ma con tre supporti di larghezza uguale, come conseguenza della consi- derevole cedevolezza locale in corrispondenza dell'appoggio centrale. Per un utile confronto viene riportata la linea orizzontale che rap- presenta la soluzione della trave ordinaria: in tutti i casi, per va- lori di  $L/h$  maggiori di 4, le reazioni della trave-parete praticamen- te risultano uguali a quelle della trave ordinaria. Le Figg. 7) e 8), sempre relative ad appoggi rigidi, mostrano il notevole incremento della reazione  $R_C$  nel caso di lesene grosse d'estremità e lesena sot- tile o nulla dell'appoggio centrale: viceversa mostrano una riduzio- ne di reazione d'estremità  $R_C$  nel caso di lesena grossa centrale e sottili o nulle negli appoggi esterni.

La Fig. 9 è importante in quanto mostra il comportamento reale della struttura quando la parete, come frequentemente avviene, è appoggia- ta su pilastri. Vengono messi a confronto i casi di appoggio rigido con quelli della trave appoggiata su pilastri aventi la stessa sezio- ne delle lesene; per la parete liscia i pilastri hanno lo stesso spes- sore  $s$  della parete e la larghezza a pari a quella adottata per gli appoggi. In tutti i casi l'altezza dei pilastri è pari a quella della trave parete. Dato che la zona vicina all'appoggio esterno rappresen- ta spesso la parte più debole della struttura, è importante notare che il caso più sfavorevole è quello della parete liscia appoggiata sui pilastri, per il quale, quando la luce della campata uguaglia la altezza ( $L/h = 1$ ), la reazione  $R_C$  d'estremità diventa molto elevata e corrisponde a quasi un terzo dell'intero carico.

Data l'importanza della cedevolezza dei vincoli nei confronti della reazione dell'appoggio esterno, è significativo il confronto dei dia- grammi di Fig. 10, i quali mostrano che quando la cedevolezza (●) è superiore a quella dei soli pilastri, come avviene per i pilastri a loro volta appoggiati su fondazioni cedevoli, le reazioni tendono a diventare uguali.

I diagrammi si riferiscono a campate con luce pari all'altezza ( $L/h = 1$ ). Vengono riportati anche i diagrammi corrispondenti all'appog- gio centrale con rigidità doppia di quella degli appoggi esterni. Nel caso di supporti di ugual rigidità quando la loro cedevolezza supera il valore  $15 \div 20$ , le curve tendono ad avvicinarsi asintoti- camente al valore  $R_C/(Pl/2) = R_D(pl/2) = 1.33$ . Ciò significa che le cedevolezza locali della parete perdono di importanza e la presenza o meno delle lesene non gioca un ruolo significativo. In questo caso allora le reazioni dei vincoli esterni diventano grandi e tendono ad

---

(●) La cedevolezza  $1/K_C$  e  $1/K_D$  dei supporti sono espresse in forma adimensionale:  $E_s/K_C$  e  $E_s/K_D$  essendo  $E$  il modulo elastico della parete.

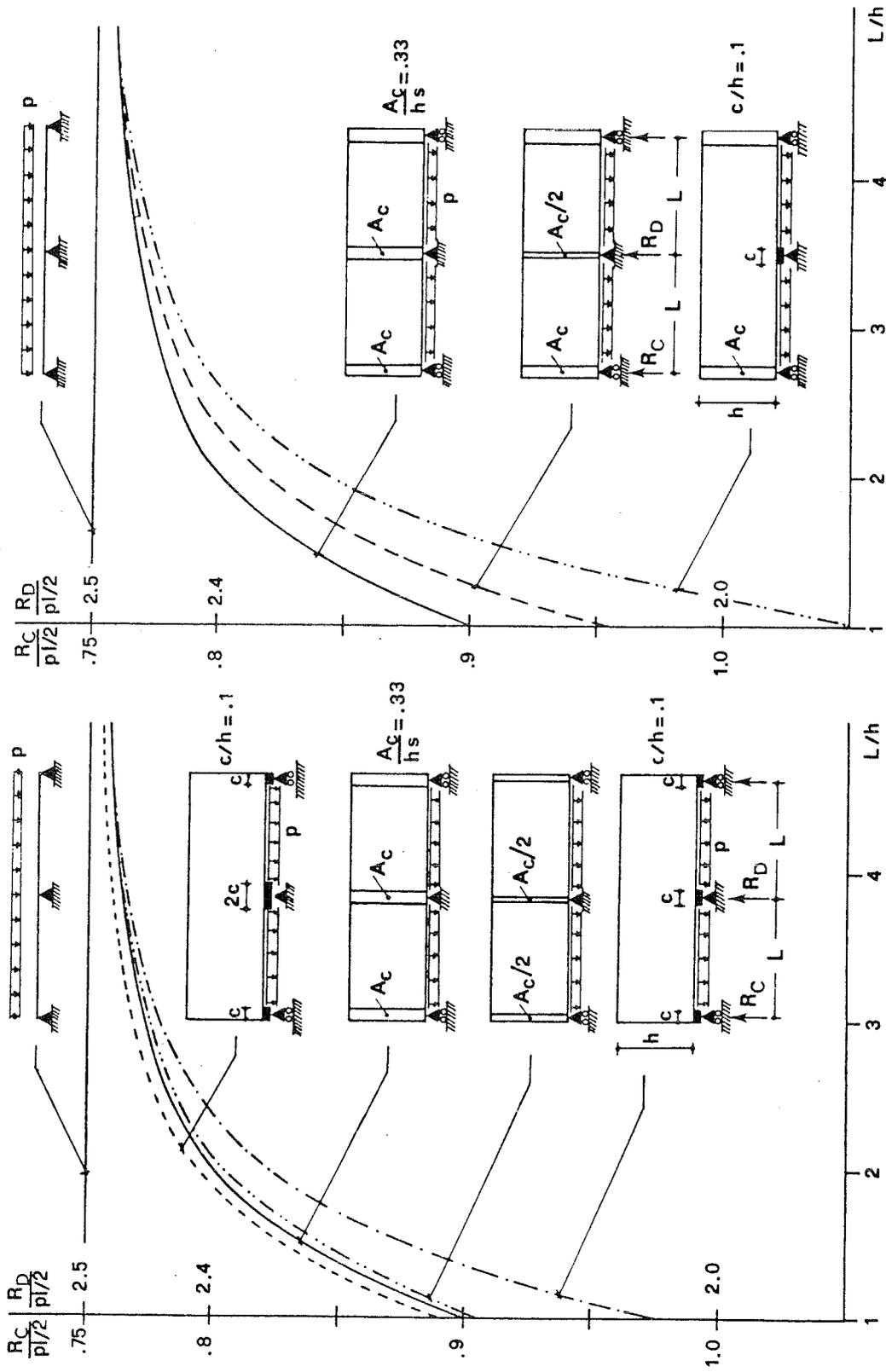


Fig. 6 - Reazioni d'appoggio in funzione del rapporto luce-altezza.

Fig. 7 - Ruolo della lesena centrale nei confronti delle reazioni.

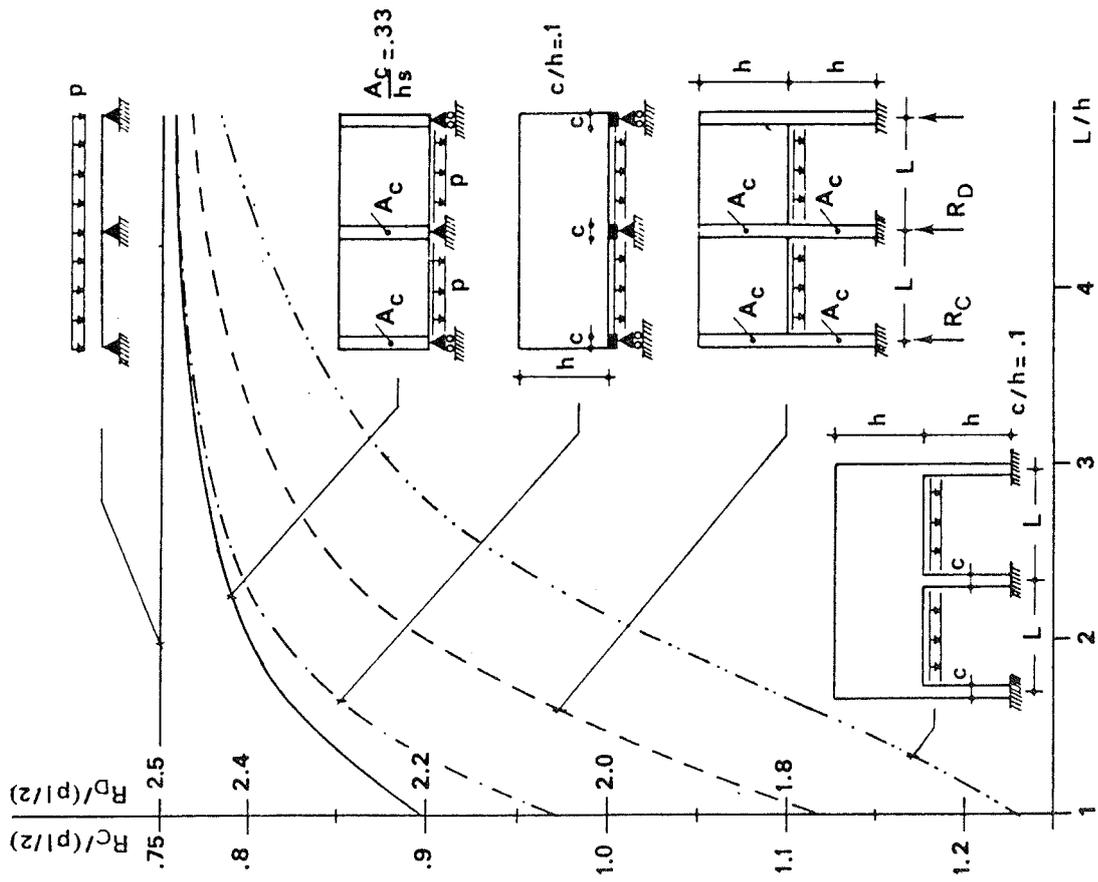


Fig.9 - Effetto della cedevolezza degli appoggi dovuta ai pilastri.

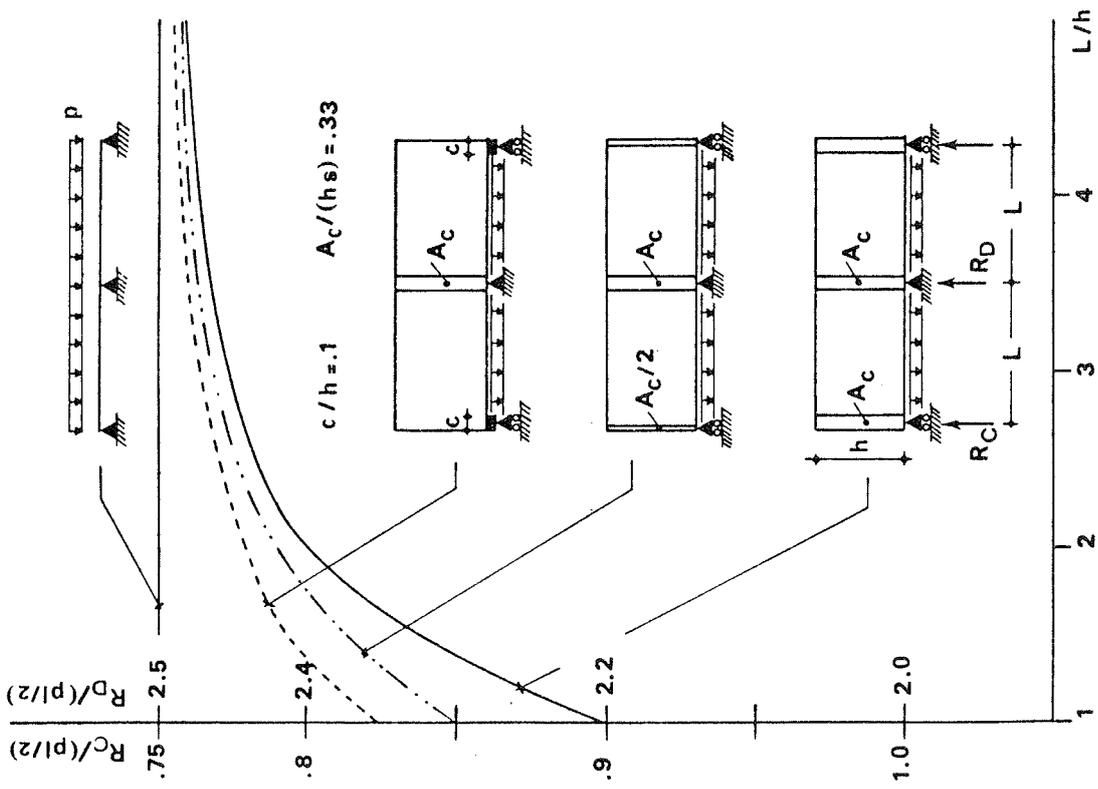


Fig.8 - Ruolo delle lesioni esterne nei confronti delle reazioni.

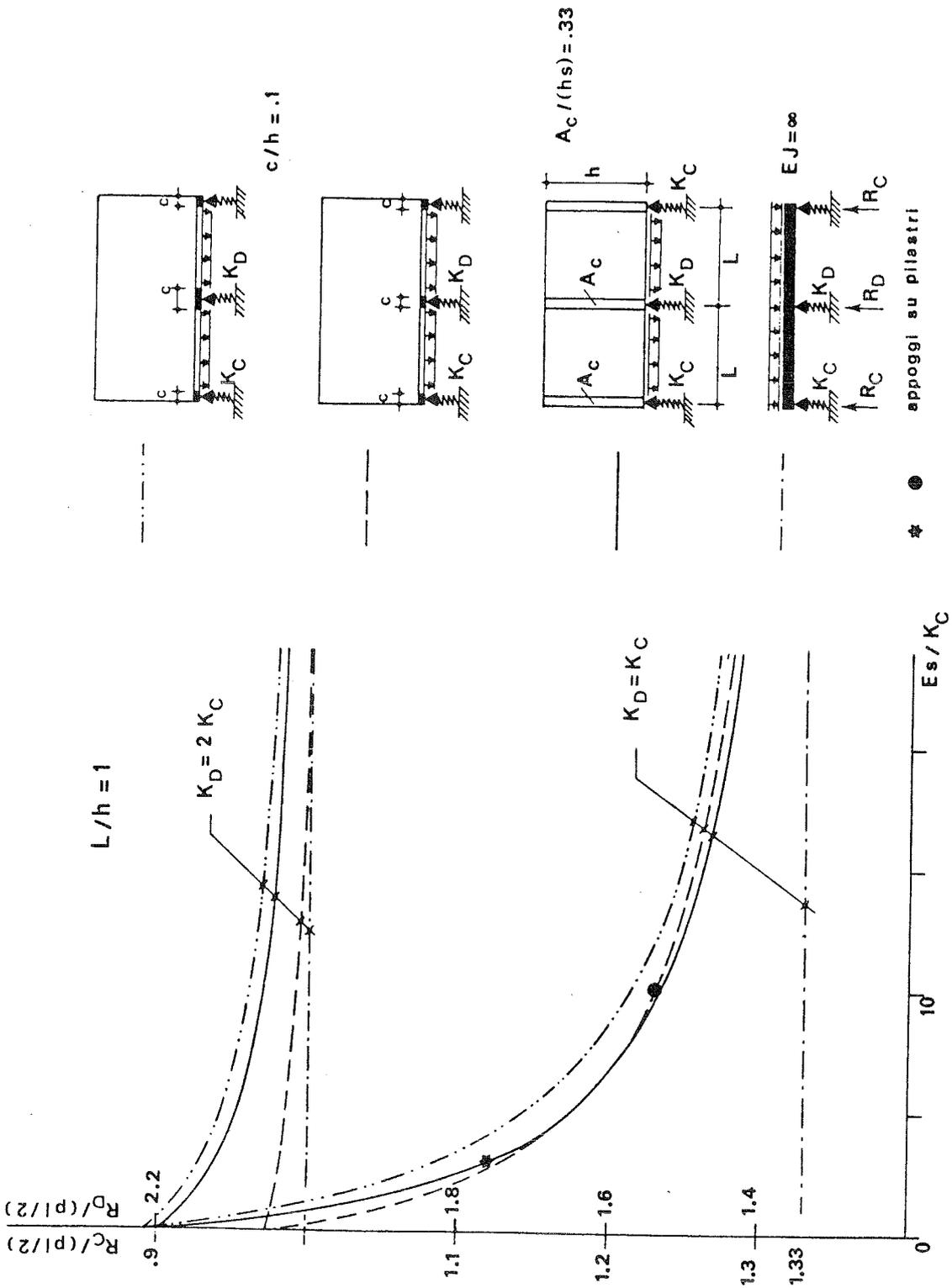


Fig.10 - Effetto della cedevolezza degli appoggi per la trave con luce pari all'altezza.

ad un valore pari a un terzo dell'intero carico.

Per un utile riferimento il punto nero e a stella indicano le soluzioni corrispondenti alle cedevolezze dei pilastri come nei casi di Fig. 9, per la parete liscia oppure con lesene grosse.

Le Figg. 11 - 12 mostrano gli sforzi delle sezioni indicate per il caso con lesene uguali (di sezione grossa) e con luce uguale all'altezza ( $L/h = 1$ ). La Fig. 12 si riferisce al caso di supporto molto cedevole  $E_s/K_C = \infty$ , che risulta anche, come già detto, il più sfavorevole per la zona vicina all'appoggio.

La Figg. 13 e 14 si riferiscono agli stessi casi di appoggio rigido o infinitamente cedevole, ma in assenza di lesene. Si notano i picchi di sforzi di trazione nelle prossimità degli appoggi esterni.

In tutti i casi gli sforzi sono calcolati tenendo conto di ogni effetto locale compresi quelli delle soluzioni correttive del tipo a'), a''), b'), b''). Nelle curve della Figg. 11 e 13 vengono riportati (con punti neri) anche i risultati approssimati ottenuti impiegando le relazioni 8) unitamente alle soluzioni del tipo c) e d) (v. paragrafo 2.). Mentre nel caso della lastra senza lesene (Fig. 13) l'accordo è molto buono, nel caso delle lesene (Fig. 11) sono in buon accordo gli sforzi  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  connessi con la flessione e il taglio, mentre gli sforzi verticali  $\sigma_y$  rivelano notevoli differenze in prossimità delle lesene, dove le soluzioni correttive assumono un ruolo importante.

Si tenga presente infine che i risultati riportati precedentemente possono essere validi anche quando il carico è agente sul bordo superiore della parete, purchè nella parete si sommino agli sforzi calcolati per il carico inferiore, i seguenti sforzi(o):

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = -\sigma_o \text{ e } \tau_{xy} = 0$$

Si osserva che tali sforzi non modificano il regime flessionale.

## 5. CONCLUSIONI

I risultati esposti nel presente lavoro, mostrano gli effetti delle lesene e il ruolo della cedevolezza dei supporti nei confronti del regime flessionale dell'intera trave parete.

Quando la parete è appoggiata su pilastri, la cedevolezza assiale dei pilastri, trascurabile per le travi ordinarie, provoca notevoli ridistribuzioni delle reazioni dei vincoli, con aumenti considerevoli delle reazioni negli appoggi più esterni. Nel caso della parete senza lesene tali appoggi hanno reazioni di valore prossimo ad un terzo dell'intero carico come avverrebbe nel caso ideale di supporti infinitamente cedevoli.

L'importanza del calcolo delle reazioni vincolari, è connessa con il comportamento particolare di queste strutture, le quali manifestano i primi segni di cedimento proprio nelle adiacenze degli appoggi più esterni (Fig. 15) in seguito alle elevate sollecitazioni locali prodotte dalle reazioni vincolari. D'altra parte in tale zona, a differenza

---

(o) Sul bordo inferiore hanno l'effetto di annullare il carico e su quello superiore di determinare condizioni al contorno corrispondenti al nuovo carico /8/.

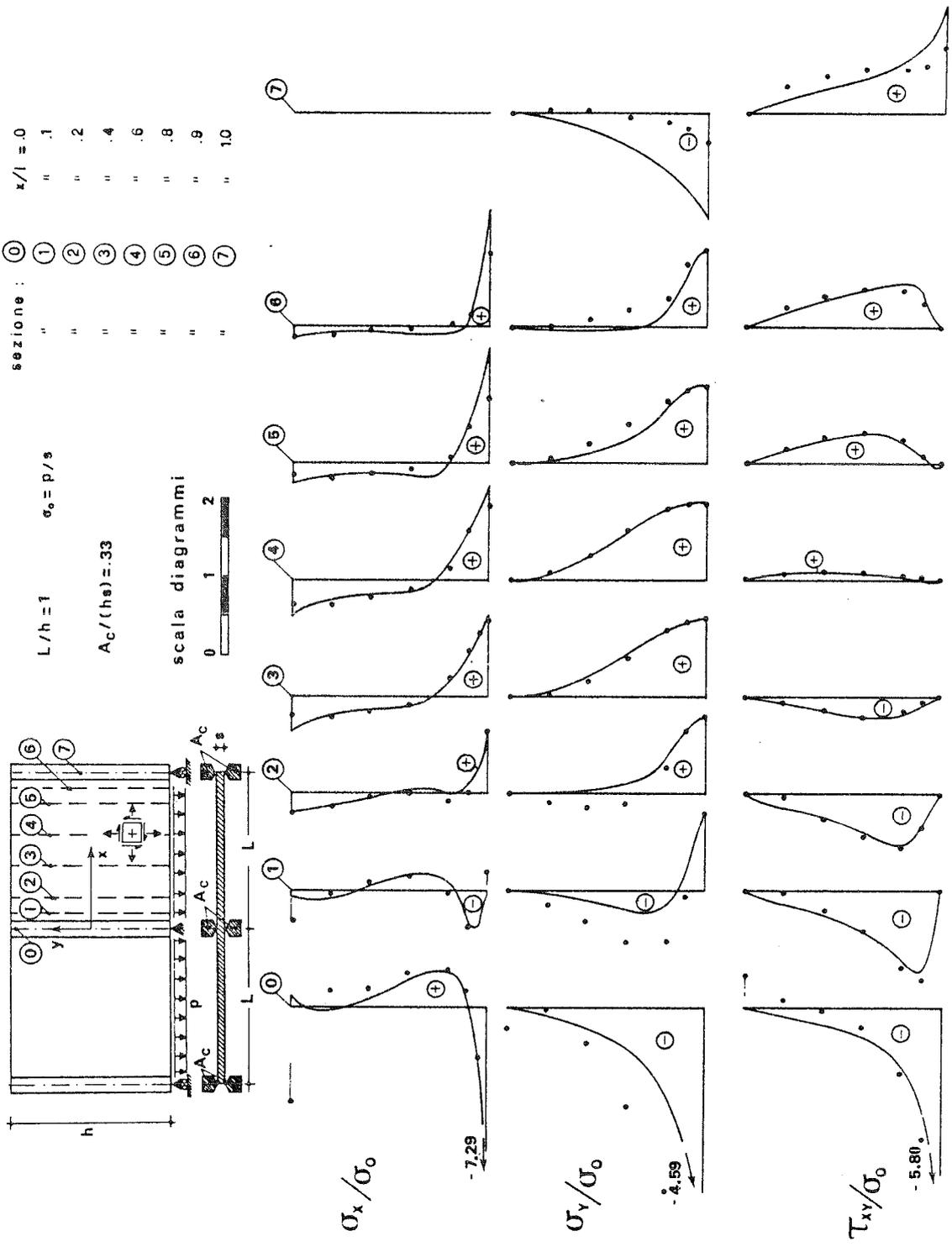


Fig.11 - Sforzi della trave con lesene su appoggi rigidi con luce pari all'altezza.

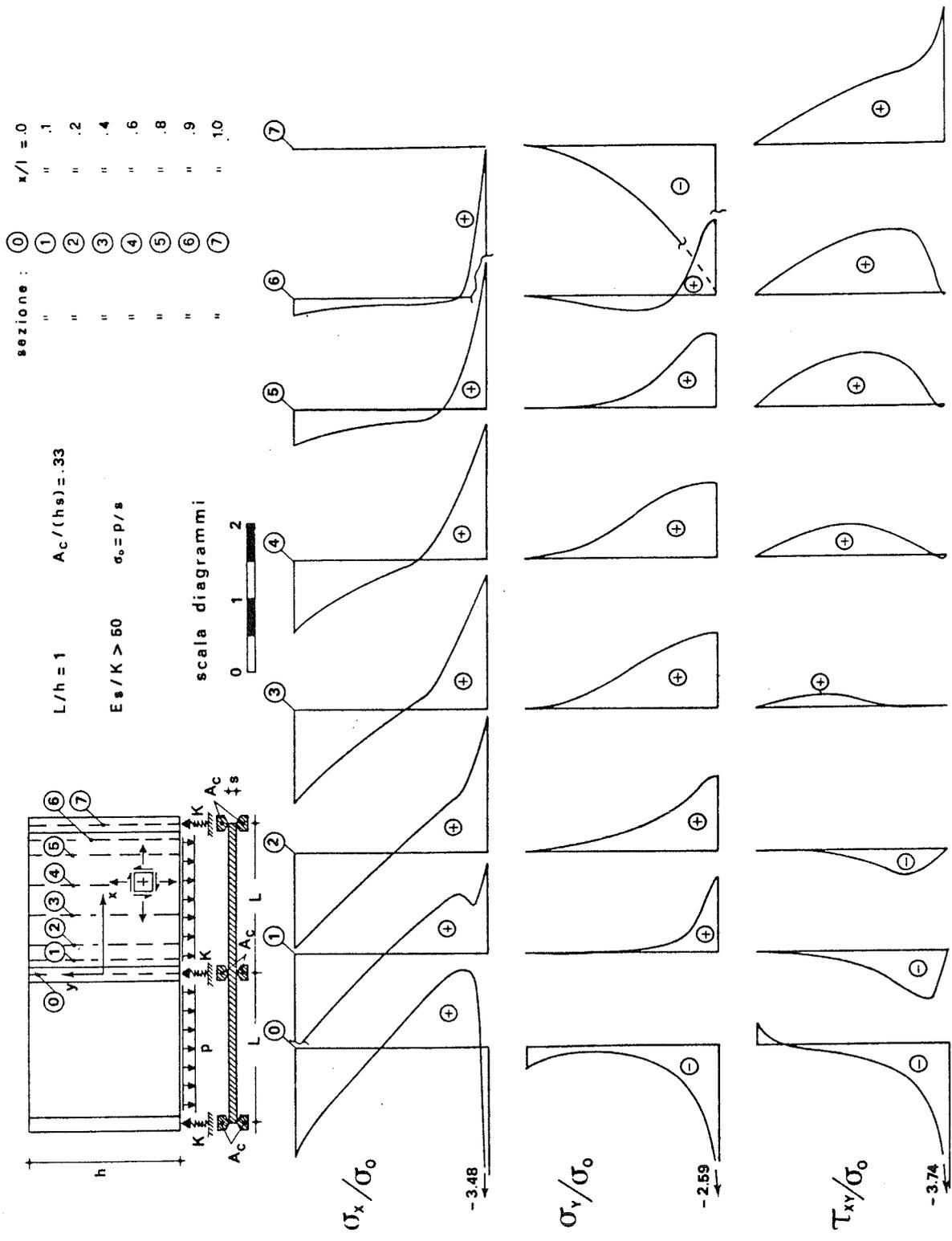


Fig.12 - Sforzi della trave con lesene su appoggi elastici molto cedevoli.

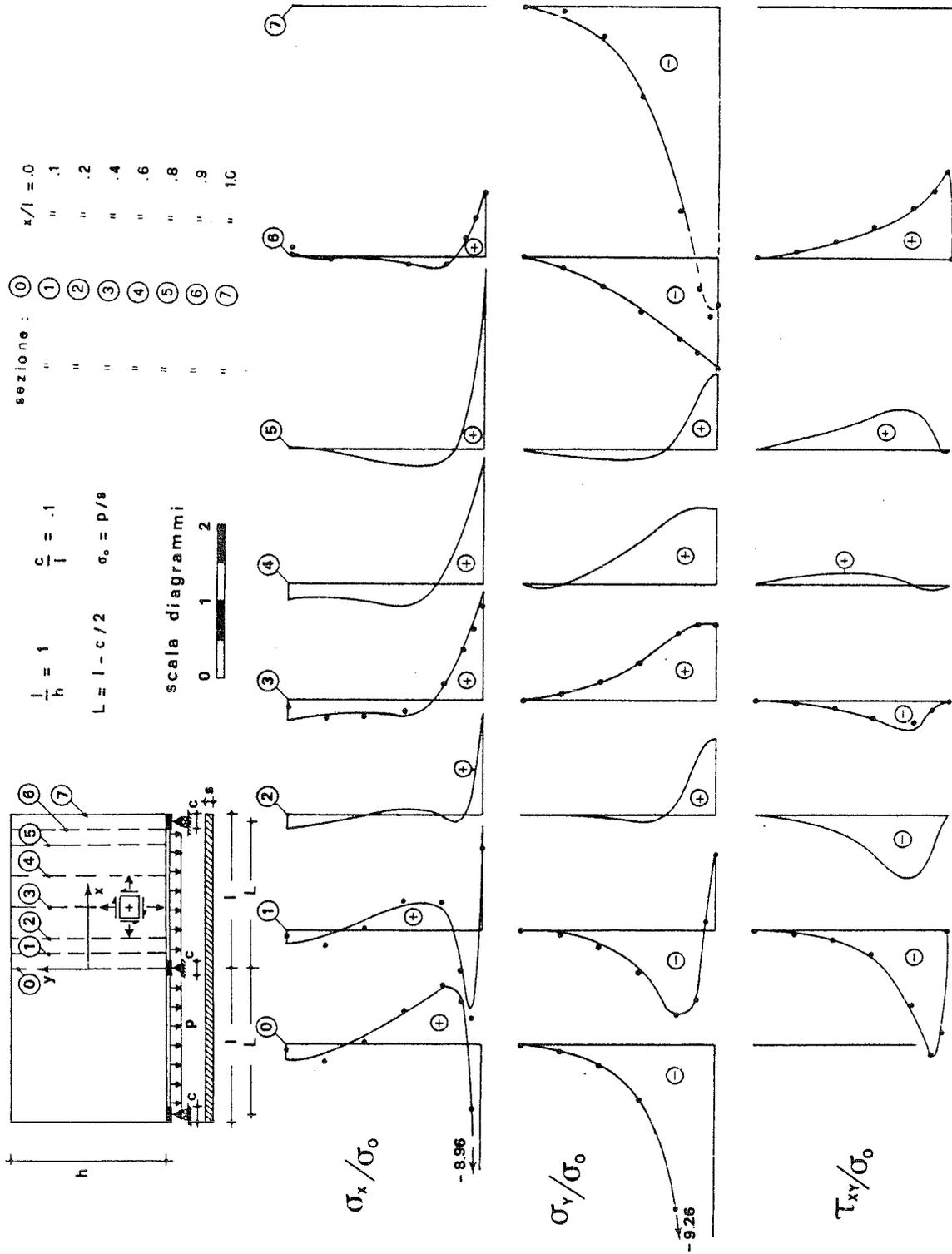


Fig.13 - Sforzi della trave senza lesene su appoggi rigidi.

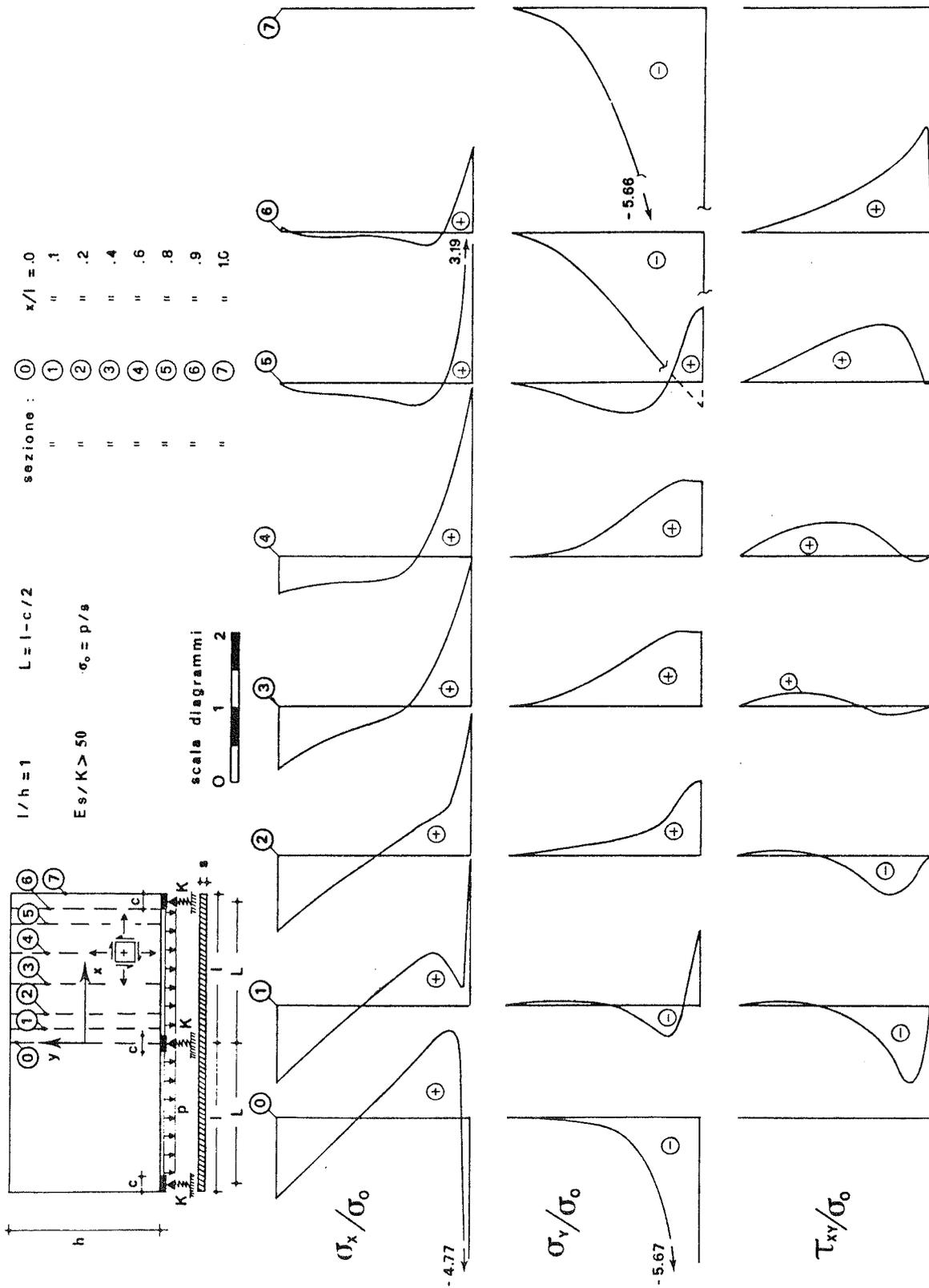


Fig.14 - Sforzi della trave senza lesene su appoggi elastici molto cedevoli.

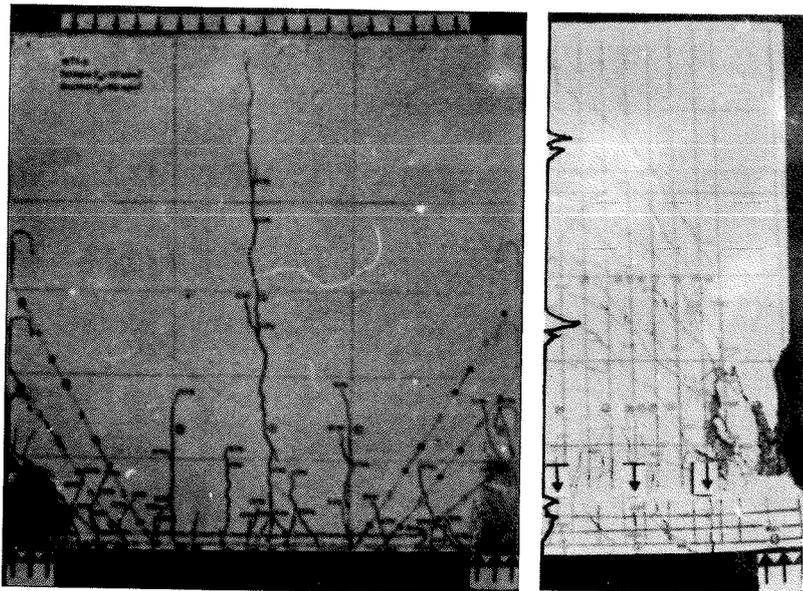


Fig.15 - Rottura della parete per cedimento locale sopra l'appoggio d'estremità ( I ).

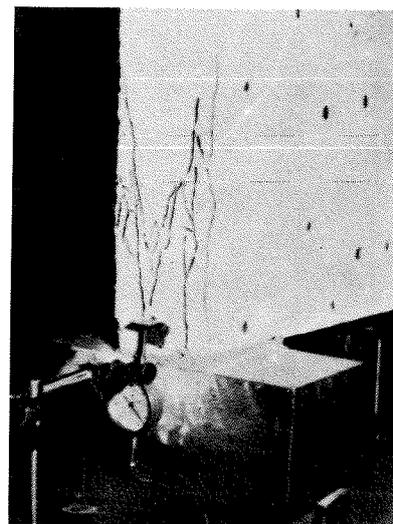


Fig.16 - Fessure di spacco indotte dall'ancoraggio delle armature ( I ).

di quanto avviene per l'appoggio centrale, il calcestruzzo ha una resistenza ridotta in quanto è compresso verticalmente e teso in direzione orizzontale oltre ad essere sottoposto alle azioni di "spacco" parallelamente alle barre in seguito agli elevati sforzi di aderenza richiesti dall'ancoraggio (Fig.16).

I risultati, sia pure ottenuti in campo elastico, forniscono indicazioni utili anche in vista dello stato limite ultimo, soprattutto quando i vincoli sono molto cedevoli. In tal caso infatti le reazioni tendono a valori che sono indipendenti dalle deformazioni interne della parete (Fig.10).

#### BIBLIOGRAFIA

- (I) Leonhardt F., Walter R., "Wandartige Träger" D.A.f.S., H 178 W.Ernst & Sohn, 1966.
- (II) Bay H. "Statisch unbestimmt-gelagerter wandartiger Träger" B.u.S., 1951, S.60.
- (III) Schlee W., "Die statisch unbestimmt gestützte durchlaufende Scheibe", B.u.S. 1965, S.25.
- (IV) Bay H. "Der freianfliegende Wandartig Träger im Stadium II", Der Bauingenieur 1939, S.375
- (V) Schwartz H., "Ein Beitrag zur Bestimmung der Biegebruch - Sicherheit wandartiger, Stahlbetonträger", Der Bauingenieur, 1969, S.363.

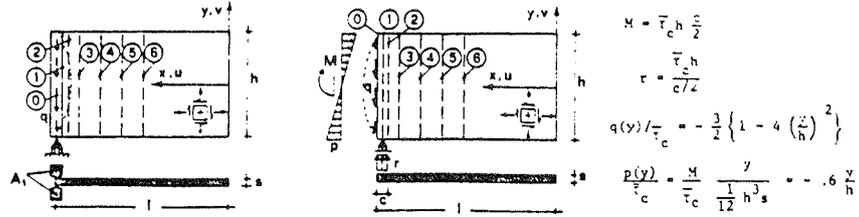
- (VI) Cedolin L., Dei Poli S., Kapur B.S., "Finite element analysis of reinforced concrete deep beams", Studi e Rendiconti-Corso di perfezionamento per le Costruzioni in c.a., Politecnico di Milano, Vol. 14, 1977, p.3.
- (VII) Giuriani E., "La trave parete, con lesene di irrigidimento a una o più campate. Parte I - Risoluzione del problema dell'interazione lastra-lesena col metodo dei potenziali dello spostamento", Studi e Ricerche del Corso di Perfez. in Costr. di c.a., Politecnico di Milano, vol.2, 1980.
- (VIII) Giuriani E., "La trave parete con lesene d'irrigidimento a una o più campate. Parte II. Il caso della trave parete a due campate con appoggi rigidi o cedevoli elasticamente", Studi e Ricerche del Corso di Perfez. in Costruz. di c.a., Politecnico di Milano, vol.2, 1980.

#### SIMBOLI

- $x, y$  : assi di riferimento nel piano della lastra rispettivamente orizzontale e verticale.
- $u, v$  : componenti di spostamento secondo  $x$  e  $y$
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  : componenti del tensore degli sforzi
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  : componenti del tensore di deformazione
- $\sigma_o, \tau$  : sforzo normale e tangenziale applicati al bordo della lastra
- $E$  : modulo elastico
- $\nu$  : coefficiente di Poisson
- $h, s$  : altezza e spessore della lastra parete
- $\ell$  : lunghezza della lastra di una campata
- $A_c$  : area della sezione della lesena
- $c$  : larghezza del cuscinetto d'appoggio
- $L$  : distanza tra i punti mediani degli appoggi considerati fissi a terra  
per la trave con lesene  $L = \ell$   
per la trave senza lesene  $L = \ell - c/2$
- $p, q$  : carico esterno per unità di lunghezza  $p = \sigma_o s$ ;  $q = \tau s$
- $\Delta$  : spostamento verticale del lembo inferiore della trave in corrispondenza dell'appoggio centrale
- $\delta$  : coefficienti di influenza: spostamenti verticali del lembo inferiore sopra l'appoggio centrale per carichi unitari
- $\alpha$  : coefficiente caratteristico per le reazioni d'appoggio
- $R_C, R_D$  : reazioni dell'appoggio esterno e centrale rispettivamente:  
 $R_C = \frac{p\ell}{2} (1-\alpha)$      $R_D = p\ell(1+\alpha)$
- $K$  : rigidezza del supporto elastico  $[F \times L^{-1}]$

APPENDICE

caso c



$A_1/h_s = .333$

y/h	Sezione 0 : (1-x)/h=0.			Sezione 1: (1-x)/h=.05			Sezione 2: (1-x)/h=.1			Sezione 3: (1-x)/h=.2			Sezione 4: (1-x)/h=.4		
	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$
-0.50	(.00)	(-3.03)	(+1.81)	2.03	.00	.00	1.49	.02	.00	1.08	.00	.00	.42	.00	.00
-0.45	.00	-2.77	+1.14	.07	-0.45	+0.42	.46	-.08	.00	.57	.01	-.13	.33	.06	-.08
-0.4	.00	-2.57	+0.78	-.19	-1.07	+0.61	-.09	-.36	+0.22	.17	-.02	-.10	.19	.02	-.12
-0.3	.00	-2.18	+0.30	-.17	-1.41	+0.38	-.26	-.82	+0.30	-.22	-.20	+0.05	-.04	.04	-.11
-0.1	.00	-1.42	-.20	-.08	-1.13	-.05	-.15	-.85	+0.03	-.22	-.41	+0.08	-.19	-.02	+0.01
.1	.00	-.71	-.38	-.02	-.62	-.24	-.04	-.52	-.14	-.09	-.32	-.01	-.11	-.25	+0.06
.3	.00	-.19	-.33	.03	-.20	-.24	.04	-.19	-.17	.05	-.13	-.05	.04	-.02	+0.06
.5	(.00)	(-.02)	(-.02)	.15	.00	.00	.25	.00	.00	.34	.00	.00	.27	.00	.00

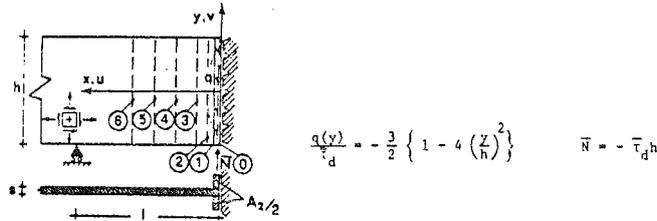
$A_1/h_s = .166$

y/h	Sezione 0 : (1-x)/h = 0.			Sezione 1: (1-x)/h=.05			Sezione 2: (1-x)/h = .1			Sezione 3: (1-x)/h = .2			Sezione 4: (1-x)/h = .4		
	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$
-0.50	.00	(-5.98)	(+3.46)	3.64	.00	.00	2.56	.00	.00	1.80	.00	.00	.66	.00	.00
-0.45	.00	-5.18	+1.93	.05	-.80	+0.72	.75	-.13	-.03	.94	.02	-.22	.52	.00	-.13
-0.4	.00	-4.58	+1.23	-.38	-1.88	+1.02	-.21	-.61	+0.36	.25	-.02	-.18	.31	.04	-.20
-0.3	.00	-3.65	+0.40	-.29	-2.38	+0.60	-.45	-1.36	+0.49	-.33	-.32	+0.08	-.07	.06	-.17
-0.1	.00	-2.21	-.38	-.11	-1.77	-.11	-.22	-1.35	+0.05	-.36	-.66	+0.13	-.31	-.02	+0.02
.1	.00	-1.05	-.61	-.02	-.94	-.39	-.05	-.80	-.22	-.12	-.50	-.01	-.17	-.08	+0.10
.3	.00	-.26	-.50	.05	-.29	-.37	.08	-.28	-.26	.10	-.19	-.08	.07	-.04	+0.09
.5	.00	(-.02)	(-.03)	-.22	-.00	.00	.37	-.00	.00	.52	-.01	.00	.43	.00	.00

$A_1 = 0 ; c/h = .1$

y/h	Sezione 0 : (1-x)/h = 0.			Sezione 1: (1-x)/h=.05			Sezione 2: (1-x)/h = .1			Sezione 3: (1-x)/h = .2			Sezione 4: (1-x)/h = .4		
	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$	$\sigma_x/\tau_c$	$\sigma_y/\tau_c$	$\tau_{xy}/\tau_c$
-0.50	.30	-10.00	.00	-1.80	-10.00	.00	1.41	(-5.00)	0.	3.81	.00	.00	1.32	.00	.00
-0.45	.27	-10.20	-.28	.89	-9.00	+0.03	.79	-4.81	+1.83	1.37	-.11	-.20	1.01	.03	-.26
-0.4	.24	-9.43	-.54	.36	-7.51	+0.38	.33	-4.55	+1.19	.07	-.56	+0.16	.52	.07	-.36
-0.3	.18	-7.28	-.96	-.04	-5.88	+0.06	-.33	-4.09	+0.54	-.64	-1.38	+0.41	-.20	.05	-.27
-0.1	.06	-3.73	-1.44	-.03	-3.34	-.79	-.17	-2.75	-.34	-.44	-1.58	+0.09	-.52	-.19	+0.05
.1	-.06	-1.52	-1.44	-.03	-1.53	-1.01	-.04	-1.40	-.68	-.12	-1.00	-.22	-.25	-.24	+0.10
.3	-.18	-.29	-.36	-.04	-.44	-.78	.03	-.46	-.61	.12	-.36	-.28	.15	-.09	+0.08
.5	-.30	.00	.00	.33	.00	.00	.45	.00	.00	.78	.00	.00	.77	.00	.00

caso d



$A_2/h_s = .333$

y/h	Sezione 0 : x/h = 0.			Sezione 1: x/h=.05			Sezione 2: x/h = .1			Sezione 3: x/h = .2			Sezione 4: x/h = .4		
	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$
-0.5	(-8.55)	(-7.53)	(-7.7)	-.30	.00	.00	.21	.00	.00	.68	.00	.00	.26	.00	.00
-0.45	-.38	-4.75	-2.35	-1.13	-1.35	-1.62	-.55	-.35	-.60	.09	-.05	-.06	.19	.00	.04
-0.4	.38	-3.94	-1.30	-.29	-1.40	-1.40	-.47	-.97	-.90	-.19	-.20	-.21	.05	.00	.05
-0.3	.58	-3.00	-.32	.24	-2.23	-.58	-.03	-1.49	-.60	-.23	-.56	-.33	-.12	-.05	.00
-0.1	.40	-1.74	-.47	.28	-1.49	-.23	.17	-1.23	.07	-.02	-.74	-.08	-.16	-.18	-.05
.1	.15	-.77	.68	.14	-.74	.50	.11	-.68	.35	.03	-.51	.15	-.08	-.18	.00
.3	.10	-.13	.55	-.05	-.23	.46	-.03	-.26	.35	-.02	-.22	.23	.00	-.08	.03
.5	(-1.42)	(-.30)	(.36)	-.71	-.00	.00	-.36	.00	.00	.00	.00	.00	.19	.00	.00

$A_2/h_s = .166$

y/h	Sezione 0 : x/h = 0.			Sezione 1: x/h = .05			Sezione 2: x/h = .1			Sezione 3: x/h = .2			Sezione 4: x/h = .4		
	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$	$\sigma_x/\tau_d$	$\sigma_y/\tau_d$	$\tau_{xy}/\tau_d$
-0.50	(-12.89)	(-13.78)	(-12.31)	.02	.00	.00	.40	.00	.00	1.02	.00	.00	.36	.00	.00
-0.45	-.25	-7.85	-3.25	-1.63	-2.08	-2.36	-.78	-.50	-.83	.14	-.07	-.06	.25	.00	.06
-0.4	.69	-6.05	-1.56	-.39	-3.28	-1.96	-.69	-1.40	-1.26	-.28	-.26	-.28	.06	.00	.07
-0.3	.83	-4.20	-.21	.37	-3.15	-.70	-.03	-2.11	-.80	-.33	-.77	-.46	-.18	-.06	.00
-0.1	.51	-2.21	.73	.38	-1.92	.38	.23	-1.60	.14	.02	-.98	-.09	-.21	-.23	-.07
.1	.17	-.89	.92	.17	-.88	.67	.14	-.83	.48	.05	-.64	.21	-.09	-.24	.00
.3	-.15	-.07	.67	-.08	-.23	.58	-.04	-.29	.49	-.02	-.26	.30	.00	-.10	.04
.5	-1.66	(-.33)	(.38)	-.89	.00	.00	-.49	.00	.00	-.02	.00	.00	.24	.00	.00

$A_2 = 0 ; c/h = .1$

y/h	Sezione 0 : x/h = 0.			Sezione 1: x/h = .05			Sezione 2: x/h = .1			Sezione 3: x/h = .2			Sezione 4: x/h = .4		
	$\sigma_x/\tau_f$	$\sigma_y/\tau_f$	$\tau_{xy}/\tau_f$	$\sigma_x/\tau_f$	$\sigma_y/\tau_f$	$\tau_{xy}/\tau_f$	$\sigma_x/\tau_f$	$\sigma_y/\tau_f$	$\tau_{xy}/\tau_f$	$\sigma_x/\tau_f$	$\sigma_y/\tau_f$	$\tau_{xy}/\tau_f$	$\sigma_x/\tau_f$	$\sigma_y/\tau_f$	$\tau_{xy}/\tau_f$
-0.50	-17.51	-20.00	.00	-7.80	(-10.00)	.00	1.93	.00	.00	1.47	.00	.00	.79	.00	.00
-0.45	-1.23	-16.31	.28	-2.35	-3.58	-4.78	-2.32	-1.69	-2.32	.00	-.09	-.19	.45	.00	.07
-0.4	1.46	-10.92	.54	.22	-9.13	-2.67	-1.08	-3.66	-2.65	-.62	-.54	-.70	.17	-.01	.07
-0.3	1.80	-5.36	.96	1.35	-5.34	-.39	.61	-3.34	-1.09	-.25	-1.52	-.90	-.17	-.15	-.06
-0.1	.98	-2.65	1.44	.88	-2.55	.97	.70	-2.31	.55	.29	-1.57	.05	-.16	-.43	-.08
.1	.02	-1.20	1.44	.06	-1.17	1.17	.07	-1.11	.92	.03	-.87	.49	-.10	-.34	.05
.3	-.66	-.34	.96	-.53	-.33	.81	-.36	-.32	.65	-.16	-.26	.39	.00	-.11	.05
.5	-.53	.00	.00	-.26	.00	.00	-.04	.00	.00	.25	.00	.00	.40	.00	.00

# TORSIONE MISTA NEL II STADIO PER STRUTTURE SOTTILI IN C.A.P.

Carlo MARIONI

Strutturista  
DECON  
ROMA

## SOMMARIO

Dopo una sintetica rassegna delle principali teorie sulla torsione nel c.a. in fase fessurata (II Stadio), viene affrontato il problema della redistribuzione tra torsione uniforme e non uniforme nel caso di strutture sottili per le quali le sollecitazioni di torsione non uniforme rimangono in campo elastico. Una breve rassegna dell'importanza dei dettagli costruttivi di armatura in funzione dei modelli adottati, conclude la Memoria.

## SUMMARY

A concise State of the Art report of r.c. torsional theories in the cracked state (Phase II) opens the paper. Redistribution is then studied between warping and non warping torsion for thin walled structures, that remain in the elastic range with warping stresses. A short review of detailing in connection with mechanical models adopted, closes the Paper.

## 1. PREMESSA BIBLIOGRAFICA

L'evoluzione della tecnologia industriale per strutture prodotte in grande serie comporta sovente una notevole riduzione degli spessori adottati. Tale tendenza impone un aggiornamento di modelli fisici di comportamento, che si basi su adeguate indagini sperimentali.

Il comportamento nel II Stadio di strutture sottili torsionate non è ancora stato approfondito a tutt'oggi in maniera adeguata. Recentemente P. MARTI (II) ha tentato una più razionale sistemazione della teoria del "Campo di compressioni diagonali", già formulata per il c.a. da M.P. COLLINS e MITCHELL nel 1971 (III e IV), sulla base di un'analogia teoria messa a punto da H. WAGNER nel 1929 (V) per lo studio del regime post-critico di taglio nelle travi metalliche ad anima sottile. Tale sistemazione è stata accolta nell'ultima versione del Manuale "Fissuration et déformations" del C.E.B. (VI), al quale si farà poi riferimento per il calcolo numerico.

Le altre teorie esistenti sull'argomento provengono dall'applicazione della teoria generale della plasticità di DRUCKER-PRAGER al cemento armato, e da varianti spaziali del traliccio di Ritter - Morsch.

Come è noto la trasposizione della teoria generale della plasticità incrementale al cemento armato urta contro una serie di difficoltà dovute al comportamento sostanzialmente diverso di questo materiale in campo anelastico rispetto all'acciaio, in particolare al comportamento tipo strain-softening in compressione ed a tutta la serie di fenomeni legati alla presenza di armature metalliche ancorate in una matrice dotata di scarsa resistenza a trazione, la quale può presentare fenomeni di fessurazione anche prima dell'applicazione dei carichi esterni. Va poi ricordato che la legge fondamentale di normalità non è pienamente estensibile al cemento armato, e che pertanto più che di un adeguamento della teoria della plasticità incrementale, bisognerebbe riferirsi piuttosto a teorie limite dell'equilibrio elastico. Una sintesi delle ricerche condotte in questa direzione è stata fatta da P. BAZANT (VII) nel 1981 in occasione del IABSE-Colloquium di Delft "Advanced Mechanics of r.c.". Vale la pena di ricordare che essa termina sottolineando l'esigenza di introdurre in questi studi la velocità di dispersione di energia lungo la banda fessurata, il che comporta evidentemente l'affrontamento di tematiche alquanto complesse.

Per quanto riguarda l'altro gruppo fondamentale di teorie che si rifanno al traliccio di Ritter-Mörsch, va ricordato che per la torsione, le equazioni di equilibrio furono proposte da Rausch già nel 1929 (VIII) e che la normativa C.E.B. è tuttora prevalentemente impostata su tralicci spaziali aventi i correnti posti sugli assi delle armature d'angolo della sezione in c.a., sulla base degli studi condotti nel 1971 da LAMPERT e THÜRLIMANN (IX).

2. ANALISI DELLE PRINCIPALI TEORIE RELATIVE A SEZIONI IN C.A. SOLLECITATE A TORSIONE NEL II STADIO.

2.1 Le teorie derivate direttamente dalla Teoria generale della plasticità.

Le applicazioni della Teoria generale della plasticità basate su un dominio di plasticizzazione di tipo quadrato e su una curva intrinseca alla Coulomb per il calcestruzzo

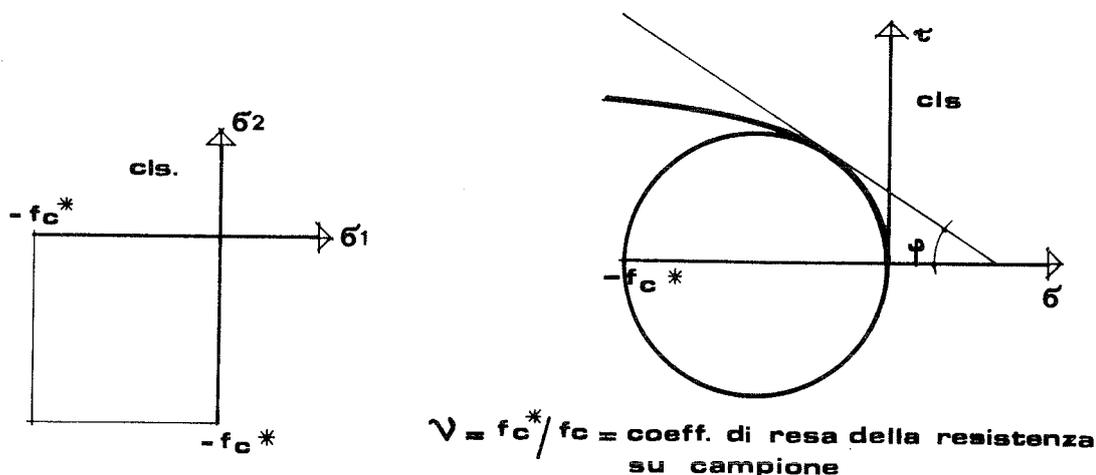


Fig.1 Dominio di plasticizzazione quadrato per stati di tensione piani e curva intrinseca di Coulomb modificata per il calcestruzzo.

hanno permesso già da tempo la soluzione di stati piani di tensione nei quali è predominante l'influsso dell'armatura metallica rispetto alle caratteristiche



pressione in funzione della percentuale meccanica di armatura trasversale, costituisce la base di valutazione dell'angolo  $\theta$  nel Metodo affinato di verifica al taglio del C.E.B. La seconda equazione fissa la resistenza limite  $\tau_{xy}$  in funzione anch'essa della percentuale meccanica di armatura trasversale, con la limitazione ( $31^\circ < \theta < 59^\circ$ ). Nel caso di staffatura verticale, tale limitazione conduce alla disequaglianza ( $0,26 < \omega_y < 0,74$ ).

## 2.2 Le teorie a traliccio spaziale.

Per quanto riguarda la torsione, i metodi a traliccio spaziale, come ad esempio quello adottato dal M.C.-C.E.B./1978, si limitano innanzitutto a fissare empiricamente lo spessore della crosta esterna reagente ed a definire l'area media soggetta al flusso torsionale.

L'inclinazione delle compressioni principali dipende esclusivamente dal rapporto tra le percentuali meccaniche nelle due direzioni di armatura, con la limitazione ( $31^\circ < \theta < 59^\circ$ ):

$$\tan^2 \theta = \frac{\omega_y}{\omega_x} \quad (3)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{f_c^*} = \omega_x \tan \theta = \omega_y \cot \theta \quad (4)$$

Queste due formule sono evidentemente riferite ad un ben determinato tipo di armatura: l'armatura limite di una certa sezione di calcestruzzo, progettata in modo da dare cioè luogo al simultaneo collasso delle armature nelle due direzioni ortogonali ( $x, y$ ).

Lo spessore della crosta resistente  $t$  è stabilito per sezioni prismatiche in funzione della posizione delle armature longitudinali d'angolo, e il perimetro medio sottoposto alla circolazione torsionale è delimitato dagli assi di tali armature.

## 2.3 La teoria del "Campo di compressioni diagonali".

La principale differenza di questa teoria rispetto a quelle a traliccio spaziale, consiste nell'associare un circolo di Mohr delle deformazioni ad un solo circolo di Mohr delle tensioni per il continuo (fessurato) calcestruzzo - acciaio (IV), oppure a due distinti circoli di Mohr delle tensioni per il calcestruzzo e per l'acciaio (II)

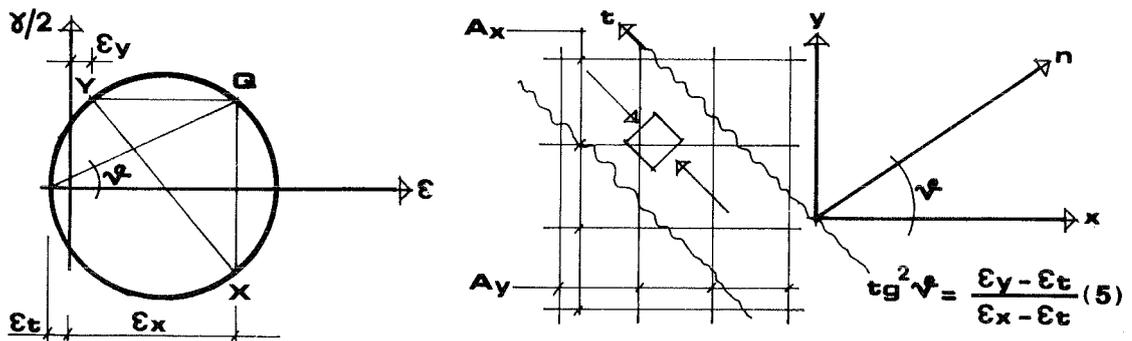


Fig. 3 Il "Campo di compressioni diagonali".

Per arrivare ad una modellazione così sintetica dello stato deformativo nel continuo fessurato calcestruzzo-acciaio, gli ideatori della teoria del "Campo di compressioni diagonali" pongono una serie di ipotesi che ne vincolano e definiscono insieme il comportamento meccanico.

1) A somiglianza di quanto considerato dai metodi a traliccio spaziale, lo spessore strutturale resistente a torsione è costituito da una camicia di calcestruzzo, che qui esclude il copriferro e comprende l'armatura metallica longitudinale e trasversale. Tale camicia di calcestruzzo è sede di uno stato membranale di compressione unidirezionale con isostatiche avvolte a spirale intorno all'asse longitudinale della struttura: lo spessore reagente  $t$  viene ricavato con procedimento a stress-block per la sezione parzializzata.

2) La resistenza del calcestruzzo teso è trascurabile e pertanto le tensioni del continuo fessurato in un generico punto e secondo una generica direzione, spettano all'acciaio, immaginato uniformemente disperso nella matrice di calcestruzzo.

3) La distorsione fessurativa è ipotizzata unidirezionalmente dispersa nel continuo fessurato: essa non provoca disturbi statici legati all'aderenza, nè disturbi meccanici locali lungo le barre di armatura, perchè le barre sono sollecitate a partire dagli spigoli della gabbia di armatura, ed una volta aperte le lesioni, le direzioni principali delle tensioni nel continuo fessurato conservano la loro direzione, e gli spostamenti tangenti tra le due facce di una lesione svaniscono ( $d\delta_T = 0$ ).

Uno dei vantaggi derivanti dall'adozione di tale teoria consiste nell'aver posto finalmente in primo piano lo studio delle deformazioni del continuo fessurato,

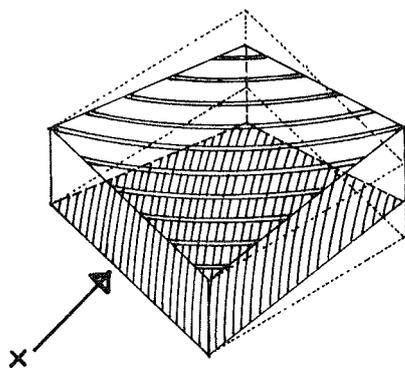


Fig. 4 Deformazione torsionale di un elemento di trave prismatica: sono evidenziate le due famiglie di curve principali.

che risulta più vicino per il suo comportamento ad una piastra torsionata, che non ad un solido prismatico sottoposto a torsione alla De Saint Venant.

In effetti oltre al predominante stato di compressione unidirezionale, sono presenti nella parete torsionata sforzi flessionali di notevole entità che elevano notevolmente i picchi di sollecitazione nelle strisce concave di bielle compresse, come giustamente rilevato da Thürlimann (X). Va osservato inoltre che la parzializzazione della sezione resistente avviene sulle due facce della parete torsionata secondo direzioni ortogonali, come risulta da un esame della Fig.4.

Lo stato tensionale della piastra sottoposta a torsione, può essere meglio compreso ricordando che tra le curvature in un punto secondo varie direzioni di una superficie torsionata, sussiste una relazione rappresentabile con un circolo di

Mohr (Fig.5)

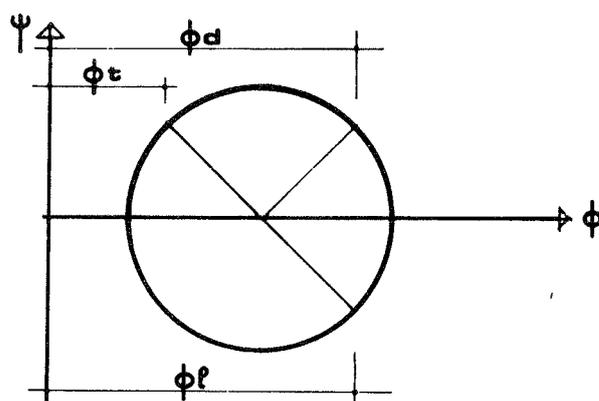


Fig. 5 Curvature in un punto di una parete torsionata, da Collins (XI)

Si comprende meglio pertanto come la parzializzazione delle sezioni resistenti avvenga non più secondo superfici piane ma secondo superfici di tipo elicoidale. La rappresentazione di Mohr ci permette di individuare altresì una curvatura trasversale  $\phi_t$  la quale non può che influenzare il comportamento meccanico delle armature trasversali tese dalle estremità.

Uno studio approfondito delle varie implicazioni meccaniche conseguenti all'insorgere dello stadio fessurato, non è comunque ancora stato condotto in maniera sistematica né dai Teorici, né dagli Sperimentatori.

Ci limiteremo soltanto a ricordare qui un tipico esempio di effetto meccanico locale dovuto alla interferenza tra lo stato tensionale delle armature longitudinali d'angolo e le bielle compresse di calcestruzzo, rilevato da Jori e Martinez (XII) su una piastra torsionata dello spessore di 10 cm. (Fig.6).

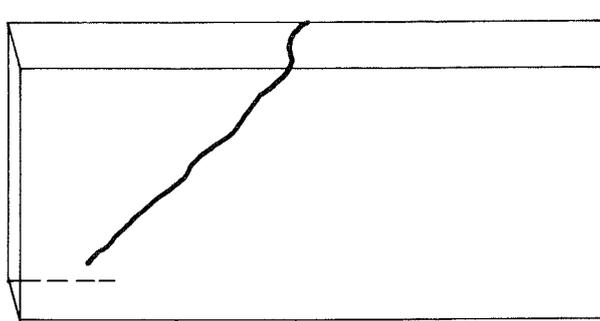


Fig. 6 Caratteristica lesione d'angolo di struttura torsionata ( $M_T = \text{cost}$ ) rilevata da Iori e Martinez (XII) su piastra (10x10)cm.

Tale effetto locale non è previsto da alcuna delle teorie esposte, per le quali la traiettoria delle compressioni nel calcestruzzo dovrebbe conservare il suo angolo con l'asse della trave.

2.4 Lo studio dei meccanismi di plasticizzazione nello stadio fessurato e la formazione dei cinematismi di collasso.

Non si tratta di una teoria a sé stante, ma dell'indispensabile complemento di qualsiasi teoria staticamente ammissibile. Nel caso della torsione del c.a., essendo la trasformazione di geometria resistente della sezione nel passaggio allo stadio fessurato così complessa, si intuisce come un tale studio sia di basilare importanza almeno sotto due profili:

A) per l'iperstaticità interna della sezione, in quanto la plasticizzazione delle singole pareti e dei singoli elementi resistenti del continuo fessurato ha ripercussioni sulla deformabilità dell'insieme strutturale;

B) per l'iperstaticità al contorno dei tratti plasticizzati, poichè sia le pareti nel loro insieme, che le armature longitudinali subiranno una evoluzione nei vincoli terminali a seconda della localizzazione delle zone plasticizzate.

Gli studi più approfonditi sulla formazione di questi meccanismi sono stati finora condotti da P. Müller (I)(IX), che ha indagato sia sull'evoluzione dei meccanismi di plasticizzazione dei diversi elementi resistenti delle sezioni sottili chiuse in c.a. (iperstaticità di tipo A), che sull'influsso dello stadio raggiunto dalle armature longitudinali al contorno del tratto plasticizzato, quale vincolo terminale nel caso di sollecitazione di torsione non uniforme (iperstaticità di tipo B). A noi interessa per il momento rilevare che i diagrammi costitutivi del materiale delle sezioni prismatiche o chiuse in cemento armato sono abbastanza riconducibili a segmenti di tipo multilineare, e danno luogo a vertici che segnano l'inizio della plasticizzazione di un tipo di armatura presente nella crosta resistente, nè più nè meno di quanto avviene per i diagrammi sforzi-deformazioni di strutture iperstatiche perfettamente elasto-plastiche (Fig.7)

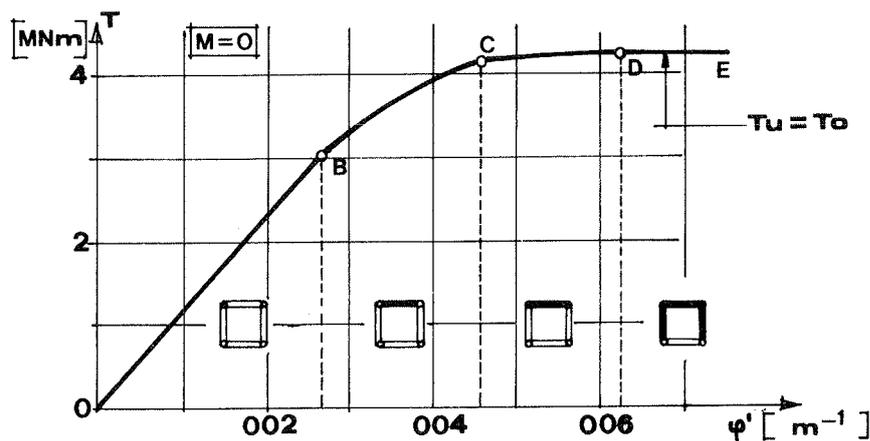


Fig. 7 Diagramma costitutivo ( $M_T, \varphi'$ ) del materiale di una sezione chiusa sottile in c.a., da (I)

Per quanto riguarda infine l'approfondimento dei cinematismi spaziali di collasso della sezione, dei quali ancora poco si conosce, rimandiamo agli interessanti studi di P. Müller, ricordando che anche ai fini di una corretta progettazione, l'indifferenza su ricerche di questo tipo, può indurre a sottovalutare alcuni dettagli di armatura, la cui efficacia può essere evidenziata in maniera chiara solo da studi sperimentali pilotati e condotti fino allo stato limite ultimo.

## 2.5 Verifiche sperimentali e campo di applicabilità delle diverse teorie.

Un confronto completo tra le diverse teorie sul piano sperimentale, non risulta a tutt'oggi essere stato ancora portato a termine.

Ci limitiamo qui a riportare i risultati di uno studio comparativo pubblicato da Collins (XI) nel 1979 sulla base di prove sperimentali condotte da Hsu su una serie di sei travi prismatiche torsionate in c.a. (Fig. 8), armate con un'armatura longitudinale pari a 1,5 volte quella trasversale.

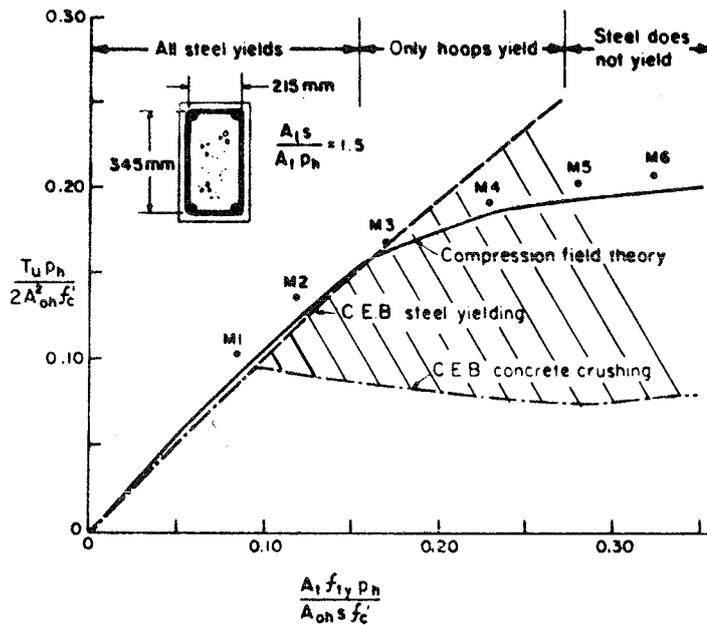


Fig. 8 Resistenza torsionale in funzione della quantità globale di armatura secondo Collins.

Come si vede dal diagramma la teoria del 'Campo di compressioni diagonali' raggiunge un buon grado di attendibilità in questo tipo di verifica sperimentale, mentre altrettanto non si può dire per la teoria a traliccio spaziale elaborata dal C.E.B. In effetti nel caso del collasso simultaneo delle armature longitudinali e trasversali, le formule del M.C. - C.E.B. danno un risultato a sfavore della stabilità, mentre nel caso di cedimento delle bielle compresse le formule del C.E.B. sono molto prudenti e danno una riduzione di resistenza con l'aumentare dell'armatura. Tali anomalie del modello C.E.B. sono soprattutto imputabili al metodo di valutazione dello spessore di camicia resistente riferito alla distanza minima tra gli assi delle armature longitudinali.

Per quanto riguarda poi i casi di snervamento di un solo tipo di armatura è chiaro che le formule del M.C. - C.E.B. cadano in difetto, prevedendo esse la simultanea plasticizzazione di queste. Il merito di Collins, riconosciuto ormai anche dal C.E.B. (XIII), è stato di aver scelto un tipo di armatura che, riducendo l'inclinazione delle bielle, comporta maggiori sollecitazioni sia nella camicia di cal-

cestruzzo che nell'armatura longitudinale, mettendo così in crisi il modello a traliccio spaziale.

3. Ridistribuzione tra torsione uniforme e non uniforme nel II Stadio per strutture sottili in c.a.p.

Uno studio sul comportamento di strutture sottili torsionate in c.a.p., con l'adozione di leggi costitutive dei materiali non lineari è stato pubblicato nel 1980 da Migliacci, Mola e Gaddi (XIV). In questo studio la portanza torsionale del profilo alla De Saint Venant viene volutamente trascurata e l'attenzione è concentrata sulla ridistribuzione di tutti gli sforzi normali nella sezione parzializzata rispetto alla classica analisi elastica a sezione interamente reagente. Noi ci occuperemo più propriamente della ridistribuzione in campo anelastico tra i due tipi di torsione uniforme e non uniforme, nel caso in cui quest'ultima rimanga con le sue sollecitazioni ( $\sigma, \tau$ ) al di sotto della soglia elastica dei materiali.

Riprendiamo l'equazione differenziale, che governa il regime di torsione mista in campo elastico:  $T = T_s + T_\omega = Gk\varphi' - EI_{\omega\omega} \varphi'''$  (6)

- (dove:  $T_s$  = Momento torcente uniforme (De Saint Venant)
- $T_\omega$  = Momento torcente non uniforme
- $Gk$  = rigidezza elastica torsionale (De Saint Venant)
- $EI_{\omega\omega}$  = rigidezza elastica settoriale
- $\varphi'$  = angolo di rotazione specifico)

Se adottiamo un legame costitutivo dei materiali di tipo bi-lineare, per la sezione sottile precompressa torsionata, potremo considerare separatamente e poi sovrapporre la quota elastica e la quota anelastica della deformazione, con metodo analogo a quello seguito dall'Autore nello studio della ridistribuzione dei momenti in campo anelastico per le strutture iperstatiche (XV)

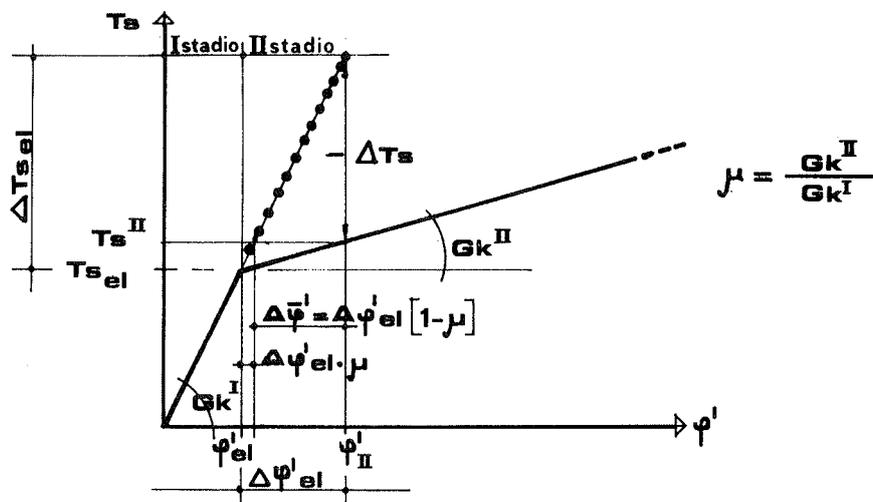


Fig. 9 Diagramma costitutivo del materiale per sez. sottile torsionata in c.a.

Dalla Figura 9 risulta per il II Stadio:

$$T_S^{II} = \varphi_{II}' GK^{II} - \Delta\varphi_{EL}' GK^I (1 - \mu) = GK^I (\varphi_{II}' - \Delta\bar{\varphi}') \quad (7)$$

$$\text{(con } \mu = \frac{GK^{II}}{GK^I} = \frac{\text{Rigidezza torsionale anelastica}}{\text{Rigidezza torsionale elastica}} \text{)}$$

$\Delta\bar{\varphi}' =$  quota anelastica di rotazione specifica torsionale.

Il secondo addendo della (7) rappresenta la quota di torsione uniforme perduta nel II Stadio rispetto al comportamento elastico. Nei casi di torsione mista per i quali la quota di torsione non uniforme sia tale da rimanere in campo elastico con le sue sollecitazioni, potremo pertanto scrivere:

$$-\Delta T_S = +\Delta T_\omega = -\Delta\varphi_{el}' GK^I (1 - \mu) = -\Delta T_{sel} (1 - \mu) \quad (8)$$

Si potrà così estendere la (6) allo Stadio torsionale anelastico:

$$T = GK' (\varphi' - \Delta\varphi_{el}' (1 - \mu)) - EI\omega\omega \varphi'' \quad (9)$$

Nel tratto di struttura che supera la soglia del comportamento elastico torsionale avremo anche un aumento del momento  $M_\omega$  (warping moment) che si ottiene per integrazione lungo il tratto plasticizzato

$$dM_{\omega\omega} = -\int \Delta T_\omega dl \quad (10)$$

L'incremento globale di momento non uniforme  $M$  relativo al tratto plasticizzato è dato dall'integrale indefinito:

$$\Delta M_\omega = GK^I \int \Delta\bar{\varphi}'_{el} (1 - \mu) dl \quad (11)$$

La funzione integranda rappresenta la rotazione specifica anelastica  $\bar{\varphi}'$  lungo il tratto plasticizzato, come risulta chiaramente nella Fig.9 e pertanto:

$$\Delta M_\omega = GK^I \int_{l_{pl}} \Delta\bar{\varphi}' dl \quad (12)$$

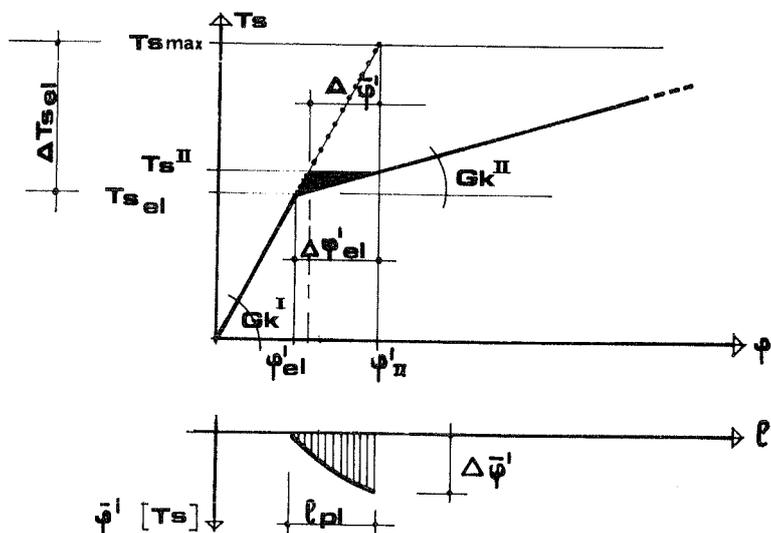


Fig. 10 Integrazione delle rotazioni specifiche lungo il tratto plasticizzato.

Si potrà pertanto scrivere che l'incremento globale di momento non uniforme vale genericamente:

$$\Delta M_{\omega} = GK^I \chi \Delta \bar{\varphi}' l_{pl} = GK^I \chi \Delta \varphi'_{el} (1 - \mu) l_{pl} \Rightarrow T_S \chi l_{pl} \quad (13)$$

dove  $\chi$  è un coefficiente che dipende dalla forma assunta dalla funzione  $\bar{\varphi}'(T)$  lungo il tratto plasticizzato  $l_{pl}$  mentre  $\Delta \bar{\varphi}'$  e  $\Delta \varphi'_{el}$  sono valutati per

$$T_S = T_S^{MAX}$$

Per la valutazione di  $K^{II}$  impiegheremo la formula riportata dal C.E.B. Bull. N°143 VI) per un valore ( $\theta = 45^\circ$ ) delle isostatiche di compressione:

$$K^{II} = \frac{4Ea_{ef}^3}{u^2} \frac{\rho_x \rho_t}{\rho_x \rho_t} \quad (14)$$

dove  $u$  è il perimetro medio ed  $A_{ef}$  è l'area della crosta reagente a torsione inscritta in tale perimetro; ( $\rho_x, \rho_t$ ) sono le percentuali geometriche di armatura longitudinale e trasversale.

Consideriamo ora un esempio abbastanza frequente nella pratica costruttiva, per valutare l'ordine di grandezza della redistribuzione in gioco. Nella Fig.11 sono riportati per completezza tutti i dati geometrici e i carichi relativi alla struttura esaminata, insieme ai principali parametri torsionali caratteristici del regime elastico.

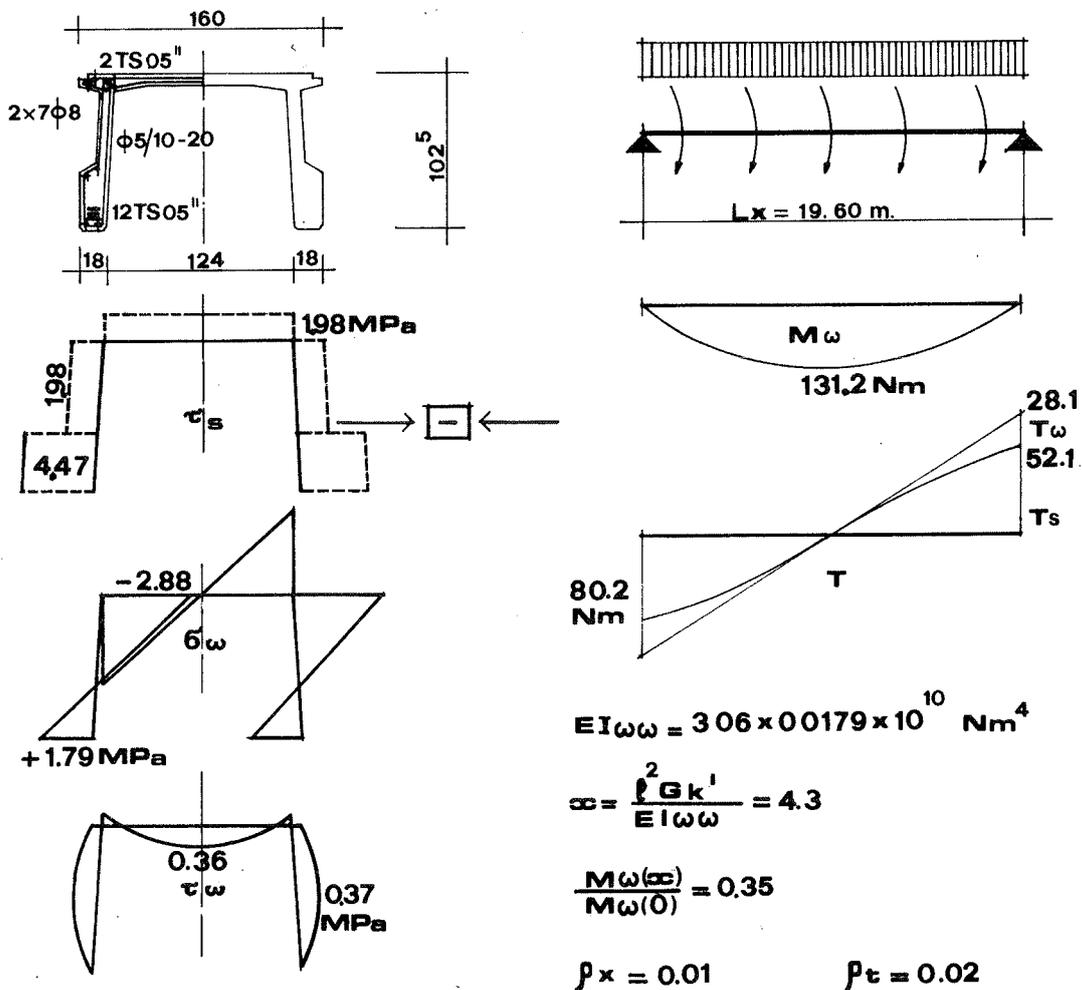


Fig. 11 Struttura sottile in c.a.p. (regime elasto-torsionale).

Per quanto riguarda il II Stadio faremo riferimento al diagramma costitutivo dei materiali basato sulla citata rigidità torsionale (14) adottata dal C.E.B. - Bull.N°143 e riportato nella Fig. 12 e su di una  $\sigma$  (principale) di fessurazione pari a 2.0 MPa

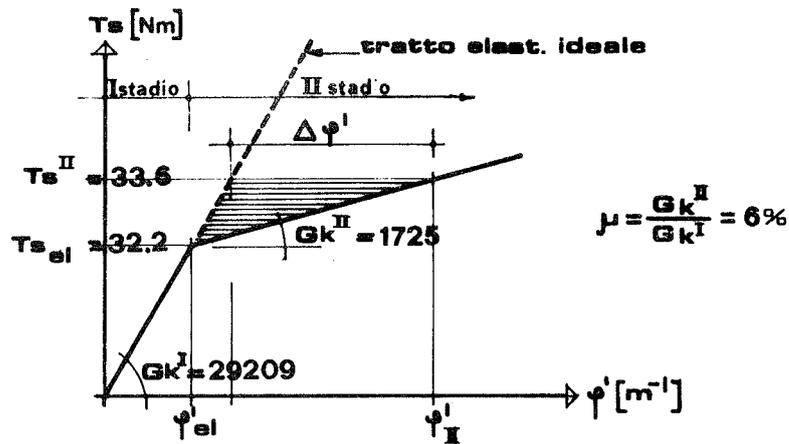


Fig. 12 Diagramma costitutivo dei materiali della sezione sottile c.a.p. di Fig.11  $\Delta\bar{\varphi}$  rotazione torsionale specifica anelastica.

I risultati della redistribuzione dei momenti torsionali e del momento  $M_{\omega}$  per la fase anelastica sono riportati nei diagrammi di Fig. 13 e Fig. 14

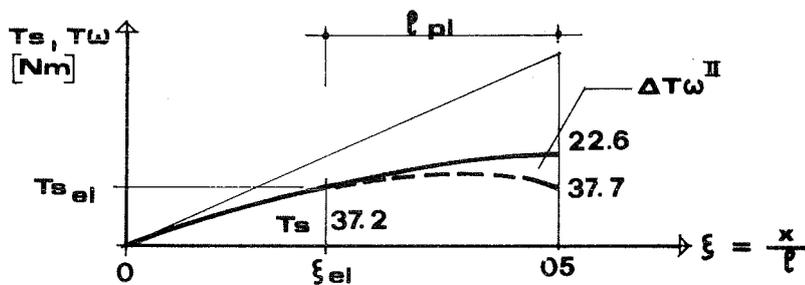


Fig. 13 Ridistribuzione dei momenti torcenti uniformi e non uniformi nel II Stadio torsionale per la struttura di Fig. 11.

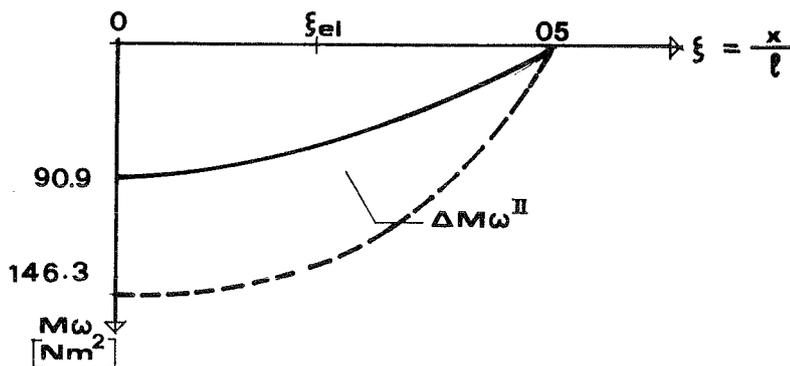


Fig. 14 Ridistribuzione di  $M_{\omega}$  nel II Stadio torsionale per la struttura di Fig. 11

4. Importanza dei dettagli d'armatura e controllo della fessurazione in fase d'esercizio.

Abbiamo visto in 2.4 l'importanza di basare i dettagli costruttivi su ricerche ben pilotate condotte fino al collasso. Ma va sottolineato più in generale che il tipo di armatura adottato deve garantire il funzionamento del modello fisico prescelto anche nel II Stadio: non tutte le teorie elastiche per le strutture sottili sono ancora state estese con modello valido anche nello stadio fessurato. Più in particolare non sembra inutile ricordare qui che le strutture sottili, per tutto quanto detto nel paragrafo 2, devono essere sempre armate con doppia maglia d'armatura.

- La crosta reagente della sezione, essendo sottoposta ad un flusso di compressioni avvolte a spirale lungo l'asse della trave, deve essere efficacemente cerchiata da staffe di tipo chiuso per contrastare la spinta degli angoli verso l'esterno, dovuta alla deviazione centrifuga delle compressioni diagonali di calcestruzzo.

- Le armature longitudinali, opportunamente sorrette da staffe concentrate negli angoli per accogliere le compressioni diagonali del calcestruzzo, devono svilupparsi senza interruzioni ed essere ancorate efficacemente all'estremità della struttura, perchè costituiscono l'indispensabile contrasto delle spirali di compressione nel calcestruzzo (Principio di azione e reazione).

- Le estremità della struttura torsionata vanno opportunamente attrezzate per ricevere a tutta altezza le compressioni diagonali del calcestruzzo. Le traiettorie diagonali incomplete, se troncate dalla testata libera della trave, andranno riagganciate sulle ultime spirali di traiettoria completa con opportuna armatura, e tenendo conto dell'aggravio di sollecitazione prodotto così sulle ultime spirali complete (v. Fig. 15)

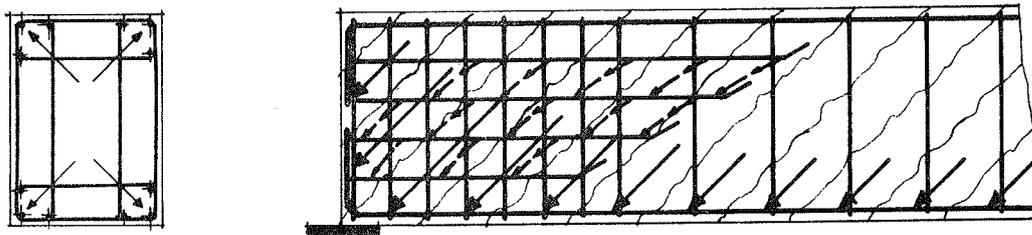


Fig. 15 Tipica armatura di testata di una trave torsionata.

Per quanto riguarda il controllo della fessurazione, anche il già citato Manuale del C.E.B. "Fissuration et Déformations" - Monaco 1982 - si limita a fornire delle indicazioni che si risolvono nella riduzione del massimo diametro e della sollecitazione per le barre impiegate (per  $w_k = 0,2 \text{ mm} \div \sigma_a \leq 200 \text{ MPa}$  e  $\varnothing \leq 12 \text{ mm}$ ), e ad una notevole riduzione dell'interesse adottato per le barre stesse. Per ritardare invece l'apertura delle lesioni in esercizio si potrà come al solito adottare l'artificio di un conveniente stato di coazione longitudinale.

## 5. Considerazioni Finali.

La ridistribuzione interna tra torsione uniforme e non uniforme nel passaggio al II Stadio anelastico torsionale, studiata per sovrapposizione degli effetti elastici ed anelastici con legge costitutiva dei materiali bilineari, dà luogo ad una variazione delle caratteristiche di sollecitazione non uniformi ( $T_{\omega}$ ,  $M_{\omega}$ ) già apprezzabili in condizioni d'esercizio nel caso di torsione mista di sezioni sottili aperte in c.a.p.

Il tipo di armatura di queste sezioni va realizzato in sostanziale sintonia con il modello fisico adottato per il II Stadio.

## BIBLIOGRAFIA

- I) P. MUELLER: Plastic Analysis of Torsion and Shear Reinforced Concrete, IABSE COLLOQUIUM, Copenhagen 1979, 8 pages.
- II) P. MARTI: Strength and Deformations of Reinforced Concrete Members under Torsion and Combined Actions, CEB BULLETIN 146, 28 pages.
- III) MITCHELL D. and COLLINS M.P.: Diagonal Compression Field Theory - A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion - ACI JOURNAL, V.71 August 1974, pp.396-408.
- IV) COLLINS M.P. and MITCHELL D.: Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams, PCI JOURNAL, Sept:Oct. 1980 pp.32 to 93.
- V) H. WAGNER: Ebenè Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, V.20 Nos.8 to 12, Berlin, 1929.
- VI) CEB Bulletin N°143, Manuel de Calcul "Fissuration et Déformations", Contribution à la 22e Session Plénière du C.E.B., Munich, Décembre 1981.
- VII) BAZANT Z.P.: Advances in Deformations and Failure Models for Concrete, IABSE COLLOQUIUM, Delft 1981, pages 9 to 39.
- VIII) E. RAUSCH: Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Torsion) und Abscheren, Julius Springer-Verlag, Berlin 1929, 51 pp.
- IX) P. MUELLER: Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending, IABSE Publications, Vol. 136-II (1976), pp.147-163.
- X) B. THUERLIMANN: Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams, ACI Symposium, April 1976, Philadelphia, U.S.A.
- XI) COLLINS M.P.: Reinforced Concrete Members in Torsion and Shear, IABSE COLLOQUIUM, Copenhagen 1979, pages 119 to 130.
- XII) I. IORI, F. MARTINEZ Y CABRERA: Sul Comportamento Sperimentale di Travi in C.A. e C.A.P. in Parete Sottile in Regime di Pura Torsione, Giornate C.T.E. Verona 1982.
- XIII) K.H. REINECK: Models for the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Members, CEB Bulletin 146, pages 45 to 96.
- XIV) A. MIGLIACCI, F. MOLA e T. GADDI: Analisi Teorica di Elementi in C.A. a Pareti Sottili e Profilo Aperto in Presenza di Leggi Costitutive dei Materiali non Lineari, Congresso C.T.E. 1980, Ferrara Novembre 1980.
- XV) C. MARIONI: Remarks on Moment Distribution Under Service Loading Condition in TCC Example 12, CEB Bulletin N°134, Non-Linear Analysis of Concrete Structures, Rome, 29 May 1979 pages 67 to 80

# ANALISI NON LINEARE DI PARETI SOTTILI IN CEMENTO ARMATO

E.F. Radogna

-

R. Di Marco

Prof. Straordinario di Tecnica  
delle Costruzioni - Facoltà di  
Ingegneria - Univers.di Roma

Ingegnere Civile

## SOMMARIO

Il comportamento di una parete sottile di cemento armato viene simulato con un modello di calcolo discreto, costituito da un graticcio di aste ortogonali rigidamente connesse nei nodi. I primi risultati della sperimentazione numerica mostrano il buon accordo con risultati sperimentali reperiti nella bibliografia e permettono di analizzare l'influenza dei parametri più significativi.

## SUMMARY

The behaviour of a slender reinforced wall is simulated by means of a gridwork of orthogonal beams, rigidly connected in their nodes. The first numerical results confirm a good agreement with test results and allow to analyze the influence of the most significant parameters.

## 1) PREMESSE E SCOPI

Nell'ambito delle tipologie strutturali impiegate nell'edilizia le pareti sottili hanno trovato una applicazione sempre più estesa in concomitanza con l'evoluzione dei procedimenti industrializzati. Si tratta di componenti portanti verticali piani, in cui lo spessore è piccolo rispetto alle altre due dimensioni, una delle quali risulta, di norma, uguale alla altezza di piano. L'altra dimensione dipende dal procedimento costruttivo (prefabbricazione di grandi pannelli, getti in opera con cassaforme a tunnel) e dalle caratteristiche della costruzione. La singola parete è vincolata, di regola, in corrispondenza dei due lati opposti orizzontali; per quanto riguarda i lati verticali sono possibili tre casi: entrambi i lati sono liberi, entrambi i lati sono vincolati, un lato è libero e l'altro è vincolato. In relazione alla posizione reciproca delle pareti e delle mo

dalità di realizzazione delle unioni i vincoli possono essere assimilati ad appoggi oppure ad incastri.

Le forze che agiscono su tali componenti sono prevalentemente parallele al piano medio della parete ed eccentriche rispetto ad esso: il comportamento che ne deriva è quello misto di "piastra-lastra". I rapporti usuali fra altezza di piano e spessore della parete conferiscono alle pareti il carattere di elementi snelli, per i quali la valutazione delle caratteristiche di sollecitazione deve essere fatta con riferimento alla configurazione deformata (teoria del 2° ordine). Questo aspetto geometrico del problema determina la prima causa di non linearità della trattazione analitica. Nel caso di elementi di cemento armato occorre inoltre tenere conto di altre due cause di non linearità, quella esistente nelle leggi costitutive dei materiali componenti e quella indotta nella funzione "momento-curvatura" della sezione composita dalla fessurazione del conglomerato teso. Nello studio dei pilastri snelli di c.a. si è ormai giunti ad una sistematizzazione dei metodi di analisi, che possono essere classificati in tre categorie, in base al grado di approssimazione che è possibile raggiungere:

- a) il "metodo generale", consigliato per casi di particolare impegno in (1), (2), (3), che opera con la tecnica degli elementi finiti (4), (5);
- b) metodi (6), (7), (8), che si fondano sulla estensione al cemento armato del concetto di cerniera plastica. Per telai a maglie rettangolari lo studio viene di solito suddiviso in due parti: analisi della stabilità "globale" con il metodo iterativo P- $\Delta$  (3) e successiva analisi delle singole aste compresse;
- c) metodi semplificati per l'analisi della singola asta, fra i quali quello basato sulla prefigurazione della deformata (sinusoide della "colonna modello"), che consentono di costruire abachi e diagrammi di facile e rapido impiego, il cui campo di applicazione è stato oggetto in precedenza di indagini da parte degli scriventi (9), (10), (11).

Nel campo delle pareti sottili di cemento armato non si dispone ancora di una sistematizzazione della materia altrettanto completa, anche perchè nei casi in cui la parete sia vincolata solo sui lati orizzontali è possibile estendere ad essa i metodi validi per i pilastri. Nel presente lavoro si esamina il problema della parete vincolata anche sui lati verticali, compressa da forze assiali eccentriche, dirette verticalmente, e si propone un modello di calcolo a graticcio, che tiene conto della rigidità torsionale e delle tre cause di non linearità prima ricordate. Tale modello costituisce la estensione al caso bidimensionale delle schematizzazioni utilizzate nei precedenti lavori sui pilastri snelli, così che può avvalersi di parte delle ipotesi e degli algoritmi già largamente collaudati.

Applicazioni numeriche sono svolte con riferimento alla determinazione del carico di collasso di pareti quadrate, appoggiate su tutti i lati, compresse verticalmente: esse consentono, innanzitutto, di con

frontare i risultati forniti dal metodo proposto con quelli ottenuti da esperienze reperibili in bibliografia, così da saggiare il grado di approssimazione conseguibile; a sua volta la simulazione numerica al passo permette di analizzare la evoluzione di fenomeni fisici, in particolare la variazione delle rigidzze flessionali nelle due direzioni ortogonali e di quella torsionale dalle condizioni di servizio a quelle di collasso.

## 2) MODELLO PROPOSTO PER LO STUDIO DELLA PIASTRA: GRATICCIO DI ELEMENTI MONODIMENSIONALI IN CAMPO NON LINEARE

Ampie bibliografie sulla estensione del metodo degli elementi finiti a problemi geometricamente non lineari, a partire dal lavoro originale di Turner ed altri nel 1960, sono riportate in (14), (15).

Nel modello proposto la struttura bidimensionale reale è suddivisa in un "graticcio" di "travi" ortogonali collegate rigidamente nei nodi ed aventi caratteristiche geometriche e meccaniche corrispondenti a quelle delle strisce di piastra schematizzate.

Nella trattazione seguente, con il metodo degli "spostamenti", si trascurano, come nel caso elastico, le deformazioni nel piano  $x,y$  della struttura e le rotazioni intorno all'asse  $z$  ad esso ortogonale: ogni nodo ha quindi tre soli gradi di libertà, lo spostamento  $z$  e le rotazioni  $\varphi^x$  e  $\varphi^y$ .

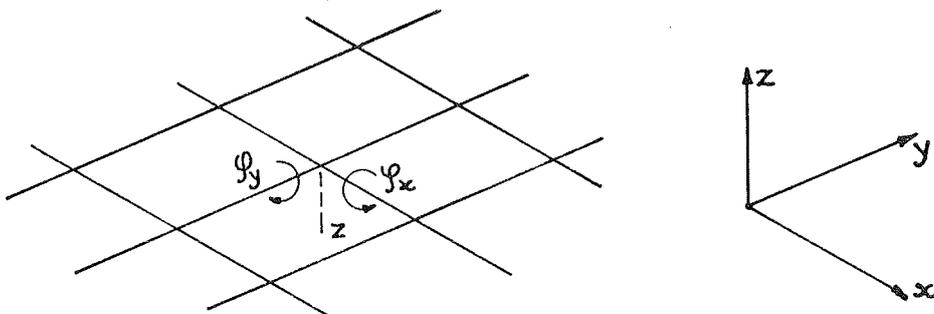


Fig. 1

La soluzione del problema si ottiene risolvendo il sistema di equazioni di equilibrio

$$[K^x] \{\Delta S^x\} = \{\Delta P^x\} \quad (1)$$

che è di tipo lineare solo in termini incrementali, perchè il problema, in termini finiti, non è lineare.

### 2.1 SISTEMI DI RIFERIMENTO

Estendendo al caso dei graticci la teoria già esposta per i telai piani in (13) e ripresa in (5), vengono introdotti 3 sistemi di riferimento:

- 1) sistema "globale"  $x,y,z$  rispetto al quale sono individuati
  - le coordinate e gli spostamenti dei nodi
  - i carichi, per ipotesi applicati solo in corrispondenza dei nodi;

- 2) Sistemi "locali" m, n, o rispetto ai quali sono calcolate le matrici di rigidezza delle singole aste ed ad esse collegati;
- 3) Sistemi "intermedi" legati alla posizione dell'asta all'inizio del passo di carico.

La introduzione dei sistemi "intermedi" consente di separare gli effetti delle non linearità del materiale da quelle dovute alla variazione della geometria del sistema conseguente alle deformazioni.

## 2.2 NON LINEARITA' GEOMETRICA

### 2.2.1 Definizione degli spostamenti e delle forze nei sistemi di riferimento introdotti.

Si consideri l'asta di fig. 2 che nel generico passo di carico si sposti dalla configurazione iniziale AB a quella finale A'B'.

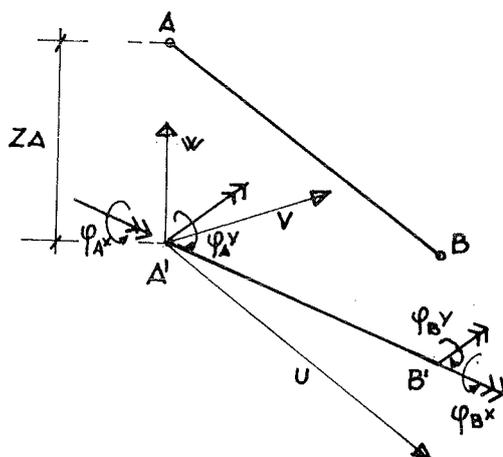


fig. 2

Per definire le deformazioni dei nodi di estremità vengono introdotti tre sistemi di spostamenti:

globale:  $\{S^x\}^T = \{z_A, \varphi_A^x, \varphi_A^y, z_B, \varphi_B^x, \varphi_B^y\}$  riferiti, con ovvio significato dei simboli, al sistema globale x, y, z.

intermedio:  $\{S^u\}^T = \{w_{AB}, \varphi_{AB}^u, \varphi_A^v, \varphi_B^v\}$

riferiti ad un sistema intermedio con origine in A', asse U parallelo all'asse AB iniziale, asse V parallelo al piano xy e orientato in modo da avere proiezione positiva su y:  $w_{AB}, \varphi_{AB}^u$  sono lo spostamento e la rotazione relativi delle estremità misurate parallelamente a w e intorno a v,  $\varphi_A^v$  e  $\varphi_B^v$  sono le rotazioni delle stesse estremità intorno a v.

locale:  $\{S^m\}^T = \{\varphi_{AB}^m, \varphi_A^n, \varphi_B^n\}$  riferiti ad un sistema "locale" con origine in A', asse m coincidente con l'asse A'B', asse n ortogonale a questo con proiezione positiva su V:

$\varphi_{AB}^m, \varphi_A^m, \varphi_B^m$  sono la rotazione torsionale relativa e le rotazioni flessionali delle due estremità.

Con le stesse convenzioni e con ovvio significato dei simboli vengono introdotti 3 sistemi di forze:

$$\begin{aligned} - \text{globale} & \quad \{F^x\}^T = \{F_A^z, M_A^x, M_A^y, F_B^z, M_B^x, M_B^y\} \\ - \text{intermedio} & \quad \{F^u\}^T = \{F_{AB}^w, M_{AB}^u, M_A^v, M_B^v\} \\ - \text{locale} & \quad \{F^m\}^T = \{M_{AB}^m, M_A^n, M_B^n\} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Trasformazione delle forze e degli spostamenti dal sistema x,y,z a quello u, v, w

La trasformazione geometrica, espressa in forma matriciale da

$$\{S^u\} = [T] \{S^x\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{con} & \quad \begin{matrix} -\cos wz & 0 & 0 & \cos wz & 0 & 0 \\ 0 & -\cos vx & -\cos vy & 0 & \cos vx & \cos vy \end{matrix} \\ \text{con } [T] = & \quad \begin{matrix} 0 & \cos vx & \cos vy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos vx & \cos vy \end{matrix} \quad (3) \end{aligned}$$

risulta definita dai coseni direttori degli assi u,v,w rispetto agli assi x,y,z calcolabili, con le convenzioni indicate, dalle coordinate dei nodi di estremità all'inizio di ogni passo di carico.

Analoga relazione può essere definita, applicando il principio dei LL.VV. per le forze

$$\{F^x\} = [T]^T \{F^u\} \quad (4)$$

Trattandosi poi di trasformazione di tipo geometrico le (2) e (4) sono valide anche in termini incrementali.

$$\begin{aligned} \{\Delta S^u\} &= [T] \{\Delta S^x\} & (5) \\ \{\Delta F^x\} &= [T]^T \{\Delta F^u\} & (6) \end{aligned}$$

### 2.2.3 Trasformazione delle forze e degli spostamenti dal sistema u,v,w al quello m,n,o.

La trasformazione, in termini finiti, non è lineare ed è individuata da

$$\begin{aligned} \varphi_{AB}^m &= \varphi_{AB}^u \frac{l}{\sqrt{l^2 + w_{AB}^2}} \\ \varphi_A^m &= \varphi_A^v - \arctg w_{AB}/l \\ \varphi_B^m &= \varphi_B^v - \arctg w_{AB}/l \end{aligned} \quad (7)$$

in cui l è la lunghezza dell'asta deformata all'inizio del passo.

Una relazione lineare può essere definita solo in termini incrementali, differenziando ambo i membri delle (7)

$$\{dS^m\} = [A] \{dS^u\} \quad (8)$$

in cui [A] assume la forma

$$[A] = \begin{matrix} -\varphi_{AB}^u w_{AB}/l^2 & 1 - w_{AB}^2/2l^2 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 1 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (9)$$

se si sostituiscono alle espressioni a secondo membro delle (7) i corrispondenti termini di uno sviluppo in serie.

Analoga relazione in termini finiti tra le forze nei due sistemi può essere ricavata, applicando il principio LL.VV.

$$\{F^u\} = [A]^T \{F^m\} \quad (10)$$

da cui, differenziando ambo i membri, si ricava la corrispondente trasformazione tra gli incrementi

$$\{dF^u\} = [A]^T \{dF^m\} + [dA]^T \{F^m\} \quad (11)$$

Se nel prodotto  $[dA]^T \{F^m\}$  si raggruppano i termini relativi agli stessi incrementi  $\{dS^u\}$  la (11) assume la forma

$$\{dF^u\} = [A]^T \{dF^m\} + [D] \{dS^u\} \quad (12)$$

con

$$[D] = \begin{bmatrix} N/l - \frac{M_{AB}^m \varphi^m}{l^2} & -\frac{W_{AB} M_{AB}^m}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{W_{AB} M_{AB}^m}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

in cui compare, oltre alle deformazioni e alle caratteristiche di sollecitazione delle estremità delle aste, anche lo sforzo normale di membrana.

### 2.3 NON LINEARITA' DEL MATERIALE

In ogni asta la relazione tra forze e deformazioni nel sistema "locale"

$$\{\Delta F^m\} = [K^m] \{\Delta S^m\} \quad (14)$$

è valida solo in termini incrementali e la matrice  $[K^m]$ , che ha la forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

è dipendente dallo stato di sollecitazione e va calcolata ad ogni passo di carico.

#### 2.3.1 Componente torsionale

Nel modello le aste monodimensionali schematizzano strisce di una struttura bidimensionale per la quale è improprio parlare di momenti torcenti nella stessa accezione della teoria della "trave"; in accordo con il grado di approssimazione che è possibile raggiungere con un modello a graticcio, è sembrato sufficiente adottare i valori di  $K_{11}$  suggeriti in (2), in assenza di viscosità.

$K_{11}^I = 0.30 \cdot E_c \cdot J_p / l$  nel caso di assenza di fessurazione, verificata con un controllo sulla entità delle tensioni principali;

$K_{11}^{II} = 0.05 \cdot E_c \cdot J_p / l$  quando la condizione precedente non è verificata o si trascura la resistenza a trazione del calcestruzzo, essendo  $J$  il momento di inerzia polare della sezione supposta totalmente reagente.

Proposte più accurate per la valutazione di  $K_{11}$  in funzione dello stato di sollecitazione composta  $M, V, T$  nel caso di "travi" sono riportate in (16) unitamente ad una aggiornata bibliografia.

### 2.3.2 Comportamento flessionale

I termini  $K_{22}, K_{23}, K_{32}, K_{33}$  vengono determinati per inversione della corrispondente sottomatrice di flessibilità i cui 4 elementi  $F_{iJ}$

$$F_{iJ} = \Delta \varphi_J (\Delta M_i^n) / \Delta M_i^m \quad i = A, B \quad J = A, B$$

sono definiti dalle variazioni di rotazione nelle estremità A o B indotte dalle variazioni dei momenti e calcolati per via numerica dalle variazioni di curvatura nelle 5 sezioni in cui è suddivisa ogni asta.

In questa prima fase lo studio è stato condotto nella ipotesi di costanza dello sforzo normale agente; condizione, questa, che si presenta frequentemente nella pratica della utilizzazione di pannelli per strutture prefabbricate ove forte indeterminazione si può avere sulla posizione del punto di applicazione dei carichi verticali che sono conosciuti con buona approssimazione.

In tale ipotesi il comportamento flessionale della sezione è bene rappresentato dalla relazione  $M = f(\chi)$  tra il momento flettente e la corrispondente curvatura: tale funzione viene ricavata "per punti" con una tecnica iterativa ampiamente collaudata in precedenti studi. Sono stati adottati i seguenti legami costitutivi dei materiali:

- Calcestruzzo :  $\frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{\eta (K - \eta)}{1 + (K - 2)\eta}$  con  $\eta = \frac{\epsilon}{-0,0022}$   $-0,0035 \leq \epsilon \leq 0$   
 $K = -1,1 \cdot E_c \cdot \frac{0,0022}{f_c}$   
 $\sigma_c = \epsilon \cdot 1,1 \cdot E_c$   $0 < \epsilon < \frac{f_{ctk}}{1,1 \cdot E_c}$

con ovvio significato dei simboli.

- Acciaio : legame elasto plastico.

Per la valutazione dell'effetto irrigidente del "Tension stiffening", tra i numerosi metodi proposti nella letteratura (17), è stato adottato quello che si basa sul concetto di "Tensione media dell'acciaio" ed ipotizza una variazione iperbolica della riduzione della deformazione specifica dell'acciaio  $\epsilon$  con lo stato di tensione  $\sigma$ .

### 2.4 TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE $[K^m]$ DAL SISTEMA $m, n, o$ A QUELLO $x, y, z$ .

Sostituendo le (5) e (6) nelle (8) e (12) si ottengono le relazioni:

$$\{ \Delta S^m \} = [A] [T] \{ \Delta S^x \} \quad (16)$$

$$\{ \Delta F^x \} = [T]^T [A]^T \{ \Delta F^m \} + [T]^T [D] [T] \{ \Delta S^x \} \quad (17)$$

Sostituendo nella (17) la (14) si ottiene

$$\{ \Delta F^x \} = [T]^T ([A]^T [K^m] [A] + [D]) [T] \{ \Delta S^x \} \quad (18)$$

e quindi il valore di  $K^x$  in cui compaiono due termini

il primo,  $[A]^T [K^m] [A]$ , contiene la linearizzazione della matrice di rigidezza nel sistema locale e delle relazioni tra gli spostamenti nei sistemi locali e intermedi;

il secondo,  $[D]$ , rappresenta il contributo nelle condizioni di equilibrio delle variazioni delle proiezioni delle forze accumulate nell'elemento per effetto degli spostamenti nodali (effetto del II ordine).

### 3. PROCEDURA DI CALCOLO

Il calcolo viene effettuato per incrementi successivi dei carichi applicati fino al raggiungimento della massima portanza per instabilità o per rottura di una delle sezioni, secondo una procedura che per il passo generico  $p$  può essere così riassunta:

- 1) All'inizio del passo  $p$  è conosciuto completamente lo stato di
  - deformazione  $\{ S^x \}$ ,  $\{ S^u \}$ ,  $\{ S^m \}$
  - sollecitazione  $\{ F^x \}$ ,  $\{ F^u \}$ ,  $\{ F^m \}$

della struttura così come la entità dell'incremento di carico

- 2) Si calcolano le matrici  $[T]$ ,  $[A]$ ,  $[D]$  relative alla struttura allo inizio del passo con le (3), (9), (13)
- 3) Si calcolano con la (1) gli incrementi  $\{ \Delta S^x \}$  relativi all'incremento di carico  $\{ \Delta P^x \}$  ipotizzando per le matrici  $[K^m]$  i valori determinati alla fine del passo precedente.
- 4) Si calcolano con le (5), (8), (14) i valori di  $\{ \Delta S^m \}$  e  $\{ \Delta F^m \}$  e da questi, con le (15) nuovi valori di  $[K^m]$ .
- 5) Il calcolo procede per iterazioni fino a che la norma del vettore delle forze interne nodali al termine della iterazione  $J$   $\{ \Delta P^x \}_J$  e determinati con la (1) da  $\{ \Delta S^x \}_{J-1}$  e  $[K^x]_J$  non differisce dalla norma del vettore dei carichi esterni applicati di una quantità superiore alla tolleranza.
- 6) Si ricalcolano con le (3), (9), (13) le matrici  $[T]$ ,  $[A]$ ,  $[D]$ , con i valori determinati al termine del processo 5) e si ripete il controllo tra carichi esterni e forze interne iniziando, se necessario un nuovo processo iterativo.
- 7) Se durante le fasi 5) o 6) si raggiunge la rottura di una delle

sezioni o la convergenza non è garantita dopo un numero prefissato di iterazioni, il calcolo è ripreso dal punto 1 con un valore ridotto dell'incremento a carico.

- 8) Solo in caso di raggiungimento della convergenza nelle fasi 5) e 6) si aggiornano i vettori deformazioni e sollecitazioni e le matrici di rigidezza; lo squilibrio nodale legato alle tolleranze di convergenza viene poi applicato insieme all'incremento dei carichi esterni nel nuovo passo che inizia dalla fase 1.

#### 4. ESEMPI DI APPLICAZIONE NUMERICA

##### 4.1 SIMULAZIONE DI PROVE SPERIMENTALI

Il modello proposto è stato utilizzato per la valutazione della capacità portante e delle deformazioni massime all'atto del collasso di sei lastre quadrate di cui sono disponibili in bibliografia (19) i risultati delle prove sperimentali.

Nella Tabella seguente sono riportate le caratteristiche di capenteria la snellezza  $l_0/H$ , lo sforzo normale e la eccentricità max adimensionalizzata, la deformazione del centro della lastra, misurate sperimentalmente e calcolate.

TEST	H(cm)	$l_0/H$	Valori sperimentali			Valori Calcolati		
			$N/N_{ult}$	$l/H$	max/H	$N/N_{ult}$	$l/H$	max/H
1	5.0	30	0.180	0.8		0.180	0.7917	0.2306
2	5.0	30	0.325	0.4		0.325	0.4175	0.3336
3	5.0	30	0.260	0.6	0.30	0.260	0.5909	0.2858
4	5.0	30	0.515	0.2	0.24	0.515	0.1988	0.2404
5	7.5	20	0.290	0.6		0.290	0.6110	0.1232
6	7.5	20	0.535	0.3	0.14	0.535	0.2726	0.1059

Percentuale geometrica di armatura

direzione verticale  $\rho_v = 0.8 \%$  sui due lati

direzione orizzontale  $\rho_o = 0.16 \%$  sui due lati

Calcestruzzo  $f_{ck} = 27.5$  MP

Acciaio  $f_{yk} = 420$  MP

Altezza  $l_0 = 1.50$  m      Larghezza  $b = 1.50$  m      copriferro  $U/H = 0.1$

$$N_{ult} = (f_{ck} + 2 \cdot \rho_v \cdot f_{yk}) \cdot H \cdot b$$

Il confronto tra valori riportati mostra un buon accordo tra i dati sperimentali e quelli calcolati.

#### 4.2 PREVISIONE DEL COMPORTAMENTO DEFORMATIVO DELLA PARETE SOTTILE

Nella fig. 3 sono riportate le curve "eccentricità della forza normale - spostamento trasversale al centro", determinate nel caso di una parete sottile quadrata, caratterizzata da:

- altezza  $l_0 = 3.0$  m, larghezza  $B = 3,0$  m, spessore  $H = 15$  cm,
- calcestruzzo  $R_{bk} = 30$  MP, Acciaio  $f_{yk} = 380$  MP
- percentuale geometrica di armatura:
  - in direzione verticale  $\rho_v = 0.5$  %
  - in direzione orizzontale  $\rho_o = 0.25$  %

Sono stati considerati tre valori della forza normale adimensionalizzata

$$V = \frac{N}{0.85 \times f_{ck} \times B \times H} = 0.2; 0.5; 0.7 \text{ e due}$$

condizioni di vincolo:

- parete incernierata sui quattro lati (linea continua)
- parete incernierata sui lati orizzontali (linea a tratti)

Poichè la eccentricità della forza normale rappresenta, a meno di una costante, il momento del I ordine agente sulle strisce verticali della parete, il diagramma simula una prova di carico eseguita su una parete sottile, mantenendo costante l'intensità della forza normale e facendone variare la eccentricità. Il momento del I ordine, che la sezione trasversale può sopportare, diminuisce al crescere della forza normale ed all'aumentare della deformabilità delle strisce verticali, parallele al carico assiale. Tale aumento si manifesta, nel caso in esame, quando si eliminano i vincoli in corrispondenza dei lati verticali della parete.

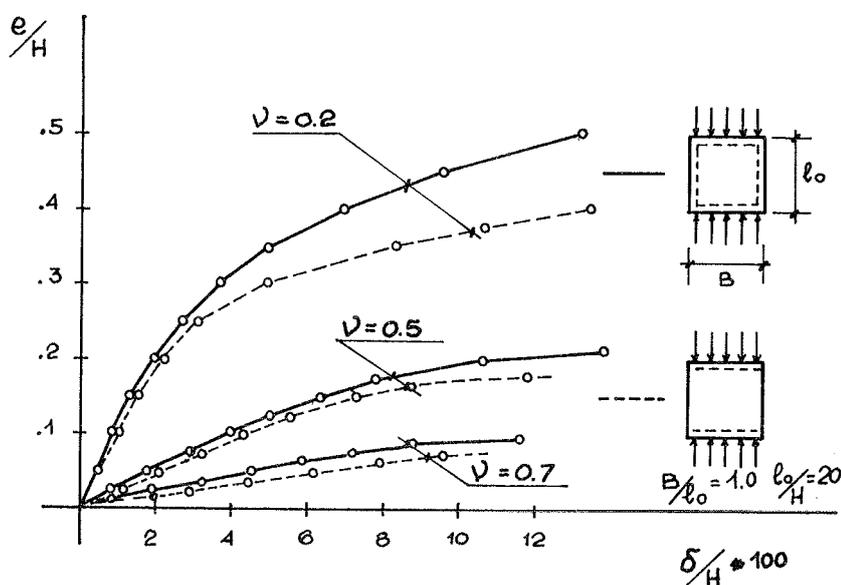


fig. 3

#### 4.3 EFFETTO DELLA ENTITA' DELLA FORZA NORMALE SULLA CAPACITA' PORTANTE

Nella fig. 4 sono riportate le curve "momento flettente massimo - forza normale" adimensionalizzate, relative alla parete della fig. 3.

Sono stati considerati tre casi:

- parete sottile incernierata su quattro lati (linea continua);
- parete sottile incernierata sui lati orizzontali (linea a tratti);
- parete tozza incernierata sui lati orizzontali (linea a tratto e punto).

Nel terzo caso il diagramma coincide con la curva di interazione M,N della sezione trasversale.

L'influenza deteriorante dei momenti del 2° ordine sulla capacità portante "disponibile" della parete, vincolata soltanto sui lati orizzontali, come nel caso di un pilastro, è evidenziata dal confronto fra la curva a tratto e punto (parete tozza) e quella a tratti (parete snella). La introduzione dei vincoli sui lati verticali aumenta la capacità portante disponibile, rappresentata dalla curva a tratto continuo che risulta intermedia fra le due precedenti. Nel caso considerato il beneficio dell'effetto piastra è, peraltro, relativamente modesto, perchè il valore della snellezza delle strisce verticali è di circa 70. Ad esso corrisponde, secondo le vigenti norme italiane, il coefficiente di amplificazione  $\omega = 1.08$ .

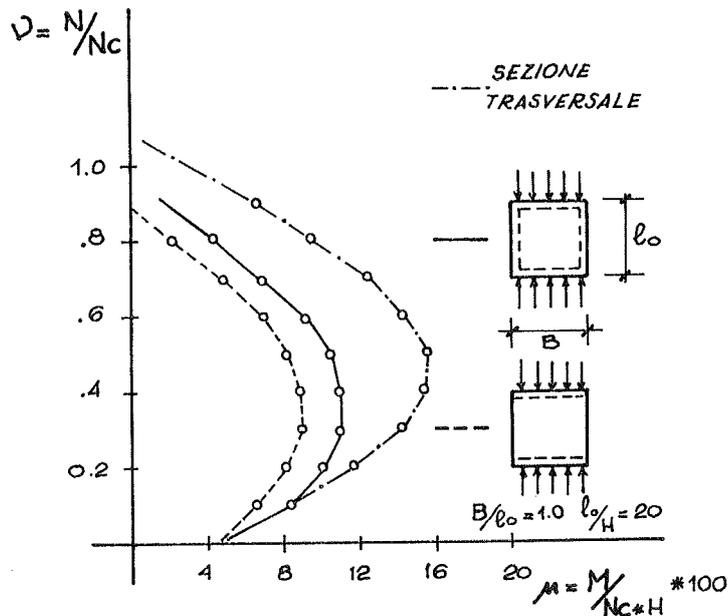


fig. 4

#### 4.4 EFFETTO DEL RAPPORTO FRA LE PERCENTUALI DI ARMATURA ORIZZONTALE E VERTICALE

Nella fig. 5 è stato riportato l'andamento del momento massimo adimensionalizzato al variare del rapporto  $\beta$  fra le percentuali di armatura nelle due direzioni con riferimento alla parete della fig. 3, vincolata su quattro lati e per  $\nu = 0.5$ .

Si rileva che, nel caso in esame, l'incremento dell'armatura in direzione orizzontale dal valore  $e_o/e_v = 0.5$ , raccomandato in (2), al valore  $e_o/e_v = 1$  comporta un incremento del momento massimo di circa il 15 %. L'aumento della capacità portante delle strisce verticali al crescere del coefficiente  $\beta$  dipende dall'aumento di rigidità flessionale delle strisce orizzontali, dovuto, a sua volta, all'incremento della armatura orizzontale. L'influenza della armatura sul momento d'inerzia della sezione diventa apprezzabile nello stato fessurato del calcestruzzo, che è quello che si raggiunge per primo nelle strisce orizzontali, prive di forza assiale di compressione.

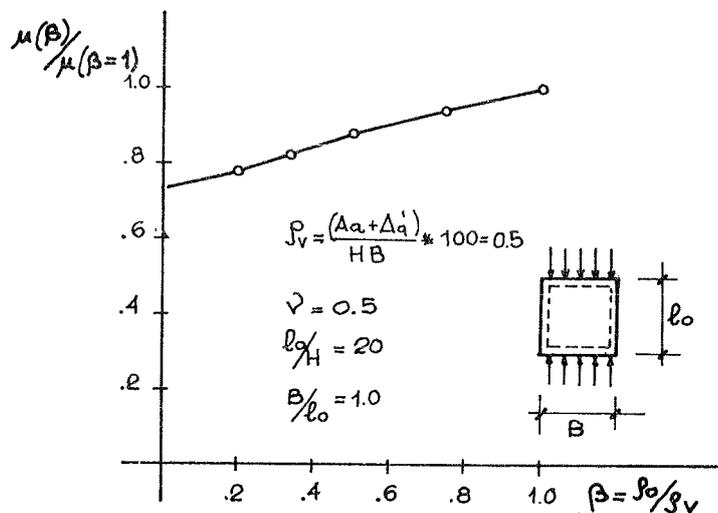


fig. 5

#### 4.5 INFLUENZA DELLA RIGIDEZZA TORSIONALE

Nella fig. 6 sono riportati i diagrammi "eccentricità della forza assiale - spostamento trasversale al centro" sempre con riferimento al caso della parete della fig. 3, vincolata su quattro lati, ipotizzando, nella utilizzazione del modello di calcolo a graticcio ortogonale:

- di tenere conto della rigidità torsionale;
- di non tenere conto della rigidità torsionale;

L'influenza della rigidità torsionale appare sensibile, specialmente sul valore delle deformazioni. Risulta quindi opportuno approfondire

l'indagine sui limiti di validità delle formule della rigidezza torsionale, date in (2) e relative ai tre casi di assenza di fessurazione, di presenza di pura fessurazione flessionale e di fessurazione mista, flessionale e torsionale.

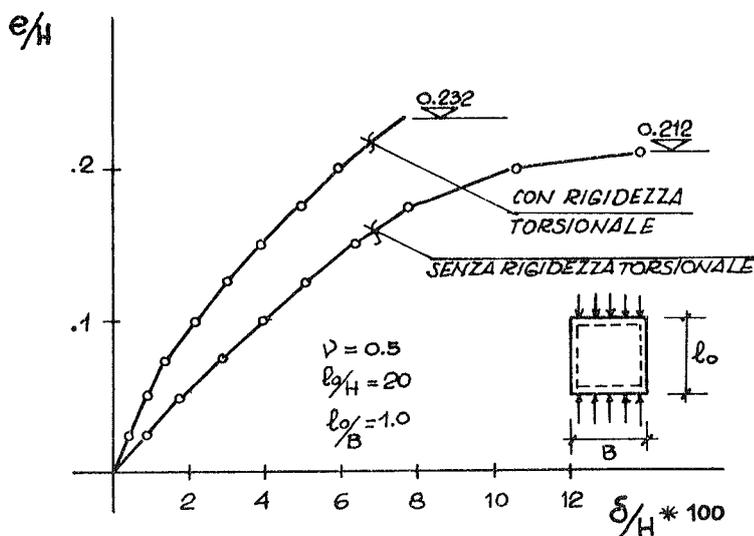


fig. 6

#### 4.6 EVOLUZIONE DELLA ANISOTROPIA DELLA PARETE SOTTILE IN FUNZIONE DELLA ECCENTRICITA' DELLA FORZA ASSIALE

Nella fig. 7 sono riportati i diagrammi "rapporto  $\alpha$  fra le rigidezze flessionali  $M/\chi$  delle strisce verticali ed orizzontali al centro della parete - eccentricità del I ordine della forza assiale", con riferimento alla parete della fig. 3, vincolata su quattro lati, per tre valori del rapporto  $\nu = 0.2; 0.5; 0.7$ .

Al crescere dei momenti flettenti del I ordine, nel caso in esame la fessurazione si attiva prima nelle strisce orizzontali, puramente in flesse, e poi in quelle verticali, presso-inflesse. Il coefficiente di anisotropia delle rigidezze flessionali  $\alpha$  aumenta nella fase in cui la fessurazione delle strisce orizzontali precede quella delle strisce verticali; una inversione di tendenza si manifesta quando diventa apprezzabile la fessurazione delle strisce verticali. Nella fase finale, caratterizzata dall'approssimarsi della crisi della parete, l'armatura orizzontale si plasticizza, determinando il rapido aumento del coefficiente  $\alpha$ . In definitiva il comportamento anisotropo della parete sottile dipende da due cause primarie, la anisotropia della caratteristica di sollecitazione normale, che è presente solo nelle strisce verticali, e la anisotropia delle armature, espressa, nel caso in esame, dal rapporto  $e_o/e_v = 0.5$

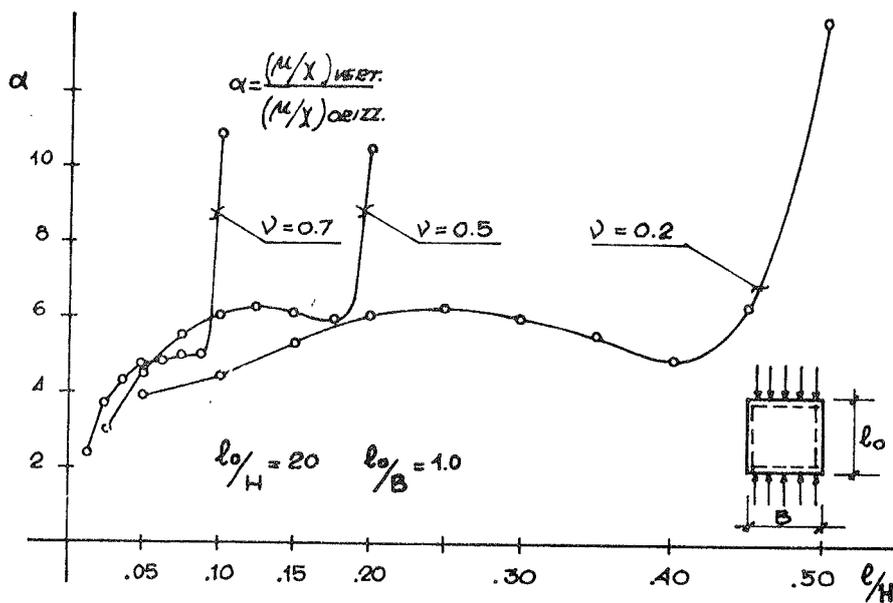


fig. 7

## 5. CONCLUSIONI

Il metodo di calcolo proposto, basato sulla tecnica degli elementi finiti, schematizza la parete sottile reale comunque vincolata con un graticcio di aste ortogonali rigidamente connesse nei nodi e consente di simularne il comportamento effettivo al passo fino alla crisi. Il programma di calcolo automatico, sviluppato nell'ambito del metodo suddetto, permette di mettere in luce l'influenza sulla portanza dei seguenti parametri:

- a) Snellezza;
- b) Condizione di vincolo ai bordi;
- c) Eccentricità iniziali, sia strutturali che accidentali;
- d) Percentuale di armatura nelle due direzioni;
- e) Entità della forza assiale

I primi risultati numerici, esposti nella presente nota, oltre a confermare, per confronto con risultati sperimentali, la attendibilità del procedimento, hanno consentito di mettere in evidenza sia i legami esistenti fra alcuni parametri significativi sia gli aspetti caratteristici delle modalità di redistribuzione degli sforzi interni fra le strisce ortogonali al progredire dei carichi, in funzione della fessurazione del conglomerato e dello snervamento delle armature.

In una nota successiva verranno comunicati i risultati di una sistematica sperimentazione numerica in corso.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Istruzioni per la progettazione e l'esecuzione delle opere in cemento armato e cemento armato precompresso col metodo semiprobabilistico agli stati limite.  
Consiglio Nazionale delle Ricerche 1980.
- (2) CEB-FIP Model Code for Concrete Structures - CEB-FIP International Recommendations 3rd Edition 1978.
- (3) CEB Bulletin d'Information n. 123 CEB Design Manual on Buckling December 1977.
- (4) AAS JAKOBSEN K., GRENAKER M. Analysis of slender reinforced concrete frames. AIPC Publications 34-I 1974.
- (5) MENEGOTTO M., PINTO P.E. Method of analysis for cyclically loaded R.C. frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending. Symposium AIPC-IABSE Lisbon, 1973.
- (6) MACCHI G. Méthode des rotations imposées. Exposé de la méthode et exemple de calcul. Recommendations internationales du CEB, Tome III, Structures Hyperstatiques. ATTEC, Rome 1972.
- (7) CAUVIN A. Analisi non lineare di telai piani in cemento armato. Giornale del Genio Civile n. 1.2.3 Gennaio, Febbraio, Marzo 1978
- (8) GRELOT A. Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé. Annales de IIBTB Novembre 1978
- (9) RADOGNA E.F., DI MARCO R. Sul comportamento dei pilastri snelli di cemento armato negli stati limite di resistenza e di instabilità in presenza di carichi di breve durata Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni. Pubbl. II 249, Giugno 1979, Univ. Roma
- (10) RADOGNA E.F., DI MARCO R. Approximate methods for analysing the buckling ultimate limit state of slender reinforced concrete columns. Critical considerations and numerical applications. Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni. Pubbl. II 252 Giugno 1979. Facoltà di Ingegneria di Roma.
- (11) DI MARCO R. Analisi non lineare di aste snelle in cemento armato: effetto della durata di applicazione dei carichi sul comportamento allo stato limite ultimo. Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni. Pubbl. II 312, Giugno 1980. Fac. di Ing. di Roma.
- (12) C.N.R. Istruzioni per il progetto, l'esecuzione e il controllo delle strutture prefabbricate in calcestruzzo armato. Documento sottoposto ad inchiesta pubblica. 1980.
- (13) JENNINGS A. Frame analysis including change of geometry. Journal of the Structural Division ASCE vol. 34, n. ST3, March 68.
- (14) MALLET R.H., MARCAL P.V. Finite element analysis of nonlinear structures. Journal of the Structural Division, ASCE vo. 34, No. ST9, November 1968.

- (15) BENEDETTI D., BREBBIA C., CEDOLIN L. Geometrical non-linear analysis of structures by finite elements. Meccanica n. 1 (vol. VII), 1972.
- (16) CEB Course "Non linear analysis and design of reinforced concrete and prestressed structures", Lez. 9, Pavia , Ottobre 1981.
- (17) MOOSECKER W, GRASSER E. Evaluation of tension stiffening effects in Reinforced Concrete Linear Members. IABSE Colloquium Final Report Delft, 1981.
- (18) CEB BULLETIN d'INFORMATION n. 143 . Manuel de Calcul Fissurations et déformations. Décembre 1981.
- (19) STORKEBAUM K.H. Buckling of slender reinforced concrete walls. Report for the meeting of CEB Commission VIII. Copenhagen 9/10 June, 1977.

DETERMINAZIONE DELLE MATRICI DI RIGIDEZZA E DI DEFORMABILITA'  
PER LE PIASTRE ORTOTROPE SFERICHE RIBASSATE A DUE BORDI  
E LORO IMPIEGO NELLA SOLUZIONE DELLE PIASTRE CHIUSE

Pietro TRENTADUE - Vincenzo DIPAOLA

Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - BARI

SOMMARIO

Sviluppando la soluzione flessionale per le piastre sferiche ortotrope ribassate ricavata in (X) si sono dedotte le espressioni delle matrici di rigidezza e di deformabilità per le piastre a due bordi. La conoscenza di tali matrici permette di calcolare agevolmente strutture costituite da più piastre collegate tra loro. In particolare si è risolto, effettuando anche delle applicazioni numeriche, il problema della piastra ortotropica ribassata chiusa da un calottino isotropo, essendo questa la condizione reale delle piastre ortotrope chiuse.

SUMMARY

In this work we have drawn stiffness and deformation matrices of a two edges orthotropic spherical shallow shell developing flexional solution obtained in (X). Such matrices allow to calculate easily many connected shells structures. The problem of orthotropic shallow shells closed by an isotropic small bowl is solved with numerical applications: this is the real condition of the orthotropic closed shells.

1. PREMESSE

La teoria delle piastre di rivoluzione ortotrope presenta un particolare interesse applicativo non solo in quanto serve a studiare il comportamento di strutture realizzate con materiale avente proprietà elastiche diverse nelle due direzioni principali, ma altresì perché può essere efficacemente impiegata per la risoluzione di diversi problemi pratici quale il calcolo di piastre dotate di nervature, caso frequente in strutture in c.ar.. Queste infatti, in base ad opportune considerazioni di analogia, possono essere studiate come piastre ortotrope a spessore uniforme.

Inoltre la teoria può essere impiegata per lo studio di cupole in c.ar. in cui in alcune zone si è raggiunta la fase di fessurazione. In questo caso un'analisi accurata può essere condotta considerando la cupola come composta da più zone, collegate in serie, ognuna con diverse caratteristiche di ortotropia.

Per le piastre di rivoluzione ortotrope non ribassate, con caratteristiche geometriche e meccaniche variabili con la colatitudine, uno degli A. ha ricavato una soluzione (VIII) ottenuta con un procedimento approssimato di tipo asintotico, dove l'introduzione di particolari funzioni e della notazione matriciale ha permesso di ottenere espressioni molto compatte e di semplice impiego nelle applicazioni pratiche.

Tale soluzione però per il tipo di approssimazione adottato, non risulta applicabile alle piastre ribassate. Lo stesso A. pertanto, recentemente ha esteso lo studio alle piastre ortotrope sferiche ribassate (X) ottenendo una soluzione le cui formule risolutive mantengono la stessa struttura di quelle relative alle piastre rialzate, bastando solo dare diversa espressione a particolari funzioni. Nell'analisi delle piastre ortotrope di rivoluzione chiuse nel vertice (compresa la piastra circolare piana) sorge un particolare problema. Nella realtà infatti tali piastre non possono avere rapporto di ortotropia  $\lambda$  (1) costante lungo il meridiano dovendo nel vertice, per ragioni di simmetria, risultare la piastra isotropa. Una piastra di rivoluzione chiusa dovrà quindi o avere rapporto di ortotropia variabile lungo il meridiano con  $\lambda=1$  nel vertice o essere composta da una o più zone ortotrope collegate in serie e chiusa nel vertice da un calottino isotropo.

Per le piastre non ribassate il problema di rappresentare esattamente le caratteristiche meccaniche nel vertice non si pone in quanto le sollecitazioni membranali non sono influenzate dall'ortotropia e quelle flessionali non si risentono nella zona centrale. Il problema sorge invece per le piastre ribassate per le quali le soluzioni generalmente adottate, derivanti da un modello matematico che consideri la piastra chiusa, ortotropa anche nel vertice, non possono fornire nella zona centrale risultati accettabili (XI), (XII).

La soluzione sviluppata in (X) essendo riferita a piastre a due bordi, come si mostrerà in questa nota, permette di calcolare strutture costituite da zone collegate in serie e chiuse nel vertice da un calottino isotropo, venendosi così ad eliminare l'incongruenza meccanica insita nei procedimenti a cui prima si è accennato.

Il calcolo di strutture costituite da più piastre di rivoluzione fra loro collegate è reso spedito dalla conoscenza delle matrici di rigidezza e di deformabilità (matrici elastiche). Per poter quindi risolvere agevolmente strutture complesse contenenti piastre sferiche ortotrope ribassate a due bordi, si sono dedotte per tali piastre le espressioni delle matrici di rigidezza e di deformabilità utilizzando la soluzione ricavata in (X). Come applicazione si è risolto il problema della piastra ribassata ortotropa chiusa nel vertice da un calottino isotropo, essendo questa, come si è detto innanzi, la condizione reale per le piastre ortotrope chiuse. A tal fine si sono ricavate le due matrici, adottando la soluzione (X), anche per il calottino isotropo. Successivamente, applicando un procedimento sviluppato diversi anni fa dallo stesso A. (VII) (2), si sono dedotte le matrici di rigidezza e di deformabilità per la struttura costituita da una zona ortotropa collegata in serie con un calottino isotropo. A questo punto, applicando la teoria delle piastre di rivoluzione, risulta possibile risolvere la piastra chiusa per qualsiasi condizione di carico e di vincolo.

- 1) Il rapporto di ortotropia  $\lambda$  è definito dalla (2.3) seguente.
- 2) Il procedimento può essere utilizzato, note le espressioni delle matrici di deformabilità, per risolvere piastre ribassate di rivoluzione di forma qualsiasi con caratteristiche di ortotropia variabili lungo il meridiano.

Per le piastre ribassate, dati i tipi di funzione che compaiono nella soluzione (X), gli elementi delle matrici elastiche devono essere calcolate numericamente. A tal fine è stato impostato un opportuno programma di calcolo che, definite le caratteristiche geometriche e meccaniche, permette di ricavare le matrici di rigidità e di deformabilità per la zona ortotropa e, quale caso particolare, quelle per il calottino isotropo. Un altro programma, utilizzando il precedente, permette poi di calcolare le matrici elastiche per la struttura costituita da una zona ortotropa chiusa da un calottino isotropo. Tali programmi sono stati strutturati in modo da poter essere introdotti in programmi più generali in grado di fornire la soluzione completa, per la piastra chiusa, nelle varie condizioni di carico e di vincolo. Un esempio è riportato nell'applicazione illustrata al punto 6.

## 2. SOLUZIONE FLESSIONALE

Si espone succintamente il procedimento ricavato in (X) per la determinazione del regime flessionale nelle piastre ortotrope sferiche ribassate. La piastra che si considera, a due bordi, è definita geometricamente dal raggio  $R$  del meridiano medio e dallo spessore  $s$  (fig. 2.1). Con  $r$  si indica il raggio del parallelo, con  $\theta$  la colatitude, l'indice  $i$  si riferisce al bordo inferiore e  $s$  al superiore.

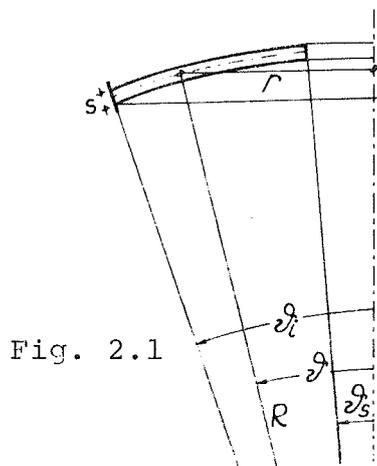


Fig. 2.1

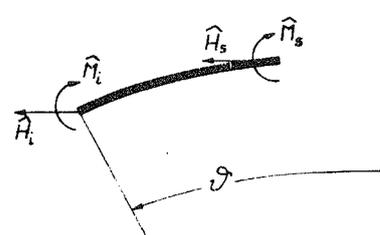


Fig. 2.2

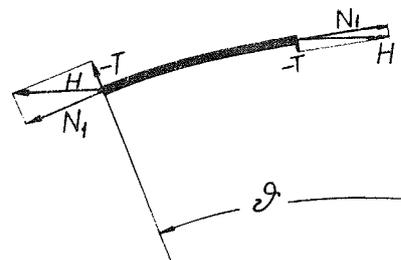


Fig. 2.4

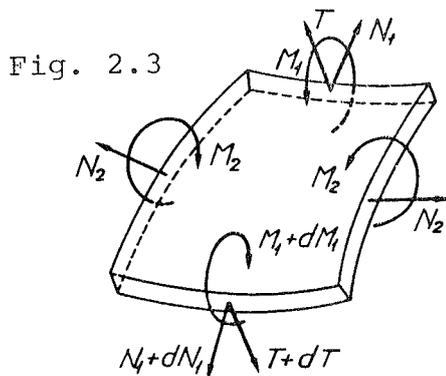


Fig. 2.3

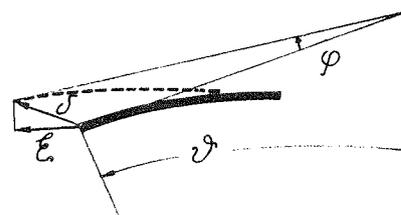


Fig. 2.5

Per la determinazione del regime flessionale la piastra si considera caricata solo nei bordi dalle forze, costanti ed uniformemente distribuite,  $\hat{H}_i$ ,  $\hat{M}_i$ ,  $\hat{H}_s$ ,  $\hat{M}_s$  positive come in fig. 2.2. Assunte quali linee coordinate i meridiani e i paralleli, sull'ele

mento di piastra agiscono le sollecitazioni indicate con i loro versi in fig. 2.3. I valori si intendono riferiti all'unità di lunghezza delle sezioni.

La risultante degli sforzi nelle sezioni parallele, orizzontale per la condizione di carico assunta, (fig. 2.4) vale:

$$H = -T/\text{sen}\theta.$$

Pertanto risulta:

$$\hat{H}_i = H_i ; \quad \hat{M}_i = M_{1i} ; \quad \hat{H}_s = -H_s ; \quad \hat{M}_s = -M_{1s} . \quad (2.1)$$

Le deformazioni sono definite dalle dilatazioni  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  valutate sul la superficie media e dalle variazioni  $\chi_1$  e  $\chi_2$  delle curvatures normali.

Si indica con  $\varphi$  la rotazione della tangente al meridiano e con  $\xi = \varepsilon_2 r$  la componente orizzontale dello spostamento  $\delta$ , positive come in fig. 2.5. La piastra si suppone composta di materiale omogeneo ortotropo, con le direzioni di ortotropia coincidenti con i meridiani ed i paralleli. Il materiale è definito dai moduli  $E_1, E_2, \nu_{12}$  e  $\nu_{21} = \nu_{12} E_2/E_1$ . I coefficienti di deformabilità estensionale  $d_1, d_2$  e  $d_v$  e quelli di rigidità flessionale  $B_1, B_2$  e  $B_v$  sono pertanto forniti dalle seguenti relazioni:

$$d_1 = 1/E_1 s ; \quad d_v = -\nu_{12} d_1 = -\nu_{21} d_2 ; \quad d_2 = 1/E_2 s$$

$$B_1 = \frac{E_1 s^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} ; \quad B_v = \nu_{12} B_2 = \nu_{21} B_1 ; \quad B_2 = \frac{E_2 s^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} . \quad (2.2)$$

Introdotta il rapporto di ortotropia:

$$\lambda^2 = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{B_2}{B_1} \quad (2.3)$$

i sei coefficienti di elasticità innanzi definiti dipendono, oltre che dallo spessore, da tre parametri meccanici; qui si assumono:  $E_1, \nu_{12}$  e  $\lambda$ .

I legami costitutivi tra sollecitazioni e deformazioni vengono quindi espressi dalle seguenti relazioni:

$$M_1 = -B_1 \chi_1 - B_v \chi_2 ; \quad \varepsilon_1 = d_1 N_1 + d_v N_2 ;$$

$$M_2 = -B_2 \chi_2 - B_v \chi_1 ; \quad \varepsilon_2 = d_2 N_2 + d_v N_1 . \quad (2.4)$$

Indicato con:

$$(\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\theta} ,$$

le equazioni fondamentali che risolvono il problema flessionale per le piastre sferiche ribassate, posto  $\cot \theta = 1/\theta$ , risultano:

$$\begin{cases} \varphi'' + \theta^{-1} \varphi' - \lambda^2 \theta^{-2} \varphi = TR^2/B_1 \\ T'' + \theta^{-1} T' - \lambda^2 \theta^{-2} T = -\varphi/d_2 . \end{cases} \quad (2.5)$$

Considerando  $\lambda = \text{costante}$ , posto:

$$\hat{\gamma} = \sqrt{2} \bar{\gamma} \sqrt{R/s}$$

con:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{3(1-\lambda^2 \nu_{12}^2)}}{\lambda^2} \quad (2.6)$$

e indicato con:

$$\bar{\theta} = \hat{\gamma} \theta$$

$$\frac{d(\dots)}{d\bar{\theta}} = (\dots)' = \hat{\gamma}^{-1} (\dots)'$$

$$L_{\bar{\theta}}(\dots) = (\dots)'' + \theta^{-1}(\dots)' - \lambda^2 \theta^{-2}(\dots)$$

$$L_{\bar{\theta}}^2(\dots) = L_{\bar{\theta}}[L_{\bar{\theta}}(\dots)],$$

il sistema (2.5) si riduce all'equazione differenziale del IV ordine a coefficienti costanti:

$$L_{\bar{\theta}}^2(T) + T = 0. \quad (2.7)$$

Indicate con  $f_i = f_i(\bar{\theta})$  ( $i = 1 \div 4$ ) quattro soluzioni indipendenti della (2.7) e con  $C_i$  ( $i = 1 \div 4$ ) le quattro costanti atte a soddisfare le condizioni al contorno, la soluzione generale della (2.7) risulta (3):

$$T = - (C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4).$$

Adottando la notazione matriciale (4) e posto:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{F}}_1 &= \left\{ f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \right\} & \underline{\tilde{F}}_3 &= \left\{ -f_2 \quad f_1 \quad -f_4 \quad f_3 \right\} \\ \underline{\tilde{F}}_2 &= \left\{ f_1' \quad f_2' \quad f_3' \quad f_4' \right\} & \underline{\tilde{F}}_4 &= \left\{ -f_2' \quad f_1' \quad -f_4' \quad f_3' \right\} \\ \underline{\tilde{C}} &= \left\{ C_1 \quad C_2 \quad C_2 \quad C_4 \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

la soluzione flessionale completa è fornita dalle espressioni (4.4) di (X). In questa sede interessano le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} H &= \bar{H} \underline{\tilde{F}}_1 \underline{C} & \xi &= \bar{\xi} (\underline{\tilde{F}}_2 - h \underline{\tilde{F}}_1) \underline{C} \\ M_1 &= \bar{M} (\underline{\tilde{F}}_4 + h \underline{\tilde{F}}_3) \underline{C} & \varphi &= \bar{\varphi} \underline{\tilde{F}}_3 \underline{C} \end{aligned} \quad (2.9)$$

essendo:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= 1/\text{sen}\theta & \bar{\xi} &= \hat{\gamma} R \text{sen}\theta / \lambda^2 E_1 s \\ \bar{M} &= R/\hat{\gamma} & \bar{\varphi} &= \hat{\gamma}^2 / \lambda^2 E_1 s \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$h = \lambda^2 \nu_{12} / \hat{\gamma} \theta.$$

Per quanto riguarda le espressioni delle funzioni  $f_i$  da introdurre nelle (2.8), si osserva che la soluzione dell'equazione (2.7) è data dall'espressione:

$$T = - (C_1 \text{ber}_{\lambda} \bar{\theta} + C_2 \text{bei}_{\lambda} \bar{\theta} + C_3 \text{ker}_{\lambda} \bar{\theta} + C_4 \text{kei}_{\lambda} \bar{\theta}) \quad (2.11)$$

dove  $\text{ber}_{\lambda}$ ,  $\text{bei}_{\lambda}$  sono le funzioni di Kelvin di I specie e  $\text{ker}_{\lambda}$ ,  $\text{kei}_{\lambda}$  di II specie di ordine  $\lambda$ . Le espressioni per ricavare tali funzioni e le loro derivate sono riportate nei testi specializzati (XIII), (XIV), (5). Mentre è abbastanza semplice calcolarle per  $\lambda$  intero, delle difficoltà sorgono nella determinazione di  $\text{ker}_{\lambda}$  e  $\text{kei}_{\lambda}$  allorchè  $\lambda$  non è intero. Per questo motivo, mentre si è adottata la soluzione (2.11) per  $\lambda$  intero, per  $\lambda$  non intero si è ricercata una soluzione diversa ottenuta impiegando funzioni del tipo:

$$g_i(\bar{\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j} \bar{\theta}^{(4j + s_i)} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2.12)$$

- 3) Il segno meno è stato introdotto per semplificare le successive formule.
- 4) Le matrici e i vettori si indicano con lettere sottolineate. Come segno di trasposizione si usa la tilde.
- 5) Per le applicazioni in questa sede si è fatto riferimento alle formule (289), (290), (291), (338), (339), (340) e (341) di (XIV).

Introdotte le (2.12) nella (2.7), l'equazione risulta soddisfatta ponendo:

$$A_{i,j} = - \frac{A_{i,j-1}}{[(4j+s_i-2)^2-\lambda^2][(4j+s_i)^2-\lambda^2]} \quad (j=1 \div \infty \text{ e } i=1 \div 4) \quad (2.13)$$

con:

$$s_1 = \lambda; \quad s_2 = 2 + \lambda; \quad s_3 = -\lambda; \quad s_4 = 2 - \lambda, \quad (2.14)$$

dove, nella formula ricorrente (2.13), le costanti  $A_{i,0}$  possono assumere qualsiasi valore reale.

Per le funzioni di Kelvin valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L_{\bar{\theta}}(\text{ber}_{\lambda} \bar{\theta}) &= -\text{bei}_{\lambda} \bar{\theta} & ; & & L_{\bar{\theta}}(\text{bei}_{\lambda} \bar{\theta}) &= \text{ber}_{\lambda} \bar{\theta} & ; \\ L_{\bar{\theta}}(\text{ker}_{\lambda} \bar{\theta}) &= -\text{kei}_{\lambda} \bar{\theta} & ; & & L_{\bar{\theta}}(\text{kei}_{\lambda} \bar{\theta}) &= \text{ker}_{\lambda} \bar{\theta} & ; \end{aligned}$$

per cui, posto nelle (2.8):

$$\tilde{\underline{F}}_1 = \left\{ f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \right\} = \left\{ \text{ber}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{bei}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{ker}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{kei}_{\lambda} \bar{\theta} \right\}$$

si ha:

$$L_{\bar{\theta}}(\tilde{\underline{F}}_1) = \tilde{\underline{F}}_3 \quad (2.15)$$

Per  $\lambda$  non intero, posto:

$$\tilde{\underline{F}}_1 = \left\{ f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \right\} = \left\{ g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \right\}$$

per risultare valida la (2.15), impiegata per la determinazione delle (2.9), si devono porre nella (2.13):

$$A_{1,0} = 1; \quad A_{2,0} = \frac{1}{4(1+\lambda)}; \quad A_{3,0} = 1; \quad A_{4,0} = \frac{1}{4(1-\lambda)} \quad (2.16)$$

Le funzioni  $g_i$  vengono pertanto definite dalle (2.12), (2.13) e (2.16) e risultano di semplice determinazione. Inoltre dalle (2.12) si ricava:

$$g_i = \sum_{j=0}^{\infty} (4j+s_i) A_{i,j} \bar{\theta}^{(4j+s_i-1)} \quad (i=1,2,3,4). \quad (2.17)$$

Per la soluzione del problema si assumerà nelle espressioni (2.9):

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{F}}_1 &= \left\{ \text{ber}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{bei}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{ker}_{\lambda} \bar{\theta} \quad \text{kei}_{\lambda} \bar{\theta} \right\} \quad \text{per } \lambda \text{ intero,} \\ \tilde{\underline{F}}_1 &= \left\{ g_1(\bar{\theta}) \quad g_2(\bar{\theta}) \quad g_3(\bar{\theta}) \quad g_4(\bar{\theta}) \right\} \quad \text{per } \lambda \text{ non intero,} \end{aligned}$$

mentre risulta ovvio, per le (2.8), il significato degli altri vettori  $\underline{F}_i$ .

### 3. LE MATRICI DI RIGIDEZZA E DI DEFORMABILITA' PER PIASTRE A DUE BORDI.

Si consideri la zona di piastra di rivoluzione ribassata, di cui in fig. 3.1 è indicata una sezione meridiana, soggetta al sistema di forze, costanti e uniformemente ripartite lungo i bordi, rappresentato nella stessa figura a cui corrispondono gli spostamenti di fig. 3.2.

Introdotti i vettori:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{F}} &= \left\{ \hat{H}_i \quad \hat{M}_i \quad \hat{H}_s \quad \hat{M}_s \right\} && \text{vettore delle forze;} \\ \tilde{\underline{\delta}} &= \left\{ \xi_i \quad \varphi_i \quad \xi_s \quad \varphi_s \right\} && \text{vettore degli spostamenti;} \end{aligned}$$

le relazioni che tra questi vettori intercorrono, lineari per l'elasticità della struttura, sono esprimibili nella forma:

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{\delta} \quad ; \quad \underline{\delta} = \underline{\Theta} \underline{F} \quad , \quad (3.1)$$

dove  $\underline{K}$  e  $\underline{\Theta}$  sono le matrici (4x4) di rigidezza e di deformabilità.

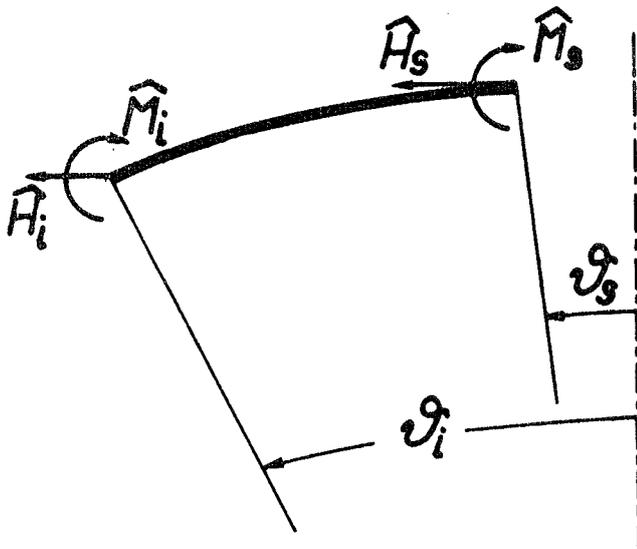


Fig. 3.1

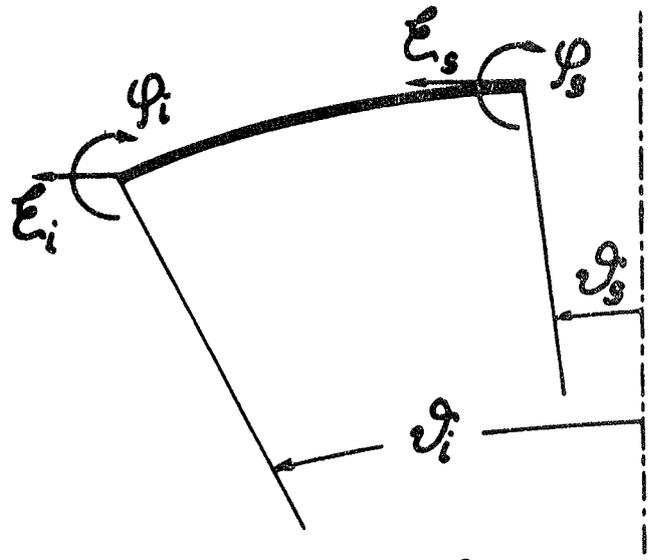


Fig. 3.2

Esplicitando i termini dei vettori  $\underline{F}$  e  $\underline{\delta}$  in base alle (2.8) e (2.9), si ha:

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= \bar{H}_i \left[ f_{1i} C_1 + f_{2i} C_2 + f_{3i} C_3 + f_{4i} C_4 \right] \\ \hat{M}_i &= \bar{M}_i \left[ -(f_{2i}^* + h_i f_{2i}) C_1 + (f_{1i}^* + h_i f_{1i}) C_2 - (f_{4i}^* + h_i f_{4i}) C_3 + (f_{3i}^* + h_i f_{3i}) C_4 \right] \\ \hat{H}_s &= -\bar{H}_s \left[ f_{1s} C_1 + f_{2s} C_2 + f_{3s} C_3 + f_{4s} C_4 \right] \\ \hat{M}_s &= -\bar{M}_s \left[ -(f_{2s}^* + h_s f_{2s}) C_1 + (f_{1s}^* + h_s f_{1s}) C_2 - (f_{4s}^* + h_s f_{4s}) C_3 + (f_{3s}^* + h_s f_{3s}) C_4 \right] \\ \xi_i &= \bar{\xi}_i \left[ (f_{1i}^* - h_i f_{1i}) C_1 + (f_{2i}^* - h_i f_{2i}) C_2 + (f_{3i}^* - h_i f_{3i}) C_3 + (f_{4i}^* - h_i f_{4i}) C_4 \right] \\ \varphi_i &= \bar{\varphi}_i \left[ -f_{2i} C_1 + f_{1i} C_2 - f_{4i} C_3 + f_{3i} C_4 \right] \\ \xi_s &= \bar{\xi}_s \left[ (f_{1s}^* - h_s f_{1s}) C_1 + (f_{2s}^* - h_s f_{2s}) C_2 + (f_{3s}^* - h_s f_{3s}) C_3 + (f_{4s}^* - h_s f_{4s}) C_4 \right] \\ \varphi_s &= \bar{\varphi}_s \left[ -f_{2s} C_1 + f_{1s} C_2 - f_{4s} C_3 + f_{3s} C_4 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Per cui, introdotte le matrici (6):

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \begin{bmatrix} \bar{H}_i & \bar{M}_i & -\bar{H}_s & -\bar{M}_s \end{bmatrix} \\ \underline{\eta} &= \begin{bmatrix} \bar{\xi}_i & \bar{\varphi}_i & \bar{\xi}_s & \bar{\varphi}_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\underline{G}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ -f_2^* - hf_2 & f_1^* + hf_1 & -f_4^* - hf_4 & f_3^* + hf_3 \end{bmatrix}_i \\ \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ -f_2^* - hf_2 & f_1^* + hf_1 & -f_4^* - hf_4 & f_3^* + hf_3 \end{bmatrix}_s \end{bmatrix} \quad (3.4')$$

6) Col simbolo  $\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$  si indicano le matrici diagonali.

$$\underline{G}_2 = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc} f_1^* & -hf_1 & f_2^* & -hf_2 \\ & -f_2 & f_1 & \\ f_3^* & -hf_3 & f_4^* & -hf_4 \\ & & & -f_4 \\ & & & f_3 \end{array} \right]_i \\ \left[ \begin{array}{cccc} f_1^* & -hf_1 & f_2^* & -hf_2 \\ & -f_2 & f_1 & \\ f_3^* & -hf_3 & f_4^* & -hf_4 \\ & & & -f_4 \\ & & & f_3 \end{array} \right]_s \end{bmatrix} \quad (3.4'')$$

risulta:

$$\underline{F} = \underline{f} \underline{G}_1 \underline{C} \quad ; \quad \underline{\delta} = \underline{\eta} \underline{G}_2 \underline{C} \quad . \quad (3.5)$$

Eliminando  $\underline{C}$  dalle (3.5) si ottiene:

$$\underline{F} = \underline{f} \underline{G}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{\eta}^{-1} \underline{\delta} \quad ; \quad \underline{\delta} = \underline{\eta} \underline{G}_2 \underline{G}_1^{-1} \underline{f}^{-1} \underline{F}$$

e quindi, tenendo presente le (3.1), le espressioni delle due matrici cercate risultano:

$$\underline{K} = \underline{f} \underline{G}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{\eta}^{-1} \quad ; \quad \underline{\Theta} = \underline{\eta} \underline{G}_2 \underline{G}_1^{-1} \underline{f}^{-1} \quad (3.6)$$

Mentre per le piastre non ribassate è possibile fornire in forma esplicita le espressioni dei singoli elementi delle matrici di rigidezza e di deformabilità (IX), per le piastre in esame, dati i tipi di funzione che compaiono nelle matrici  $\underline{G}_1$  e  $\underline{G}_2$ , gli elementi delle matrici (3.6) devono essere ricavati con procedimento numerico. A tal fine è stato impostato un opportuno programma di calcolo che permette, fissate le caratteristiche geometriche e meccaniche della piastra, di ricavare gli elementi delle matrici  $\underline{K}$  e  $\underline{\Theta}$ , assumendo nelle  $\underline{G}_1$  e  $\underline{G}_2$ , secondo che  $\lambda$  sia intero o non, o le funzioni di Kelvin o le funzioni  $g_i$  dedotte in (X).

#### 4. CALOTTINO ISOTROPO

Per una piastra ribassata chiusa nel vertice, la soluzione ricavata in (X), considerando  $\lambda = \text{cost}$ , è applicabile solo per la piastra isotropa. La soluzione flessionale è ancora fornita dalle (4.4) di (X) dove le  $f_i$  da introdurre nelle (4.1) sono le funzioni di Kelvin di ordine 1. Per ragioni di simmetria nel vertice devono risultare nulli la rotazione  $\varphi$  ed il taglio  $T$  ciò che comporta l'annullarsi delle costanti  $C_3$  e  $C_4$  moltiplicative delle funzioni  $\ker_1 \bar{\theta}$  e  $\text{kei}_1 \bar{\theta}$  che tendono ad  $\infty$  per  $\bar{\theta} \rightarrow 0$ . Le formule così ottenute risultano diverse dalle altre soluzioni ben note ricavate specificatamente per la piastra sferica isotropa ribassata (IV), (V), inserendosi quale caso particolare nella trattazione generale delle piastre di rivoluzione ortotrope.

Applicando nel bordo  $i$  di una piastra isotropa chiusa le forze  $\hat{H}_i$  e  $\hat{M}_i$  si producono gli spostamenti  $\xi_i$  e  $\varphi_i$  come rappresentato nelle figg. 4.1 e 4.2.

Introdotti i vettori:

$$\underline{\tilde{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{H}_i \\ \hat{M}_i \end{array} \right\} \quad ; \quad \underline{\tilde{\delta}} = \left\{ \begin{array}{c} \xi_i \\ \varphi_i \end{array} \right\}$$

risulta:

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{\delta} \quad ; \quad \underline{\delta} = \underline{\Theta} \underline{F}$$

dove  $\underline{K}$  e  $\underline{\Theta}$  sono le matrici (2 x 2) di rigidezza e di deformabilità della piastra considerata.

Esplicitando i termini dei vettori  $\underline{F}$  e  $\underline{\delta}$  si ha:

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= \bar{H}_i \left[ (\text{ber}_1 \bar{\theta}_i) C_1 + (\text{bei}_1 \bar{\theta}_i) C_2 \right] \\ \hat{M}_i &= \bar{M}_i \left[ -(\text{bei}_1^* \bar{\theta}_i + h_i \text{bei}_1 \bar{\theta}_i) C_1 + (\text{ber}_1^* \bar{\theta}_i + h_i \text{ber}_1 \bar{\theta}_i) C_2 \right] \\ \xi_i &= \bar{\xi}_i \left[ (\text{ber}_1^* \bar{\theta}_i - h_i \text{ber}_1 \bar{\theta}_i) C_1 + (\text{bei}_1^* \bar{\theta}_i - h_i \text{bei}_1 \bar{\theta}_i) C_2 \right] \\ \varphi_i &= \bar{\varphi}_i \left[ -(\text{bei}_1 \bar{\theta}_i) C_1 + (\text{ber}_1 \bar{\theta}_i) C_2 \right] \end{aligned}$$

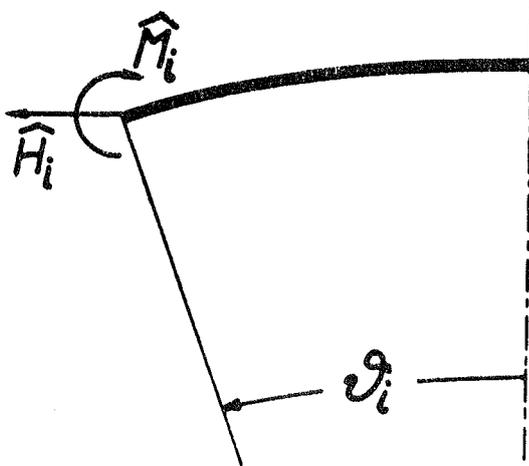


Fig. 4.1

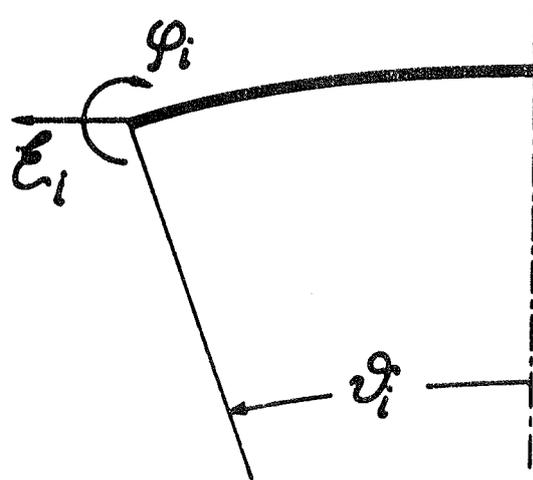


Fig. 4.2

Pertanto posto:

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \begin{bmatrix} \bar{H}_i & \bar{M}_i \end{bmatrix} \\ \underline{\eta} &= \begin{bmatrix} \bar{\xi}_i & \bar{\varphi}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\underline{G}_1 = \begin{bmatrix} \text{ber}_1 \bar{\theta}_i & \text{bei}_1 \bar{\theta}_i \\ -\text{bei}_1^* \bar{\theta}_i - h_i \text{bei}_1 \bar{\theta}_i & \text{ber}_1^* \bar{\theta}_i + h_i \text{ber}_1 \bar{\theta}_i \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_2 = \begin{bmatrix} \text{ber}_1^* \bar{\theta}_i - h_i \text{ber}_1 \bar{\theta}_i & \text{bei}_1^* \bar{\theta}_i - h_i \text{bei}_1 \bar{\theta}_i \\ -\text{bei}_1 \bar{\theta}_i & \text{ber}_1 \bar{\theta}_i \end{bmatrix}$$

le espressioni delle matrici  $\underline{K}$  e  $\underline{\theta}$  risultano ancora quelle indicate nelle (3.6). Per tale motivo anche il calottino isotropo può essere analizzato col programma di calcolo, opportunamente adattato, imposto per le matrici elastiche delle piastre a due bordi.

## 5. PIASTRA ORTOTROPA CHIUSA CON CALOTTINO ISOTROPO

Si consideri la struttura  $S$  rappresentata in fig. 5.1, costituita dalla piastra ortotropa  $I$  collegata nel bordo  $j$  al calottino isotropo  $J$ , di cui sono note le matrici di deformabilità  $\underline{\theta}_I$  e  $\underline{\theta}_J$ . Applicate al bordo  $i$  della piastra  $S$  le forze  $\hat{H}_i = 1$ , nel parallelo  $j$  sorgono le sollecitazioni  $H_j^H$  e  $M_j^H$  (fig. 5.2a), e nel bordo  $i$  e nel parallelo  $j$  gli spostamenti indicati in fig. 5.2b. Analogamente applicati nel bordo  $i$  della piastra  $S$  i momenti  $\hat{M}_i = 1$  sorgono nel parallelo  $j$  le sollecitazioni  $H_j^M$  e  $M_j^M$  (fig. 5.2c) e gli spostamenti indicati in fig. 5.2d.

Il vettore:

$$\tilde{\underline{R}} = \left\{ H_j^H \quad M_j^H \quad H_j^M \quad M_j^M \right\}$$

si ricava risolvendo i due sistemi seguenti che forniscono, nelle due

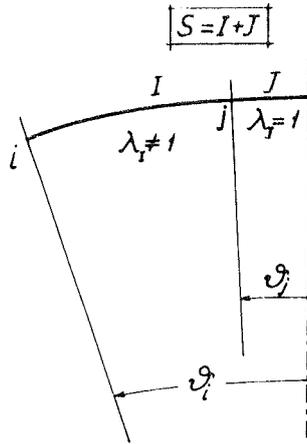


Fig. 5.1

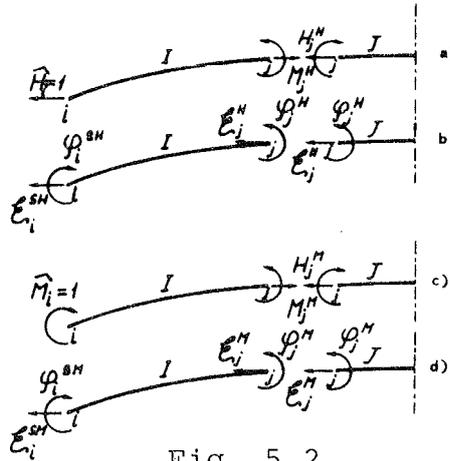


Fig. 5.2

condizioni di carico considerate, la congruenza nel bordo j facilmente esprimibile impiegando i termini delle matrici di deformabilità delle due piastre I e J:

$$\begin{cases} \xi_j^H = \Theta_{31}^I - \Theta_{33}^I H_j^H - \Theta_{34}^I M_j^H = \Theta_{11}^J H_j^H + \Theta_{12}^J M_j^H \\ \varphi_j^H = \Theta_{41}^I - \Theta_{43}^I H_j^H - \Theta_{44}^I M_j^H = \Theta_{21}^J H_j^H + \Theta_{22}^J M_j^H \\ \xi_j^M = \Theta_{32}^I - \Theta_{33}^I H_j^M - \Theta_{34}^I M_j^M = \Theta_{11}^J H_j^M + \Theta_{12}^J M_j^M \\ \varphi_j^M = \Theta_{42}^I - \Theta_{43}^I H_j^M - \Theta_{44}^I M_j^M = \Theta_{21}^J H_j^M + \Theta_{22}^J M_j^M \end{cases} \quad (5.1)$$

Nota il vettore  $\underline{R}$  si ricavano gli spostamenti nel bordo i della piastra S che, per definizione, corrispondono agli elementi della matrice di deformabilità  $\underline{\Theta}_s$ . Questi sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \Theta_{11}^S &= \xi_i^{SH} = \Theta_{11}^I - \Theta_{13}^I H_j^H - \Theta_{14}^I M_j^H \\ \Theta_{21}^S &= \varphi_i^{SH} = \Theta_{21}^I - \Theta_{23}^I H_j^H - \Theta_{24}^I M_j^H = \Theta_{12}^S \\ \Theta_{12}^S &= \xi_i^{SM} = \Theta_{12}^I - \Theta_{13}^I H_j^M - \Theta_{14}^I M_j^M = \Theta_{21}^S \\ \Theta_{22}^S &= \varphi_i^{SM} = \Theta_{22}^I - \Theta_{23}^I H_j^M - \Theta_{24}^I M_j^M \end{aligned} \quad (5.2)$$

La matrice  $\underline{K}_s$  si può ottenere per inversione della precedente matrice avendosi:

$$\underline{K}_s = \underline{\Theta}_s^{-1} \quad (5.3)$$

## 6. APPLICAZIONI PRATICHE

Si applica il procedimento innanzi esposto per la determinazione del regime flessionale nella struttura illustrata in fig. 6.1 costituita da una zona sferica ortotropa chiusa nel vertice da un calottino isotropo, incastrata nel bordo inferiore e soggetta ad un carico verticale  $p$  uniforme sulla proiezione orizzontale.

Per indagare sull'influenza che il ribassamento e l'ortotropia hanno sulla soluzione, si sono esaminate tre piastre che corrispondono a quelle già analizzate in (X) senza il calottino di completamento.

Le piastre hanno le seguenti caratteristiche geometriche:  $r_i = 2000$  cm,  $r_s = 500$  cm,  $R/s = 250$  e la colatitudine del bordo inferiore  $\underline{pa}$

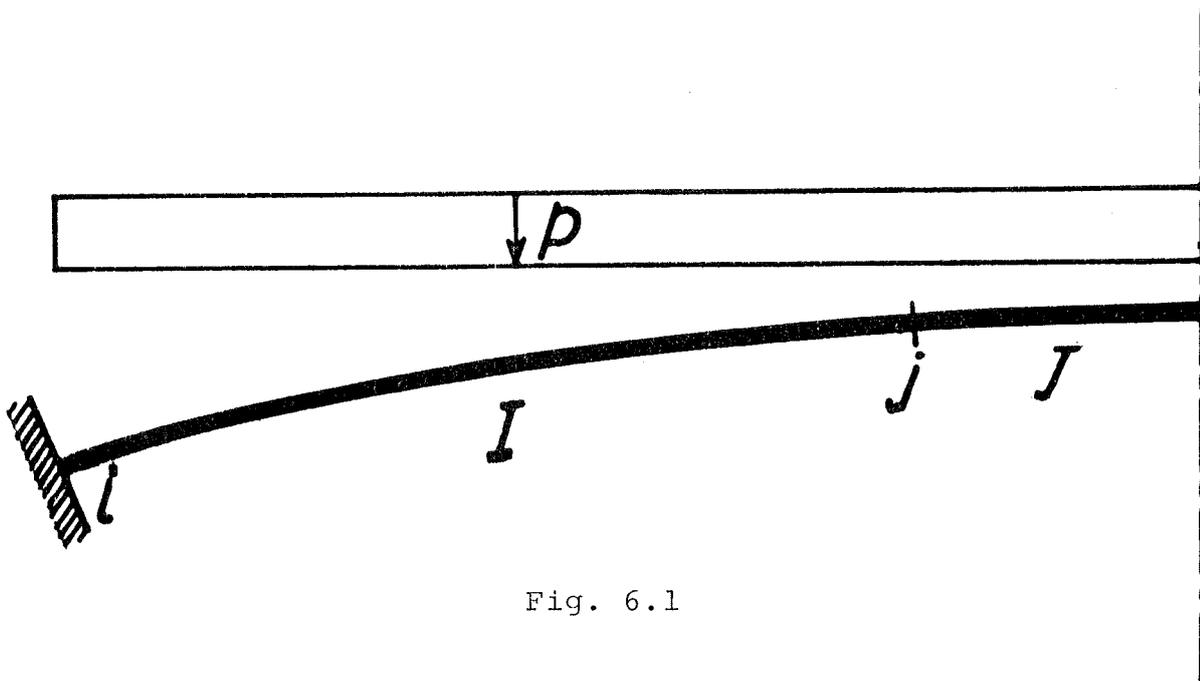


Fig. 6.1

ri a  $20^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $5^\circ$ . Posto  $E_1 = 3,6 \cdot 10^6$  N/cm<sup>2</sup> e  $\nu_{12} = 0,1$ , per ogni piastra si sono calcolate le sollecitazioni flessionali prodotte da  $p = 0,1$  N/cm<sup>2</sup> facendo assumere a  $\lambda_I$  i seguenti valori:  $0,5$ ;  $\sqrt{0,5} = 0,707$ ;  $1,0$ ;  $1,5$ ;  $2,0$  essendo  $\lambda_J = 1$ . Nelle figg. 6.2, 6.3, 6.4 sono riportati i diagrammi di  $M_1$  e  $T$  per le piastre analizzate (7). Per un più facile esame della soluzione si riportano alcuni risultati numerici per la piastra avente  $\theta_i = 10^\circ$  e  $\lambda_I = \sqrt{0,5} = 0,707$ . Per tale piastra risultano:  $R = 11518$  cm,  $s = 46,072$  cm,  $\theta_j = 2^\circ,488$ . Applicando le (2.6) si ha (8):

$$\bar{\gamma}_I = 1,10521; \quad \hat{\gamma}_I = 24,71331; \quad \bar{\gamma}_J = 1,31277; \quad \hat{\gamma}_J = 29,35446.$$

Dalle (2.10) si ricavano gli elementi delle matrici diagonali  $\underline{f}$  e  $\underline{n}$  (3.3) che risultano:

$$\underline{f}_I = \begin{bmatrix} 5.75877 & 466.06460 & -23.03609 & -466.06460 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_I = \begin{bmatrix} 5.96211E-04 & 7.36688E-06 & 1.49046E-04 & 7.36688E-06 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}_J = \begin{bmatrix} 23.03609 & 392.37647 \end{bmatrix}; \quad \underline{n}_J = \begin{bmatrix} 8.84918E-05 & 5.19528E-06 \end{bmatrix}.$$

I dati necessari per costruire le matrici  $\underline{G}_1$  e  $\underline{G}_2$  sono riportati nelle due successive tabelle.

Tramite le (3.6) si ricavano quindi:

$$\underline{\theta}_I = \begin{bmatrix} 1,51178E-04 & 1,54591E-06 & -4,34506E-06 & 1,16624E-07 \\ 1,54591E-06 & 2,67826E-08 & -5,45201E-08 & 2,19513E-10 \\ -1,74641E-05 & -2,19132E-07 & 1,12281E-05 & -1,89918E-07 \\ 4,68746E-07 & 8,82289E-10 & -1,89918E-07 & 1,35307E-08 \end{bmatrix}$$

- 7) Si rimanda al punto 6 di (X) ed ai trattati generali citati nella bibliografia per lo studio completo delle piastre di rivoluzione.  
 8) Nei calcoli si sono sempre adottate le unità di misura N e cm per cui le dimensioni dei vari termini delle matrici e delle altre grandezze qui considerate discendono di conseguenza.

$$\underline{\Theta}_j = \begin{bmatrix} 3,22942E-06 & 8,07200E-08 \\ 8,07200E-08 & 1,49729E-08 \end{bmatrix}$$

Risolviendo i due sistemi di equazioni (5.1) si ottiene:

$$\tilde{\underline{R}}_j = \begin{Bmatrix} H_j^H & M_j^H & H_j^M & M_j^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,11604 & 12,16957 & -0,01537 & -0,02792 \end{Bmatrix}$$

e quindi per le (5.2) e (5.3):

$$\underline{\Theta}_s = \begin{bmatrix} 1,44909E-04 & 1,48239E-06 \\ 1,48239E-06 & 2,59509E-08 \end{bmatrix} \quad \underline{K}_s = \begin{bmatrix} 1,66029E+04 & -9,48406E+05 \\ -9,48406E+05 & 9,27101E+07 \end{bmatrix}$$

Le sollecitazioni flessionali nel bordo i nelle condizioni di incastro perfetto sono date dalle note relazioni:

$$H_i^o = -K_{11}^s \xi_i^m - K_{12}^s \varphi_i^m ; \quad M_i^o = -K_{21}^s \xi_i^m - K_{22}^s \varphi_i^m$$

dove le deformazioni membranali si ricavano esplicitando, per il caso in esame, le (6.2) di (X) che risultano:

$$\xi_i^m = \frac{R^2 p \operatorname{sen} \theta}{\lambda^2 E_1 s} \left[ \frac{1 + \lambda^2 \nu_{12}}{2} - \cos^2 \theta \right]$$

$$\varphi_i^m = \frac{R p}{\lambda^2 E_1 s} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\lambda^2 - 1) \cot \theta + 2 (1 + \lambda^2 \nu_{12}) \cot \theta \right] - \cos^2 \theta \left[ (1 + \lambda^2 \nu_{12}) \cot \theta - 2 \operatorname{tg} \theta \right] \right\}$$

Pertanto, per la piastra considerata, nel bordo risulta:

$$\xi_i^m = -0,01236 \text{ cm} ; \quad \varphi_i^m = -1,24575E-05 \text{ rad}$$

e quindi:

$$H_i^o = 193,42 \text{ N/cm} ; \quad M_i^o = -10568,58 \text{ Ncm/cm.}$$

Per lo studio completo del regime flessionale nell'interno della struttura è necessario determinare per le due piastre, mediante le condizioni ai bordi, i vettori  $\underline{C}_I$  e  $\underline{C}_J$  da introdurre nelle (4.4) di (X) ed in particolare nelle espressioni di T e di  $M_1$ . A tal fine risulta utile la conoscenza del vettore  $\underline{R}$  già determinato in quanto permette di ricavare le sollecitazioni nel parallelo j tramite le seguenti relazioni:

$$H_j^s = H_j^H H_i^o + H_j^M M_i^o = -53,44 \text{ N/cm}$$

$$M_j^s = M_j^H H_i^o + M_j^M M_i^o = 2648,90 \text{ Ncm/cm.}$$

Ora si hanno tutti i dati necessari per scrivere i due sistemi di equazioni che risolti forniscono i due vettori richiesti che risultano:

$$\tilde{\underline{C}}_I = \{-1,72408 \quad 4,88974 \quad -0,39050 \quad -1,13806\}$$

$$\tilde{\underline{C}}_J = \{-2,81613 \quad -10,84225\}$$

Ed allora per la piastra I, essendo:

$$T = - \left[ C_1^I g_1(\bar{\theta}) + C_2^I g_2(\bar{\theta}) + C_3^I g_3(\bar{\theta}) + C_4^I g_4(\bar{\theta}) \right]$$

$$M_1 = \frac{R}{\gamma_1} \left\{ \begin{array}{l} - \left[ g_2^I(\bar{\theta}) + h(\bar{\theta}) g_2(\bar{\theta}) \right] C_1^I + \left[ g_1^I(\bar{\theta}) + h(\bar{\theta}) g_1(\bar{\theta}) \right] C_2^I - \\ - \left[ g_4^I(\bar{\theta}) + h(\bar{\theta}) g_4(\bar{\theta}) \right] C_3^I + \left[ g_3^I(\bar{\theta}) + h(\bar{\theta}) g_3(\bar{\theta}) \right] C_4^I \end{array} \right\}$$

si ha:

$\vartheta^\circ$	$\bar{\vartheta}$	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	$\bar{g}_3$	$\bar{g}_4$	$h$	$T$	$M_1$
		$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	$\bar{g}_3$	$\bar{g}_4$			
10°	4.31329	-3.10150	5.01041	-7.45334	-0.70292	0.01159	-33.58	-10568.58
		-5.38431	0.79898	-3.91215	-5.62780			
8°	3.45063	0.18558	3.58006	-3.98480	2.18982	0.01448	-16.23	-1973.77
		-2.40468	2.11783	-3.74781	-1.47147			
6°	2.58797	1.37242	1.83227	-1.32035	2.46235	0.01831	-4.31	1717.65
		-0.61896	1.77971	-2.37957	0.53358			
4°	1.72531	1.38282	0.63518	0.18603	1.67354	0.02897	1.26	2579.79
		0.36335	0.98298	-1.21451	1.13002			
2.488	1.07314	1.04175	0.17705	0.84733	0.93048	0.04658	2.32	2648.90
		0.65120	0.44570	-0.94545	1.10483			

Per la piastra J, essendo:

$$T = - \left[ C_1^J \text{ber}_1 \bar{\theta} + C_2^J \text{bei}_1 \bar{\theta} \right]$$

$$M_1 = \frac{R}{\bar{\gamma}_J} \left\{ - \left[ \text{bei}_1 \bar{\theta} + h(\bar{\theta}) \text{bei}_1 \bar{\theta} \right] C_1^J + \left[ \text{ber}_1 \bar{\theta} + h(\bar{\theta}) \text{ber}_1 \bar{\theta} \right] C_2^J \right\}$$

si ha:

$\vartheta^\circ$	$\bar{\vartheta}$	$\text{bar}_1$	$\text{bei}_1$	$h$	$T$	$M_1$
		$\text{bar}_1$	$\text{bei}_1$			
2.488	1.27468	-0.53580	0.35315	0.07845	2.32	2648.90
		-0.54355	0.11601			
2°	1.02456	-0.40769	0.31269	0.09759	2.24	2480.80
		-0.48230	0.80452			
1°	0.51233	-0.18701	0.17513	0.19519	1.37	2194.02
		-0.38772	0.31812			
0°	0.0	0.0	0.0	$\infty$	0.0	(*) 2084.85
		-0.35355	0.36355			

(\*) Per  $\theta = 0^\circ$  le espressioni  $h(0) \cdot \text{ber}_1 0$  e  $h(0) \cdot \text{bei}_1 0$ , che assumono la forma indeterminata  $\infty \cdot 0$ , risultano:

$$h(0) \cdot \text{bei}_1 0 = - h(0) \cdot \text{ber}_1 0 = \sqrt{2}/4.$$

$p=0.1\text{N/cm}^2$   $E_1=3.6\cdot 10^6\text{N/cm}^2$   $\nu_{12}=0.1$   $R/s=250$

$p=0.1\text{N/cm}^2$   $E_1=3.6\cdot 10^6\text{N/cm}^2$   $\nu_{12}=0.1$   $R/s=250$

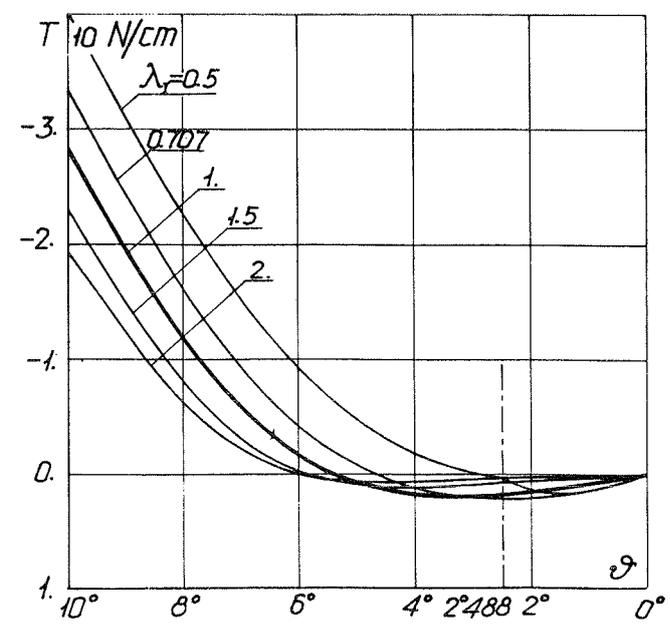
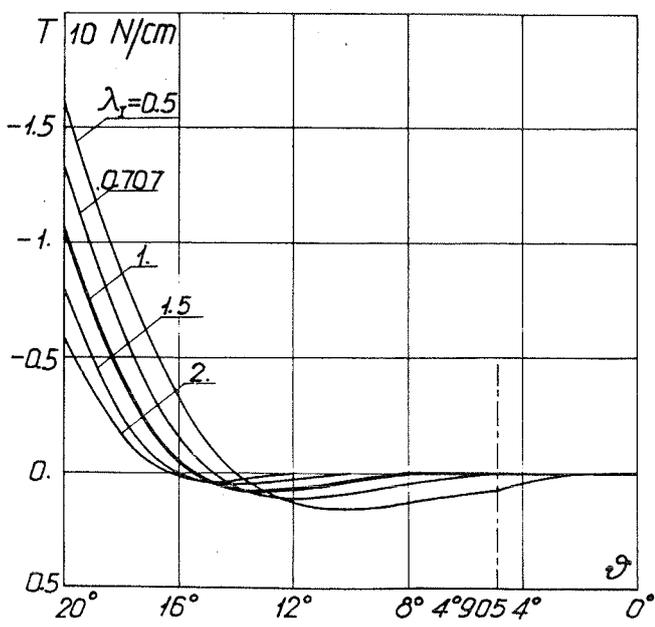
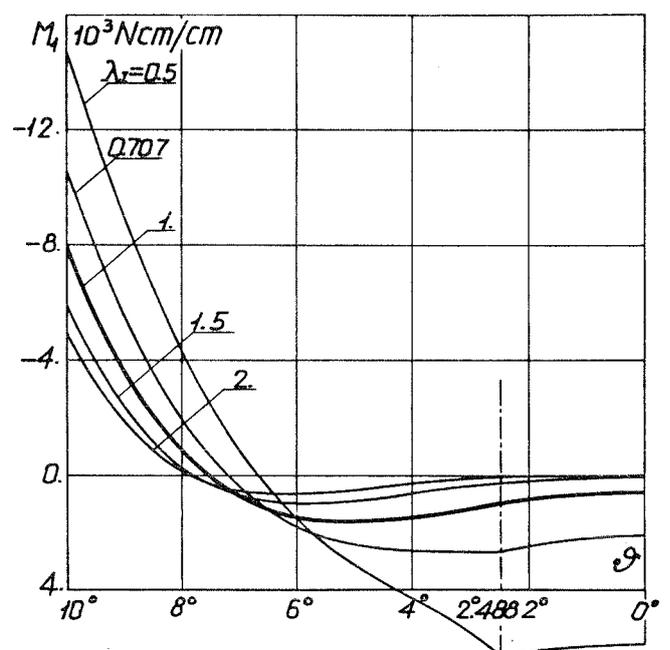
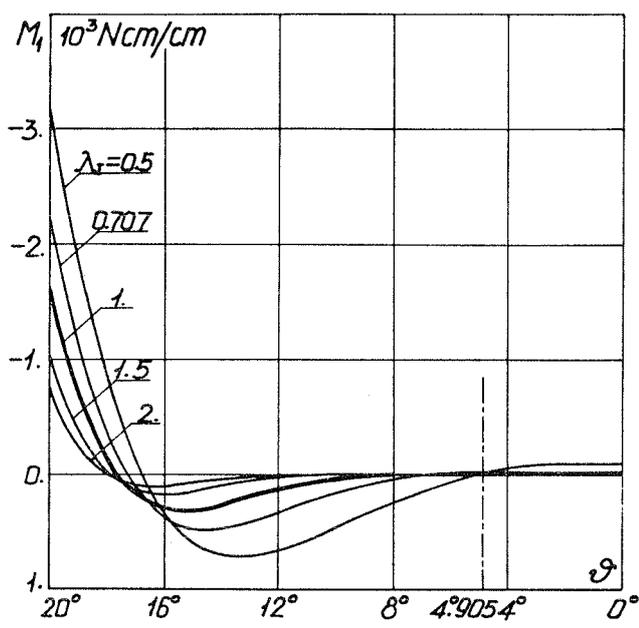
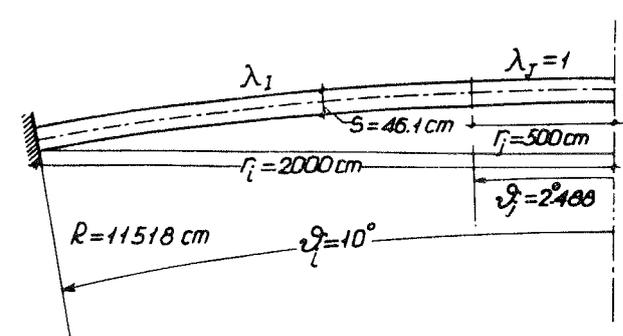
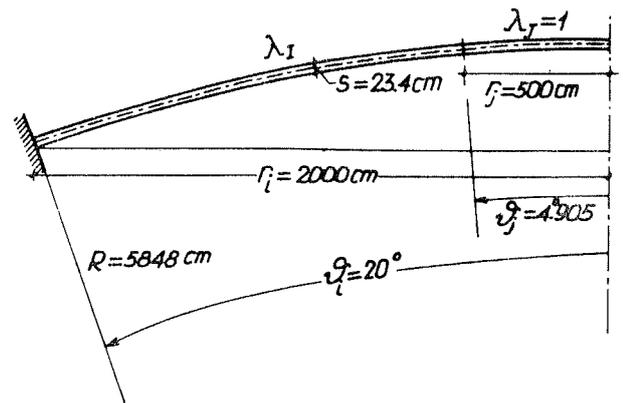


Fig. 6.2

Fig. 6.3

$$p=0.1 \text{ N/cm}^2 \quad E_1=3.6 \cdot 10^8 \text{ N/cm}^2 \quad \nu_{12}=0.1 \quad R/s=250$$

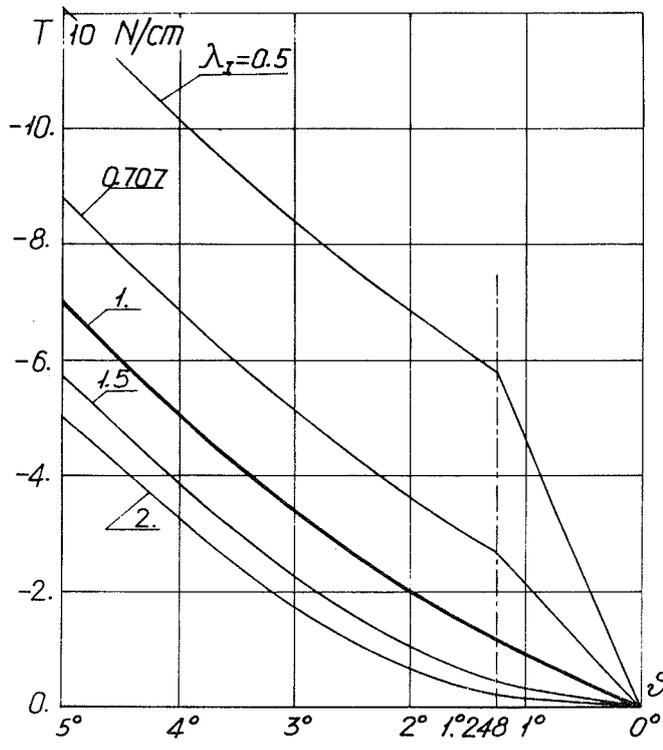
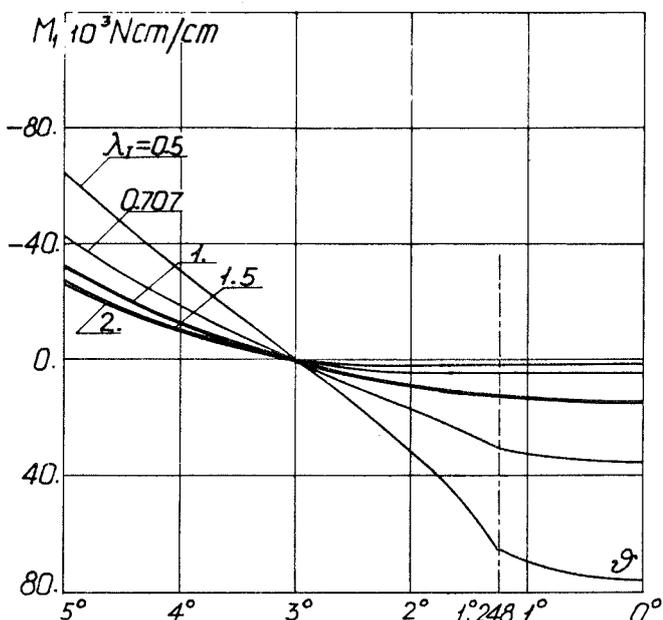
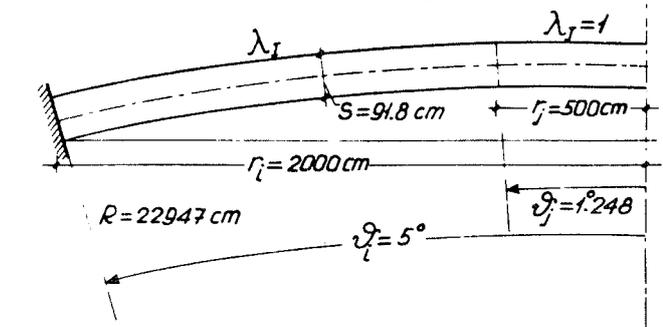


Fig. 6.4

## 7. CONCLUSIONI

Sviluppando la soluzione ricavata in (X) si sono dedotte le espressioni delle matrici di rigidità e di deformabilità per le piastre sferiche ortotrope ribassate a due bordi mostrando inoltre come le stesse espressioni possano applicarsi, con opportuna particolarizzazione, anche per il calottino isotropo.

La conoscenza delle matrici elastiche oltre a permettere di risolvere facilmente una piastra di rivoluzione isolata, comunque caricata e vincolata, serve altresì per calcolare agevolmente strutture costituite da più piastre collegate fra loro.

Come caso particolare si è sviluppato quello di una piastra ortotropa chiusa da un calottino isotropo che rappresenta la condizione che in pratica si verifica per le piastre ortotrope chiuse.

Dall'esame dei risultati delle applicazioni numeriche qui svolte, compendiate nelle figg. 6.2, 6.3 e 6.4, e di quelli già conseguiti in (X) si può dedurre quale è l'influenza del ribassamento e del rapporto di ortotropia sulla soluzione flessionale.

Trovata conferma del risultato noto che le sollecitazioni flessionali, a parità di  $\lambda$ , aumentano all'aumentare del ribassamento, si è potuto rilevare che tali sollecitazioni, a parità di ribassamento, crescono al diminuire del rapporto di ortotropia  $\lambda = \sqrt{E_2/E_1}$ , inducendo anche un aumento delle sollecitazioni nel calottino centrale.

Tale comportamento è facilmente spiegabile considerando che al diminuire di  $\lambda$  decresce l'azione di sostentamento esercitata dai paralleli per cui nella struttura tende a ridursi l'effetto cupola per passare al limite, per  $\lambda \rightarrow 0$ , ad un comportamento tipo arco per le piastre chiuse o tipo mensola per quelle aperte (X). Per la piastra ortotropa qui esaminata, chiusa da un calottino, vi è da rilevare una discontinuità nell'andamento delle

sollecitazioni flessionali nel passaggio dalla piastra ortotropa a quella isotropa, più avvertibile per  $\lambda < 1$ , che si accentua, per il motivo innanzi esposto, al diminuire di  $\lambda$ .

Infine si fa notare che la soluzione qui presentata per la cupola isotropa chiusa è in grado di fornire buoni risultati anche per fortissimi ribassamenti permettendo così di calcolare oltre a piastre isolate di tale tipo, piastre ortotrope chiuse da un calottino piccolo finché si vuole.

BARI - Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni - Gennaio 1983.

#### BIBLIOGRAFIA

- I) BELLUZZI O.: Scienza delle Costruzioni. Vol. III, Zanichelli, Bologna, 1951.
- II) NOVOZILOVO V.V.: The theory of thin shells. P. Noordhoff, Ltd. Groningen, the Netherlands, 1959.
- III) CICALA P.: Teoria lineare della parete sottile. Levrotto e Bella, Torino, 1967.
- IV) REISSNER E.: Stresses and small displacements of shallow spherical shells. I, pp. 80 - 85, II, pp. 279 - 300, J. Math. and Phys., 25, 1946.
- V) GRAVINA P.: Cascas de revolução. São Paulo, 1957.
- VI) SOLLAZZO A.: I gusci anisotropi. Teoria generale e aspetti applicativi. Atti del I° Congresso AIMETA, Udine, 1972.
- VII) TRENTADUE P.: Il calcolo delle piastre di rivoluzione a curvatura meridiana e spessore comunque variabili effettuato mediante i coefficienti elastici. Giornale del Genio Civile, Fascicolo 7° - 8°, Luglio - Agosto, 1961.
- VIII) TRENTADUE P.: Il regime flessionale nelle piastre ortotrope di rivoluzione. Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Bari, 1977.
- IX) TRENTADUE P.: Le matrici di rigidezza e di deformabilità per piastre ortotrope di rivoluzione. Atti del III Congresso AIMETA, Cagliari, 1976.
- X) TRENTADUE P. - GENTILE A.: Il regime flessionale nelle piastre sferiche ortotrope ribassate. Atti del VI Congresso AIMETA, Genova, 1982.
- XI) RICCIUTI U. - GENTILE A.: Analisi statica del guscio sferico ortotropo ribassato. Giornale del Genio Civile, Fascicolo 1° - 2° - 3°, Gennaio - Febbraio - Marzo, 1975.
- XII) LEKHITSKII S.G.: Anisotropic Plates. Gordon and Breach Science Publishers, New York - London - Paris, 1968.
- XIII) GATTESCHI L.: Funzioni speciali. UTET, Torino, 1973.
- XIV) MC LACHLAN N.W.: Bessel Functions for Engineers. Second Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1961.